き裂を有する不均質材料の熱応力場における応力特異性*

野田 直剛^{*1}, 靳 志 和^{*1}Stress Singularity of Nonhomogeneous Body with Crack
in Thermal Stress Fields

Naotake NODA and Zhi-He JIN

In this investigation, singular fields of stresses and heat fluxes at the tip of a crack in a nonhomogeneous body, or functionally gradient material # (FGM), are studied under both elastic and plastic conditions. It is found that the crack tip fields have the same forms as those in the homogeneous material, provided that the material properties of FGM are continuous. The heat fluxes have a square-root singularity at the crack tip, and the elastic crack tip stress field is characterized by the K -field of linear fracture mechanics and the plastic singular field is the HRR field for a power-law material. The relationship between stress intensity factors and the path-independent integral $\bar{J}$ proposed by Aoki, Kishimoto, Matsumoto, Tachihara and Sakata⁽¹⁾ is discussed.

Key Words: Thermal Stress, Functionally Gradient Material, Fracture Mechanics, Stress Singularity, Heat Flux Singularity, Stress Intensity Factor

1. 結 言

航空, 宇宙, 原子力等の分野における新しい耐熱材料として, 熱応力緩和傾斜機能材料 (FGM) の研究と開発が進められている。この FGM は高温側にセラミックス, 低温側に金属を配置し, セラミックスから金属への組成を連続的に変化させることにより, 熱応力を緩和しかつ遮熱効果を高めることなどを目的としている。

熱応力緩和傾斜機能材料は高温側のセラミックス層にき裂が発生するため, FGM の破壊力学的研究が望まれてきた。そこで, 著者はき裂を有する FGM の熱応力の研究について, 物性値が位置の指数関数として変化する場合に対して熱応力拡大係数の解析^{(2)~(5)}を行ってきた。その結果, 物性値が位置の指数関数として変化する場合に対して, き裂先端における応力場はき裂先端からの距離の $-1/2$ 乗で与えられ, 熱応力拡大係数は均質体の場合と同様に求めることができることを示した。

一方, 連続体力学の観点から FGM は不均質材料である。不均質材料の破壊力学的研究において,

Erdogen ら^{(6)~(8)} は, 物性値が位置の指数関数として変化する場合に対して, き裂を有する等温弾性問題を解析し, き裂先端における応力場はき裂先端からの距離の $-1/2$ 乗で与えられ, 応力拡大係数の解析を行っている。そのなかで Erdogen ら⁽⁸⁾ は物性値が連続的に変化する不均質体に対し, き裂先端におけるモード I および II の応力場はき裂先端からの距離の $-1/2$ 乗で与えられると考えられるが, 証明はされていないと述べている。

そこで本研究では, 傾斜機能材料を含めた一般の不均質材料にき裂が存在するとき, き裂先端の応力特異性について論じ, 均質体の場合と比較検討を行った。物性値が連続的に変化する不均質材料に対し, き裂先端におけるモード I および II の応力場はき裂先端からの距離の $-1/2$ 乗で与えられることを証明した。

2. 温 度 場

温度 T の満足すべき二次元非定常熱伝導方程式は不均質材料に対し

$$\nabla^2 T + \frac{1}{k} \nabla k \cdot \nabla T = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここに, $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, $\nabla = (\partial/\partial x) \mathbf{i} + (\partial/\partial y) \mathbf{j}$, k は熱伝導率, α は温度伝導率であり, 各物性値は位

* 原稿受付 平成5年7月1日。

^{*1} 正員, 静岡大学工学部 (〒432 浜松市城北3-5-1)。

置の関数である。

き裂先端を原点とする極座標 (r, θ) と直角座標 (x, y) を図 1 に示すように採用する。温度 T を極座標表示を用いて以下のように表示する。

$$T(r, \theta, t) = R(t) r^\delta \bar{T}(\theta) \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 δ は固有値、 $\bar{T}(\theta)$ は δ に対応する固有関数、 $R(t)$ は時間に依存する特異性の強さを表す係数である。式 (2) を式 (1) に代入し、き裂先端近傍 ($r \rightarrow 0$) における r の最低次数が満足すべき方程式は次式となる。

$$\nabla^2 T = 0 \dots\dots\dots (3)$$

き裂表面の熱伝導を考慮すれば境界条件は次式で表される。

$$\theta = \pm \pi \text{ で } \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} = H \cdot [T(r, -\pi) - T(r, \pi)] \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 H はき裂表面の熱伝達率であり、 $0 < H < \infty$ の値をとる。式 (2) を式 (4) に代入すれば、き裂先端近傍 ($r \rightarrow 0$) にいて r の最低次数が満足すべき境界条件は次式となる。

$$\theta = \pm \pi \text{ で } \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 \dots\dots\dots (5)$$

