境界要素法を用いた逆解析手法による非定常温度場の最適設計*

中村正行^{*1}, 田中正隆^{*1}
安達 治^{*2}, 石川尚男^{*3}Optimum Design of Transient Heat Conduction Fields
Using Boundary Element Inverse AnalysisMasayuki NAKAMURA, Masataka TANAKA,
Osamu ADACHI and Hisao ISHIKAWA

This paper presents a method of optimum design for transient heat conduction fields using inverse analysis with the boundary element method and the Kalman filter algorithm. It is expected that the inverse analysis method can be applied to optimization problems of determining unknown parameters by minimizing cost function. The optimization problem under consideration is such that the boundary conditions on part of the boundary are to be determined so that requirements of responses on the remainder of the boundary are satisfied. A few sample problems of optimization are computed by means of the inverse analysis method to demonstrate its potential usefulness.

Key Words: Inverse Problem, Optimum Design, Boundary Element Method, Extended Kalman Filter, Transient Heat Conduction, Temperature Control

1. 緒 言

領域内部や境界上の温度測定値から、計測困難な境界または内部の温度や熱流束を推定する熱伝導逆問題や、熱的データを基に未知欠陥や相界面などの領域の内部構造を推定する形状同定逆問題、領域の未知な物性値を求める物性値同定逆問題などの温度場に関する逆問題は関連する分野が広く、重要な課題であることから種々の検討がなされている⁽¹⁾⁻⁽⁸⁾。また、温度分布などの要求仕様を満足するような境界条件や領域形状を決定する設計問題も重要な課題であり、これらも逆問題の一つと考えられる。

著者らがこれまで提案した境界要素解析と拡張カルマンフィルタアルゴリズムまたは最適化手法を適用した逆解析手法⁽⁶⁾⁻⁽¹⁰⁾は、測定データに基づいて未知欠陥などの領域の内部構造や未知境界値の同定を行うものであるが、未知パラメータを決定する最適設計問題の解法としても適用可能である。そこで本研究では、非定常温度場における最適設計問題への逆解析手法の適用に関して考察する。

ここでは、拡張カルマンフィルタアルゴリズムと非

定常温度場の境界要素解析を組み合わせた逆解析手法の概要と最適設計問題への適用方法について述べる。またこの手法を、境界の温度分布などを指定した分布に保つために、制御温度入力の時空間変化がどのようなべきかを決定する最適設計の例題に適用した結果について示す。

2. 非定常温度場の最適設計

均質等方な領域における非定常熱伝導問題を考える。支配微分方程式は拡散方程式で表され、内部発熱がないとき、次のように書くことができる。

$$k\nabla^2 u(x, T) = \frac{\partial u(x, T)}{\partial T} \dots\dots\dots (1)$$

ただし、 $u(x, T)$ は領域内のある点 x での時刻 T における温度を表し、 ∇^2 はラプラシアンを表す。また、 k は温度拡散率であり次式で与えられる。

$$k = \frac{\lambda}{c\rho} \dots\dots\dots (2)$$

ただし、 λ は熱伝導率、 c は比熱、 ρ は密度である。また、 k は空間および時間に依存しないものと仮定する。

このような温度場における一つの最適設計問題を考える。図1に示すように、式(1)で支配される温度場の境界が、温度が既定された境界 Γ_u と熱流束が既定された境界 Γ_q 、および温度などの境界値分布が要求される境

* 原稿受付 平成5年10月8日。

^{*1} 正員, 信州大学工学部 (〒380 長野市若里500)。^{*2} 学生員, 信州大学大学院。^{*3} 准員, 日本車輛製造(株) (〒456-91 名古屋市熱田区三本松町1-1)。

図1 非定常温度場における温度制御に関する最適設計

界 Γ_r と、その要求を実現するように境界値分布が決定される境界 Γ_c から構成されているとする。そして、 Γ_u と Γ_q における境界値が既知である場合に、境界 Γ_r における温度または熱流束の要求値 $u_r(x, T)$ または $q_r(x, T)$ を実現するように、境界 Γ_c 上の温度または熱流束の境界値分布 $u_c(x, T)$ または $q_c(x, T)$ を決定する最適設計問題を考える。このような最適設計は精密プラスチック射出成型金型の最適温度設計や、熱衝撃に対する冷却制御に関する最適設計などへの応用が考えられる。

3. 境界要素解析とフィルタアルゴリズムを用いた逆解析による最適設計

上述のような問題は、設計変数である境界値分布の最適値を求める最適化問題である。本研究では設計変数を未知パラメータとして、境界要素解析と拡張カルマンフィルタアルゴリズムを用いた逆解析手法⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾によりこの未知パラメータを決定する。未知パラメータとしては未知量 $u_c(x, T)$ または $q_c(x, T)$ を関数で近似してその関数を表すパラメータを扱う。ここでは、未知量をB-スプライン関数で近似してその未定係数を未知パラメータとする。

