境界要素法によるアダプティブ構造解析*

江澤良孝^{*1}, 吉村行晴^{*2}
岡本紀明^{*1}, 小林久芳^{*2}

Adaptive Structural Analysis Using Boundary Element Method

Yoshitaka EZAWA, Yukiharu YOSHIMURA,
Noriaki OKAMOTO and Hisayoshi KOBAYASHI

This paper deals with the adaptive procedure for structural analysis using the boundary element method for two-dimensional problems with linear elements. The algorithm in this paper is simple and fast for computations of error estimations and the mesh refinement. We used the h-refinement and hr-refinement. We showed the experimental rule for the mesh refinement. The numerical results for some problems show the validity of the adaptive procedure in this paper.

Key Words: Boundary Element Method, Adaptive Problem, Mesh Refinement, Structural Analysis, Computational Mechanics

1. 緒 言

構造解析では、現在、有限要素法や境界要素法が広く用いられている。しかしながら、どちらも解析対象を有限要素または境界要素と呼ばれる細かい部分領域(境界要素法では部分境界)に分割しなければならない。解析の精度は、この要素の分割の仕方に大きく依存する。特に、接触、き裂等の応力集中のある領域に対しては、要素分割を細かくしなければ十分な解析精度が得られない。アダプティブ解析は、このような部分的に要素分割を細かくすることを含めて要素分割を自動的に制御し、解析精度を所定の範囲以内にするものである。ここに、境界要素法⁽¹⁾は対象とする構造物の境界表面のみを分割すればよいという特長を有しており、アダプティブ解析に向けた手法といえる。

アダプティブ解析を行うに当たっては、境界要素法における離散化誤差の推定とアダプティブ再要素分割技術が重要となる。この場合、離散化誤差の推定精度にとらわれすぎると計算時間がかかり、実用的でなく

なるおそれがある。厳密解の推定値⁰ U を求める方法としていちばん単純に考えられるのは、より細かい要素分割を行い、そのときの解を推定高精度解とするものである。この方法で推定精度をあげるには、要素分割を非常に細かくするか、異なる要素分割の結果からさらに高精度な解を推定するなどの手段が必要になる。この方法の欠点は、煩雑で時間(データ作成と解析)がかかることである。そこで、詳細再要素分割を行わずに高精度解を推定する方法がいろいろ提案されている。有限要素法において Kelly ら⁽²⁾によって提案され、Rencis ら⁽³⁾により改良された比較的シンプルな手法などはその代表的なものである。これは、解析に用いた要素より一次高次の要素による解を推定しようというものである。このほかに、座標値を変化させる結城ら⁽⁴⁾の方法がある。これは、二次の境界要素について、中間節点の位置をわずかにずらしたときの解の変化をみるものであり、誤差に対する感度がよく、実用的である。しかしながら線形の境界要素にはあまり有効ではない。また、Rencis らは一定要素を用いている。そこで本研究では、Rencis らのシンプルな手法に着目し、線形要素に適用拡大するとともに、要素再分割の判定基準を作成し、その実用性を検証した。

* 平成4年9月3日 日本機械学会材料力学部門講演会において講演、原稿受付 平成5年9月21日。

^{*1} 正員、(株)日立製作所機械研究所(〒300 土浦市神立町502)。

^{*2} 正員、(株)日立製作所情報システム事業部(〒211 川崎市幸区鹿島田890)。

2. 離散化誤差推定手法

弾性変形に関する解析領域の周辺および境界部の変位と表面力の関係を表す境界積分方程式は

$$C^j u_i + \int_{\Gamma} u_k t_k^* dS = \int_{\Gamma} t_k u_k^* dS \quad \dots\dots\dots (1)$$

のようになる⁽¹⁾。 C^j は境界上の点 j における領域形状で決まる係数であり、 u_k および t_k は x_k 方向の変位および表面力、 t_k^* 、 u_k^* は点 j に方向の単位集中力が負荷されたときの、影響点における x_k 方向の表面力と変位である。 Γ は境界部を表す。