き裂先端近傍の漸近方程式 (3) と (5) は線形破壊力学のモード III の問題と同一方程式であるので、き裂先端近傍の温度場は次式で与えられる。

$$T(r, \theta, t) = R(t) \sqrt{2r} \sin \frac{\theta}{2} \dots\dots\dots (6)$$

また、熱伝導率 k は (r, θ) の関数であるが、き裂先端では θ に無関係に一定値 (k^0) をもつことから

$$k(r, \theta) = k^0 + k^*(r, \theta), \lim_{r \rightarrow 0} k^*(r, \theta) = 0$$

と表される。よってき裂先端近傍の熱流束場は

$$\begin{aligned} q_r &= -k^0 \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{k^0 R(t)}{\sqrt{2r}} \sin \frac{\theta}{2} \\ q_\theta &= -k^0 \frac{\partial T}{r \partial \theta} = -\frac{k^0 R(t)}{\sqrt{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \end{aligned} \dots\dots\dots (7)$$

ここに、 k^0 はき裂先端での熱伝導率である。式 (6) と (7) は均質材料の場合⁽⁸⁾ の温度場と熱流束場と同一である。

図 1 き裂形状と座標

次に、図 2 に示すように異種不均質材料の接合界面にき裂が存在する場合について、き裂先端近傍の温度場を考える。

材料 1 と 2 の熱伝導率を k_1, k_2 、温度伝導率を α_1, α_2 とする。き裂先端近傍での漸近基礎方程式とき裂表面の漸近境界条件は式 (3)、(5) と同一であり、材料接合界面での連続性条件は

$$\begin{aligned} T(r, 0^+) &= T(r, 0^-), \\ k_1^0 \frac{\partial T(r, 0^+)}{\partial \theta} &= k_2^0 \frac{\partial T(r, 0^-)}{\partial \theta} \end{aligned} \dots\dots\dots (8)$$

き裂先端の近傍の熱伝導の漸近境界問題は線形破壊力学のモード III の問題と同一であるので、き裂先端近傍の温度場と熱流束場は次式で与えられる。

$y > 0$ で

$$\begin{aligned} T(r, \theta, t) &= R(t) \sqrt{2r} \sin \frac{\theta}{2} \\ q_r &= -k_1^0 \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{k_1^0 R(t)}{\sqrt{2r}} \sin \frac{\theta}{2} \\ q_\theta &= -k_1^0 \frac{\partial T}{r \partial \theta} = -\frac{k_1^0 R(t)}{\sqrt{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \end{aligned} \dots\dots\dots (9 \cdot a)$$

$y < 0$ で

$$\begin{aligned} T(r, \theta, t) &= \frac{k_1^0}{k_2^0} R(t) \sqrt{2r} \sin \frac{\theta}{2} \\ q_r &= -k_2^0 \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{k_1^0 R(t)}{\sqrt{2r}} \sin \frac{\theta}{2} \\ q_\theta &= -k_2^0 \frac{\partial T}{r \partial \theta} = -\frac{k_1^0 R(t)}{\sqrt{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \end{aligned} \dots\dots\dots (9 \cdot b)$$

ここに、 k_1^0, k_2^0 はき裂先端での熱伝導率である。

3. 弾性応力場

3.1 基礎方程式 不均質材料の二次元熱弾性問題を考える。構成方程式は

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) + \alpha T$$

図 2 異種不均質材の界面き裂

$$\begin{aligned}\varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) + \alpha T \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{xy}\end{aligned}\quad \dots\dots\dots (10)$$

ひずみと変位の関係は

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \quad \dots (11)$$

適合条件は

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} \quad \dots\dots\dots (12)$$

ここで、 $\sigma_{\alpha\beta}$ と $\varepsilon_{\alpha\beta}$ は応力成分とひずみ成分であり、 u , v は変位、 E , ν は縦弾性係数とポアソン比、 α は線膨脹係数である。