次に、境界要素法と拡張カルマンフィルタアルゴリズムを用いた逆解析による未知パラメータの決定方法について述べる。ある時刻 t における観測量 y_t は未知パラメータ x_t に関する次のような観測式で表される。

$$y_t = h_t(x_t) + v_t \quad (3)$$

ただし、 v_t は観測量に含まれる誤差を表す。

最適設計問題に適用する際には、観測量は Γ_r 上で要求された境界値とし、未知パラメータは要求量を実現するように決定される Γ_c 上の境界値を表すB-スプライン関数のパラメータとする。この場合 t は時刻の代わりに計算の反復回数と考えられる。したがって、状態式はパラメータの時間的定常条件を表す次式となる。

$$x_{t+1} = Ix_t \quad (4)$$

ただし、 I は単位行列を表す。

拡張カルマンフィルタアルゴリズムにおいては、フィルタ方程式

$$\hat{x}_{t/t} = \hat{x}_{t/t-1} + K_t[y_t - H_t\hat{x}_{t/t-1}] \quad (5)$$

ただし、

$$K_t = P_{t/t-1}H_t^T [H_tP_{t/t-1}H_t^T + R_t]^{-1} \quad (6)$$

$$P_{t/t} = P_{t/t-1} - K_tH_tP_{t/t-1} \quad (7)$$

を用いて反復計算により未知パラメータの推定値 $\hat{x}_{t/t}$ が求められる。ここで、 K_t はカルマンゲイン、 H_t は観測マトリックス、 P_t は推定誤差共分散マトリックス、 R_t は観測誤差の共分散マトリックスである。

式(5)における観測行列 H_t は次式で与えられる。

$$H_t = \frac{\partial h_t}{\partial x_t} \bigg|_{x_t = \hat{x}_{t/t-1}} \quad (8)$$

本研究では式(8)の微係数は、境界要素法により計算された境界値 $h_t(\hat{x}_{t/t-1})$ を用いて差分近似により求める。非定常熱伝導問題の境界要素解析には、式(1)をラプラス変換した支配方程式に基づく正則化した境界積分方程式を離散化して解く、ラプラス変換境界要素法⁽⁸⁾を採用した。

また、初期値は次のように与えられる。

$$\hat{x}_{0/-1} = \bar{x} \quad (9)$$

$$P_{0/-1} = \Sigma_0 \quad (10)$$

反復計算における収束判定として以下の二つの条件を考える。一つは、要求量と計算値に関する残差二乗和の無次元量 Z の変化量が十分小さな値となった場合を収束とみなす。

$$|Z_t - Z_{t-1}| < \varepsilon \quad (11)$$

ただし、 Z は次のように定義する。境界値分布が要求される境界 Γ_r 上にいくつかの評価点を設定する。評価点上の境界値と要求量との残差二乗和 W を評価関数にとる。ここで、要求量が温度で与えられている場合について考えると、評価関数 W は次のように書くことができる。

$$W = \sum_{i=1}^L \sum_{d=1}^D \left(\frac{u(x_i, T_d) - u_r(x_i, T_d)}{u_r(x_i, T_d)} \right)^2 \quad (12)$$

ただし、 $u(x_i, T_d)$ は評価点 x_i のある時刻 T_d において境界要素解析により計算された温度、 $u_r(x_i, T_d)$ は対応する点と時刻における要求温度である。 L と D は空間と時間軸方向の評価点数である。 Z は次式で表される。

$$Z = \frac{1}{2} \log_{10} W \dots\dots\dots (13)$$

もう一つは、パラメータの変化量を考えその値が十分小さな値になった場合に収束したものとする。ここでは、すべてのパラメータの変化量が、それぞれの基準値⁵⁾より小さくなった場合を反復計算の収束とみなす。すなわち、次式で収束を判定する。

$$|\hat{x}_{t/t}^n - \hat{x}_{t/t-1}^n| < \xi^n, \quad n = 1, 2, \dots, N \dots\dots\dots (14)$$

ただし、 N はパラメータの総数である。本研究では二つの収束条件のうちどちらか一方が満足された場合に収束したものと判定する。

逆解析手法を最適設計問題に適用する際は、カルマンフィルタにおける観測量 y_i を達成すべき要求量とする。この時、観測量の誤差はないものと考え、誤差の共分散行列 R_i は 0 とおく。ただし、プログラム中では微小な値 (たとえば 1.0×10^{-30}) を与える。なお、このように観測誤差の共分散行列を 0 とおき、システムの状態式が式 (4) で示されるように定常状態を示す場合には、拡張カルマンフィルタの式 (5) - (7) はガウスニュートン法と同一となることが文献 (11) に示されている。