境界部を要素に離散化することにより、式(1)から次のような離散化境界積分方程式が導ける。

$$[H]\{u\} = [G]\{t\} \quad \dots\dots\dots (2)$$

境界条件をこれに付加することにより、節点変位と節点表面力が得られる。変位の厳密解を U 、数値解析解を $\hat{U}$ とおくと、変位の誤差は次のようになる。

$$e_u = U - \hat{U} \quad \dots\dots\dots (3)$$

しかしながら、厳密解を知ることは困難なので、通常、厳密解の代わりに、数値解析解から推定された高精度解 0U を U の代わりに用いる。このとき、要素 i における誤差ノルムは次のように推定される。

$$\|e_u\|_i^2 = \int_{\Gamma_i} ({}^0U_i - \hat{U}_i)^2 dS \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここに、下添字 i は要素を表す。

この 0U を推定する手法を次に示す。線形要素では、要素内変位は次のように表せる。

$$\hat{U}_i = N_1^i \hat{u}_j + N_2^i \hat{u}_{j+1} \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここに N_1^i 、 N_2^i は一次の内挿関数を表す(図1)。一次高次な解析解は隣り合う2個の境界要素のとり方によって

$${}^0U_{i,i+1} = N_1^{i0} u_j + N_2^{i0} u_{j+1} + N_3^{i0} u_{j+2} \quad \dots\dots\dots (6)$$

または

$${}^0U_{i-1,i} = N_1^{i0} u_{j-1} + N_2^{i0} u_j + N_3^{i0} u_{j+1} \quad \dots\dots\dots (7)$$

の二種が考えられる。ここに N_1^i 、 N_2^i 、 N_3^i は二次の内挿関数である。

図1 誤差ノルムの概念

そこで、式(4)を次のように置換える。

$$\|e_u\|_i^2 = \int_{\Gamma_i} \frac{1}{2} \{ ({}^0U_{i-1,i} - \hat{U}_i)^2 + ({}^0U_{i,i+1} - \hat{U}_i)^2 \} dS \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここで

$$\Pi = \sum_{i=1}^n \|e_u\|_i^2 \quad \dots\dots\dots (9)$$

を次式により最小化する。

$$\frac{\partial \Pi}{\partial {}^0u_j} = 0 \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad \dots\dots\dots (10)$$

これより推定高精度解の節点変位 0u_j が求まる。推定高精度解 0t_j も同様に求まる。

誤差指標としては、次のような値を用いた。

$$\eta_i = \left\{ \|e_u\|_i^2 / \sum_{j=1}^n \|\hat{U}\|_j^2 + \|e_t\|_i^2 / \sum_{j=1}^n \|\hat{T}\|_j^2 \right\}^{1/2} \quad \dots\dots\dots (11)$$

ここに、 $\|\hat{U}\|_j$ 、 $\|\hat{T}\|_j$ は変位と表面力の数値解のノルムである。この方法は、より高次の境界要素に適用することも可能である。

3. アダプティブ再要素分割

アダプティブ最要素分割には、大きく分けて

- (1) h-法(分割領域をさらに分割する)
- (2) r-法(節点座標を移動させる)
- (3) p-法(高次の要素を用いる)

がある。このほかに、h-法とr-法の間接的な手法として、hr-法⁽⁵⁾がある。ここでは、どのような形状の構造物にも適用が容易なh-法とhr-法を用い、その比較を行った。h-法では、各要素 i の誤差指標 η_i が、再分割判定値を超える場合に要素を二分割するという方法を用いた。再分割判定値は、再解析ステップ k によらず一定とし、初期要素分割 ($k=0$) での誤差指標の平均 $\eta(0)$ の再分割判定値に用いた。再分割判定値をユーザが指定することも可能であるが、その最適な値はモデルによって変わってくる可能性が高い。そこでモデルに依存した再分割判定値を採用した。また、再解析ステップの繰返しの打ち切りの判定基準として、ステップ間での誤差の減少分がある許容値に達した時点と考え、次式

$$\eta(k-1) - \eta(k) \leq 0.2 \times (\eta(0) - \eta(1)) \quad (k=1, 2, \dots) \quad \dots\dots\dots (12)$$