次式で与えられる応力関数 F を導入する。

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad \dots\dots\dots (13)$$

式(10), (11), (12)より、応力関数 F の満足すべき方程式は

$$\begin{aligned}& \nabla^2 \left(\frac{1}{E} \nabla^2 F \right) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1+\nu}{E} \right) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1+\nu}{E} \right) \\ & \times \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{1+\nu}{E} \right) \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \Delta^2 (\alpha T) = 0\end{aligned}\quad \dots\dots\dots (14)$$

となる。

3・2 き裂先端で連続微分可能な不均質材料 物性値が連続微分可能である不均質材料について考える。き裂先端近傍における応力場を考えるため、き裂先端に座標原点をもつ極座標を用いれば応力関数 F は次式で表される。

$$F = K(t) r^\lambda \tilde{F}(\theta, M) \quad \dots\dots\dots (15)$$

ここで、 $(2-\lambda)$ は応力特異性のオーダーであり、 M は次式で与えられる混合形パラメータである。

$$M = \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left\{ \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sigma_{xy}(r, 0)}{\sigma_y(r, 0)} \right\} \quad \dots\dots\dots (16)$$

式(15)を式(14)に代入すれば、き裂先端近傍で r の最低次数が満足する基礎方程式は次式となる。

$$\nabla^2 \nabla^2 F = 0 \quad \dots\dots\dots (17)$$

式(17)は均質材料の場合の応力関数が満足すべき基礎方程式問題と同一であるので、不均質材料のき裂先端での応力特異性は均質材料の場合と同一である。すなわち、不均質材料のき裂先端での応力は $r^{-1/2}$ の特異性をもつことがわかる。

3・3 き裂先端で微係数が異なる不均質材料 不均質材料の物性値は連続であるが、き裂先端で物性値の微係数が不連続であり、微係数の不連続面にき裂が存在する場合について考える。き裂先端近傍の応力関数 F が次の漸近式で表されると仮定する。

$$\begin{aligned}F &= K_1(t) r^{\lambda_1} \tilde{F}_1(\theta, M_1), \quad 0 < \theta < \pi \\ F &= K_2(t) r^{\lambda_2} \tilde{F}_2(\theta, M_2), \quad -\pi < \theta < 0 \quad \dots\dots (18)\end{aligned}$$

上式を式(14)に代入すれば、 r の最低次数が満足すべき方程式は次式となる。

$$\begin{aligned}\nabla^2 \nabla^2 \{r^{\lambda_1} \tilde{F}_1(\theta, M_1)\} &= 0, \quad 0 < \theta < \pi \\ \nabla^2 \nabla^2 \{r^{\lambda_2} \tilde{F}_2(\theta, M_2)\} &= 0, \quad -\pi < \theta < 0 \quad \dots\dots (19)\end{aligned}$$

き裂表面の境界条件は

$$\theta = \pm \pi \quad \text{で} \quad \sigma_y = \sigma_{xy} = 0 \quad \dots\dots\dots (20)$$

材料の連続性についての条件は

$$\begin{aligned}\sigma_{xy}(r, 0^+) &= \sigma_{xy}(r, 0^-), \quad \sigma_y(r, 0^+) = \sigma_y(r, 0^-) \\ u(r, 0^+) &= u(r, 0^-), \quad v(r, 0^+) = v(r, 0^-)\end{aligned}\quad \dots\dots\dots (21)$$

き裂先端における構成方程式は式(10)より

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E^0}(\sigma_x - \nu^0 \sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E^0}(\sigma_y - \nu^0 \sigma_x) \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1+\nu^0}{E^0} \sigma_{xy} \quad \dots\dots\dots (22)\end{aligned}$$

ここで、 E^0 , ν^0 はき裂先端での E , ν の値である。

漸近境界値問題(19)-(22)の解 F の構成要素は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}K_1(t) &= K_2(t) = \frac{2}{3\sqrt{\pi}} K_I(t) \\ \lambda_1 &= \lambda_2 = \frac{3}{2} \quad \dots\dots\dots (23)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{F}(\theta, M) &= \left(\cos \frac{\theta}{2} + \sin \theta \sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \right) \\ &\quad - \frac{K_{II}}{K_I} \left(\sin \frac{\theta}{2} + \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right), \\ &\quad -\pi < \theta < \pi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{F}(\theta, M) &= \begin{cases} \tilde{F}_1(\theta, M_1), & 0 < \theta < \pi \\ \tilde{F}_2(\theta, M_2), & -\pi < \theta < 0 \end{cases} \\ M_1 &= M_2 = M = \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{K_{II}}{K_I} \right) \quad \dots\dots\dots (24)\end{aligned}$$