4. 逆解析手法による最適設計例と考察

ここでは、温度場の一部の境界における、温度変化の要求量を実現するような別の境界での温度分布を決定する非定常温度場での最適設計の解析例を示す。

図2に示すように2つの円孔を有する2次元正方形領域ABCDを考える。辺AB上で既知な温度 $u(x, T)$ が与えられるものとする。辺CD上で要求された温度変化を達成するように、円孔部分の温度境界条件を決定する。目標とする要求温度は時間的にも空間的にも一様な20℃とする。評価点は辺CD上に7点とり、時間軸上には30点とるものとする。なお、正方形領域の境界は12

図2 対象とするモデル

個の2次元アイソパラメトリック境界要素で分割し、2つの円孔の境界はそれぞれ4要素に分割する。また、ラプラス変換パラメータの数は30、解析対象時間は30sとする。

一つ目の例題として、辺AB上に与えられる温度変化が次式で与えられる場合(Example 1)を解析する。

Example 1

$$\left. \begin{aligned} u(T) &= 200 \sin \frac{\pi T}{15} & (0 \leq T \leq 15\text{s}) \\ u(T) &= 0 & (15 \leq T \leq 30\text{s}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

図3に式(15)で表される辺AB上に与えられる温度変化を図示する。円孔1と2の境界には同じ温度境界条件を考える。この境界値をB-スプライン関数で近似するものとする。ここでは未知パラメータ数を8個とした。反復計算における初期仮定値は2つの円孔境界上で一様に 20°C ($0\text{s} \leq T \leq 30\text{s}$)とした。

図4に最適化を行わない場合の辺CD上での温度応答を示す。ここで最適化を行わない場合の応答は、円孔1と2の温度境界条件を時間的にも空間的にも一定な20°Cに保った時のものである。図5に未知パラメータを逆解析により決定して得られた円孔部分の最適な温度境界条件を示す。図6に最適化を行った時の辺CD上の温度応答を示す。要求温度と最適化後に得られた温度との差はわずかであり、最適化がうまく行われていると言える。

次に二つ目の例題として，辺AB上に与えられる温度変化が次式で示される場合(Example 2)を解析する．

Example 2

$$\left. \begin{aligned} u(T) &= f(T) \sin \frac{\pi T}{30} & (0s \leq T \leq 30s) \\ f(T) &= \frac{5}{3}x + 100 & (0 \leq x \leq 60\text{mm}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

図3 辺 AB上の温度変化 (Example 1)

この例題では、円孔1と2の境界には別の温度境界条件を考え、未知パラメータ数は各8個ずつで計16個とすることにす。反復計算における初期仮定値はExample 1と同様に与えた。

図7に式(16)で表される辺AB上に与えられる温度変化を、図8に最適化を行わない場合の辺CD上での温度応答を示す。図9に未知パラメータを逆解析により決定して得られた円孔部分の最適な温度境界条件の時間変化を示し、図10に最適化を行った時の辺CD上の温度応答を示す。

この例題では辺AB上に与えられる温度変化が時間方向だけでなく、空間方向にも変化しているが、この場合にも要求温度と最適化後に得られた温度との差はわずかであり、最適化がうまく行われていると言える。

次に、最適化手法の一つである共役勾配法(CGM)を

図6 最適化後の辺CD上の温度変化(Example 1)

図4 最適化前の辺CD上の温度変化(Example 1)

図7 辺AB上の温度変化(Example 2)

図5 Hole1, 2の温度変化の最適値(Example 1)

図8 最適化前の辺CD上の温度変化(Example 2)

適用した逆解析手法⁽⁷⁾⁽⁸⁾を用いて Example 2 を解析した結果を示す。この場合も未知量は B-スプライン関数で近似される。また、反復計算の初期仮定値も同様に二つの円孔上で一様であり 20°C (0s ≤ T ≤ 30s) とした。

図 11 に、未知パラメータを逆解析により決定して得られた円孔部分の最適な温度境界条件を示し、図 12 に最適設計を行った時の辺 CD 上の温度応答を示す。最適化手法を用いた逆解析によっても同様に良好な結果が得られた。

表 1 に、評価点における要求温度と最適化後に得られた温度との誤差と、収束するまでの反復計算回数、境界要素法順解析の回数、収束時の無次元量 Z を示す。なお、ここに示した例題の他に、少ない未知パラメータで最適化を行った結果も示している。表中の誤差は次式によって計算したものである。

$$E_r = \frac{1}{L+D} \sum_{l=1}^L \sum_{d=1}^D \left| \frac{u(x_l, T_d) - \theta(x_l, T_d)}{\theta(x_l, T_d)} \right| \times 100\% \dots (17)$$