を満足した時点とした。式(12)における係数0.2は本研究で経験的に選んだ値である。

hr-法は、h-法とhr-法の混合した方法で、節点を移動させつつ、要素数も増加させる方法である。具体的には、誤差指標 η_i から再分割後の節点密度 d_i (再分割前の一要素当たりの、再分割後の節点の分布密度)を

算出する。節点密度は1以下の場合もあり得る。1回のみの再分割で最終要素分割とする。したがって、誤差指標 η_i から再分割後の節点密度 d_i を求める方法が hr-法のポイントになる。本研究では次式によって節点密度 d_i を求めた。

$$\left. \begin{aligned} d_i &= 10.0 \quad (\eta_i > 20.0) \\ d_i &= 0.5 \times \eta_i \quad (1.0 \leq \eta_i \leq 20.0) \\ d_i &= 0.5 \quad (\eta_i < 1.0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

係数は数値実験により経験的に選んだ値である。

4. 計 算 例

上記アルゴリズムの有効性を例題で検証する。図2に示すように、二つの部材が上下に接合しており、上面から一様荷重を加えた問題を、二次元平面ひずみの対称問題としてモデル化し、解析を行った。

初期要素における推定誤差分布と1回めの再分割を図3に示す。図3において、応力集中が起こるB点付近で誤差が高くなっている。誤差指標の平均値は4.77%であったので再分割判定値を4.77%とした。

図4はh-法を用いた場合の最終の要素分割と推定誤差分布を示す。ここでは4回の再分割で最終分割となった。図4からわかるように、応力集中部以外の推

定誤差は減少しているが、逆に応力集中部は逆に増加している。これは点Bに無限大の応力集中があるため、要素分割が細くなるに従って、推定高精度解の値が急激に大きくなり、その結果推定された誤差指標が大きくなると考えられる。

図5はhr-法を用いた場合の最終の要素分割と推定誤差分布を示す。h-法の場合と同様に点Bの近傍で要素分割が細くなっている。要素数はh-法の場合より多めになっている。最終要素分割は、h-法では辺AB上で12分割、hr-法では24分割になった。

図6, 7はそれぞれh-法とhr-法による接合面A-Bにおける最大主応力の節点での分布であり、詳細要素分割解は比較のためA-Bを40要素に等分割した場合であり、h-法、hr-法ともに詳細要素分割解とよく一致している。このときのCPU時間の推移を図8に示す(ワークステーション2050/32Eを使用)。これより、誤差予測およびアダプティブ再要素分割に要する時間が、BEM解析に比べ影響のない程度に小さいことがわかる。h-法では、要素再分割は1回のみである。図9に、詳細要素分割解をBEM解析するのに要するCPU時間と、初期要素分割に対するBEM解析から最終要素分割での誤差予測までの合計のCPU時間を示す。これより、詳細要素分割解と同精度の解を、詳細

図2 精度検証モデル

図4 h-法での最終分割と誤差分布

図3 初期分割と誤差分布

図5 hr-法での最終分割と誤差分布

分割の場合と比較して1/8から1/11程度の時間で得られることがわかる。

h-法とhr-法ではhr-法のほうがCPU時間の合計は短くなった。これは本研究ではh-法において再要素分割時の分割数を一要素当たり2に固定していることが関係していると考えられる。また、hr-法の場合、領域境界を複数の境界要素からなる部分領域に分け、その領域ごとに要素再分割するため、再分割用の部分領域を指定する必要があり、簡便さではh-法が優っている。