ここで、 $K_I(t)$ と $K_{II}(t)$ はモード I とモード II の応力拡大係数である。式(23)および式(24)で表される応力関数 F の r および θ 依存性は、均質材料の場合と同一であることがわかる。しかし、応力拡大係数 $K_I(t)$ と $K_{II}(t)$ は均質材料の場合と異なる。すなわち、材料不均質性の影響は $K_I(t)$ と $K_{II}(t)$ を通してのみ現れる。

図3に示すように、不均質材料の物性値は連続であるがき裂先端で物性値の微係数が不連続であり、かつ不連続面にき裂が存在していない場合について考える。き裂先端近傍の応力関数 F が次の漸近式で表されると仮定する。

$$\begin{aligned}F &= K_1(t) r^{\lambda_1} \tilde{F}_1(\theta, M_2), \quad \theta_0 < \theta < \pi \\ F &= K_2(t) r^{\lambda_2} \tilde{F}_2(\theta, M_2), \quad -(\pi - \theta_0) < \theta < \theta_0\end{aligned}$$

$$F = K_3(t) r^{\lambda_3} \tilde{F}_3(\theta, M_2), \quad -\pi < \theta < -(\pi - \theta_0) \quad (25)$$

き裂表面の境界条件は式(20)と同一であり、材料接合界面での連続性条件は

$$\begin{aligned} \theta = \theta_0 \text{ と } \theta = -(\pi - \theta_0) \text{ で,} \\ [\sigma_{r\theta}(r, \theta)] = 0, [\sigma_{\theta\theta}(r, \theta)] = 0 \\ [u_r(r, \theta)] = 0, [u_{\theta}(r, \theta)] = 0 \quad (26) \end{aligned}$$

ここに $[f]$ は f の不連続値 $[f] = [f]_{\theta=\theta_0} - [f]_{\theta=-(\pi-\theta_0)}$ を意味する。3・2節と同じ方法を用いれば、不均質材料のき裂先端での応力特異性は均質材料の場合と同一であることがわかる。

3・4 応力拡大係数と $\hat{J}$ 積分の関係 温度場における、不均質材料に積分径路によらない $\hat{J}$ 積分⁽¹⁾は

$$\hat{J} = - \int_L \sigma_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x} dl + \iint_S \frac{\partial W}{\partial x} dS \quad (27)$$

ここに S はき裂先端を含む領域であり、 L は S を囲む径路であり、 n_i は L の外向き単位ベクトルである。式(18), (23), (24), (25)によると、応力拡大係数と $\hat{J}$ 積分の関係は均質材料の場合と同一である、すなわち、

$$\hat{J} = \frac{1}{E'} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad (28)$$

ここに、

$$E = \begin{cases} E^0 & (\text{plane stress}) \\ \frac{E^0}{1 - (\nu^0)^2} & (\text{plane strain}) \end{cases} \quad (29)$$

4. 塑性応力場

物性値が連続微分可能である不均質材料のき裂先端近傍が塑性応力場にある場合について考える。 n 乗硬化塑性体の平面応力場における熱弾塑性応力-ひずみ関係は全ひずみ理論を用いれば次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) + A \sigma_e^{n-1} \left(\sigma_x - \frac{1}{2} \sigma_y \right) + \alpha T \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) + A \sigma_e^{n-1} \left(\sigma_y - \frac{1}{2} \sigma_x \right) + \alpha T \end{aligned}$$

図3 不均質材料とき裂の幾何学的関係

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xy} + \frac{3}{2} A \sigma_e^{n-1} \sigma_{xy} \quad (30)$$

ここに A , n は材料定数であり、 σ_e は次式で定義される相当塑性応力である。

$$\sigma_e^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3 \sigma_{xy}^2 \quad (31)$$