表中のいずれの場合も良好な最適結果が得られている。未知パラメータの数を多くすると順解析数を多く必要とし計算時間がかかるが誤差は減少する。図 13, 14 に、Example 1, 2 における無次元量 Z の収束状況を示す。収束性が良好なことがわかる。

Example 2 に対して、拡張カルマンフィルタアルゴリズムまたは共役勾配法を用いた逆解析手法による結果を比べてみると、最適化された場合の要求量は同様なものが得られている。しかし、収束に到るまでの順解析の計算回数は共役勾配法に比べて拡張カルマンフィルタアルゴリズムを用いた逆解析手法の方が少なく、約 1/4 になっており計算時間が約 1/4 に短縮されている。

図 9 Hole 1, 2 の温度変化の最適値(Example 2)

図 11 Example 2 に対して最適化手法(CGM)を用いた逆解析により得られた Hole 1, 2 の温度変化の最適値

図 10 最適化後の辺 CD 上の温度変化(Example 2)

図 12 Example 2 に対して最適化手法(CGM)を用いた逆解析により得られた最適化後の辺 CD 上の温度変化

したがって、共役勾配法よりも拡張カルマンフィルタアルゴリズムを用いた逆解析手法が効率的であることが分かる。

表1 評価点での誤差と計算回数

	Example 1		Example 2		
	Kalman		Kalman		CGM
Number of Parameters	3	8	8	16	16
Error $Er(\%)$	4.95	0.26	0.91	0.14	0.27
Iterations	3	3	3	3	11
Number of BE analyses	13	28	28	52	239
Z	-1.25	-2.50	-1.94	-2.75	-2.73

図13 無次元量Zの収束状況(Example 1)

図14 無次元量Zの収束状況(Example 2)

なお、例題においては温度の最適境界値を求めているが、熱流束の最適境界値も同様に求めることが可能である。また、本研究では決定すべき境界値が時間方向だけの関数である場合を取り扱ったが、空間方向にも分布する場合には、時間空間方向の分布を同時に取り扱ってスプライン曲面で近似し、未知パラメータを決定する手法⁽¹⁰⁾を用いれば同様に扱うことが可能である。

5. 結 言

本研究では境界要素解析と拡張カルマンフィルタアルゴリズムを用いた逆解析手法を非定常温度場における最適設計問題の解析に適用した。境界上の要求温度を満足するような別の境界の温度の時間変化を決定する最適設計の例題を解析し、収束性の良い良好な結果が得られた。逆解析手法を最適設計問題に有効に適用可能であることがわかった。

参考文献

- (1) Tanaka, M. and Bui, H.D.(Eds.), *Inverse Problems in Engineering mechanics*, (1993), Springer-Verlag.
- (2) Kubo, S.(Ed.), *Inverse Problems*, (1993), Atlanta Technology Publications.
- (3) Beck, J.V., Litkouchi, B. and St. Clair Jr., C.R., Efficient sequential solution of the nonlinear inverse heat conduction problem, *Numerical Heat Transfer*, 5(1982), 275.
- (4) Reinhardt, H.-J., A numerical method for the solution of two-dimensional inverse heat conduction problems, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 32(1991), 363.
- (5) Flach, G. P. and Özisik, M. N., Inverse heat conduction problem of simultaneously estimating spatially varying thermal conductivity and heat capacity per unit volume, *Numerical Heat Transfer, Part A*, 16(1989), 249.
- (6) 田中正隆・中村正行・石川尚男, 拡張カルマンフィルタと境界要素法を用いた逆解析による非定常温度場の未知量同定, 境界要素法論文集, 9(1992), 47.
- (7) 中村正行・田中正隆・石川尚男, 非定常熱伝導問題における未知境界値推定のための境界要素法逆解析, 機論, 58-555, A(1992), 2206.
- (8) 田中正隆・中村正行・塩崎 明, 非定常熱伝導における熱特性値推定のための境界要素逆解析手法, 材料, 42-477, (1993), 708.
- (9) 田中正隆・中村正行・落合 良, 拡張カルマンフィルタと境界要素法を用いた動弾性逆問題の解析手法, 機論, 59-564, A(1993), 1868.
- (10) 中村正行・田中正隆・落合 良, 拡張カルマンフィルタアルゴリズムを用いた動弾性逆解析における二, 三の考察, 機論, 59-567, 論文No.93-0579, 掲載予定.
- (11) 吉田郁政・黒瀬浩公・福井史朗, 確率論に基づく逆解析手法の基礎研究, 日本機械学会調査研究分科会P-SC220資料, IP3-8-1, (1993).