図10は、半導体のパッケージの解析に適用した例である。ここでは、半導体パッケージの面付実装の過程で生じるリフロークラックという現象⁽⁶⁾を解析した。ICには、はんだ付実装という工程がある。この場合、基板全体を赤外線などで加熱するリフローソルダリングが用いられ、ICパッケージは200°C以上の高温に加熱される。リフロークラックとは、このリフロー

時にパッケージの封止樹脂が大気中の水分を吸湿していると、樹脂中に吸湿された水分がパッケージ内部で水蒸気になり、その圧力により樹脂にクラックが生じる現象である。

ここでは解析を単純化するため、素子搭載板(Chip pad)の下面に蒸気圧をかけたときの解析を行った。アダプティブはh-法を用いた。モデル化は、問題の対称性を考慮して、半分のみとした。解析条件は図10に示すとおりである。なお、ここでの蒸気圧は解析手法の妥当性をみるために設定した値で物理的意味はない。表1に計算に用いた材料定数を示す。

図11は初期要素分割である。図12はこのときの誤

図6 接合面での最大主応力分布(h-法)

図7 接合面での最大主応力分布(hr-法)

図8 例題1におけるCPU時間

図9 例題1の解析CPU時間合計の比較

図10 (実施例)半導体パッケージのリフロークラック

表 1 材料定数

	Component	Young's modulus (MPa)	Poisson's ratio
Material 1	Chip	188.16	0.3
Material 2	Chip pad	161.70	0.3
Material 3	Plastic	1.47	0.4

図 11 IC パッケージの初期分割

図 12 IC パッケージの初期誤差分布

差分布を示している。素子搭載板の角部で誤差が大きくなっている。図 13 はアダプティブ分割を行ったときの最終要素分割で、図 13(a) は全体分割、図 13(b) は素子搭載板の角部の拡大図であり、搭載板角部近傍が細かく分割されている様子がわかる。最終要素分割における誤差分布は図 14 のようになる。全体的に誤差が小さくなっていることがわかる。角のところがかえって大きくなっているのは図 5 の場合と同じで、物体の角部での応力は弾性理論では無限大になるため、解析精度が上がるにつれて、相対的な予測誤差が大きくなっているものであり、絶対的な誤差は小さくなっている。最終分割における応力分布の一例を図 15 に示す。素子搭載板の角部に応力が集中している。この例からわかるように、比較的複雑な解析対象にもアダプティブ解析が適用できる。

5. 結 言

線形要素を用いた二次元境界要素法による構造解析に対して、アダプティブ再要素分割を適用し、その有効性を確かめた。本研究で用いた誤差推定手法は、比較的シンプルであり、誤差評価および再要素分割に要

(a) 全体分割図

(b) 部分拡大図

図 13 IC パッケージの最終要素分割

図 14 IC パッケージの最終誤差分布

図 15 IC パッケージ主応力分布

する計算時間が短いという特長がある。また、誤差指標を h-法と hr-法に適用する場合の判定式を提案した。本研究の手法を例題を用いて検証したところ、比較的複雑なものでも適用できることがわかった。

半導体パッケージの解析に当たっては、(株)日立製作所西村朝雄氏のご協力をいただいた。ここに、深く謝意を表す。

文 献

- (1) Brebbia, C. A., *The Boundary Element Method for Enginners*, (1978), Pentech Press Ltd.
 - (2) Kelly, D. W., ほか 3 名, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **19** (1983), 1593.
 - (3) Rencis, J. J., ほか 4 名, *Compt. Struct.*, **37**-1(1990), 103.
 - (4) 結城・ほか 2 名, *機論*, **57**-533, A(1991), 202.
 - (5) 結城・ほか 1 名, 日本機械学会 RC-98 研究成果報告書, (1992), 175.
 - (6) 北野・ほか 2 名, *機論*, **57**-538, A(1991), 1398.
-