応力関数 F の満足する方程式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left\{ \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) + A \sigma_e^{n-1} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) \right\} \\ + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) + A \sigma_e^{n-1} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) \right\} \\ + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left\{ \frac{1+\nu}{E} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{3}{2} A \sigma_e^{n-1} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right\} \\ + \nabla^2 (\alpha T) = 0 \quad (32) \end{aligned}$$

き裂先端近傍で特異応力場を考えると、応力関数 F は次式のように表せる。

$$r \rightarrow 0 \text{ で } F = K(t) r^{\lambda} \tilde{F}(\theta, M) \quad (33)$$

ここで、 $1 < \lambda < 2$ 。式(33)を式(32)に代入し、き裂先端近傍で弾性変形および温度変形は塑性変形に比べ無視できるので、式(32)は次式となる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left\{ A \sigma_e^{n-1} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) \right\} \\ + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ A \sigma_e^{n-1} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) \right\} \\ + 3 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left\{ A \sigma_e^{n-1} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right) \right\} = 0 \quad (34) \end{aligned}$$

さらに、き裂先端近傍では式(34)は次式となる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left\{ \sigma_e^{n^0-1} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) \right\} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \sigma_e^{n^0-1} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) \right\} \\ - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \left\{ \sigma_e^{n^0-1} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right) \right\} + 3 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left\{ \sigma_e^{n^0-1} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right) \right\} = 0 \quad (35) \end{aligned}$$

ここに、 n^0 はき裂先端での n 値である。式(35)は均質材料の場合⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾と同一である。不均質材料のき裂先端での応力場およびひずみ場は均質材料のHRR場⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾と同じ表示であり、不均質特性は $K(t)$ に現れるのみである。

$$\sigma_{\alpha\beta} = K(t) r^{-\frac{1}{n^0+1}} \tilde{\sigma}_{\alpha\beta}(\theta, M) \quad (36)$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = A K^{n^0}(t) r^{-\frac{n^0}{n^0+1}} \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta}(\theta, M) \quad (37)$$

また、き裂先端が弾塑性変形の境界に存在するとき、式(34)において $n^0=1$ と置くと、き裂先端における応力は $r^{-1/2}$ の特異性をもつことがわかる。すなわち、応力特異性は弾性場の特異性と同一になる。

5. 結 論

傾斜機能材料を含めた一般の不均質材料に二次元のき裂が存在するとき、き裂先端における温度場の特異

性および応力特異性について論じ、以下の結論を得た。

(1) 不均質材料の温度場における熱流束の特異性は、き裂先端の物性値を用いれば、均質材料の温度場における熱流束の特異性と同一であり、かつ線形破壊力学のモードIIIの応力特異性と同一である。

(2) 不均質材料の物性値が連続微分可能な場合、き裂先端での応力特異性は均質材料の場合と同一である。すなわち、不均質材料のき裂先端での応力は $r^{-1/2}$ の特異性をもつ。

(3) き裂先端で不均質材料の物性値が連続であるが微分係数が異なる場合、き裂先端での応力特異性は均質材料の場合と同一である。応力拡大係数 $K_I(t)$ と $K_{II}(t)$ の値に不均質性の影響が現れる。

(4) 物性値が連続微分可能である不均質材料のき裂先端近傍が塑性応力場にある場合、不均質材のき裂先端での応力場およびひずみ場は均質材の HRR 場と同一表示である。

文 献

- (1) 青木・ほか2名, 機論, 47-415, A(1981), 304.
- (2) Jin, Z. -H. and Noda, N., Minimization of Thermal Stress Intensity Factor for a Crack in a Metal-Ceramic Mixture, *Functionally Gradient Materials*, edited by J. Holt etc., American Ceramic Society, (1993), 47.
- (3) Noda, N. and Jin, Z. -H., *Int. J. Solids Struct.*, **30**(1993), 1039.
- (4) Jin, Z. -H. and Noda, N., *Int. J. Eng. Sci.*, **31**(1993), 793.
- (5) Noda, N. and Jin, Z. -H., *J. Thermal Stresses*, **16**(1993), 181.
- (6) Erdogan, F., *J. Appl. Mech.*, **52**(1985), 823.
- (7) Delale, F. and Erdogan, F., *J. Appl. Mech.*, **55**(1988), 317.
- (8) Delale, F. and Erdogan, F., *Int. J. Eng. Sci.*, **26**(1988), 559.
- (9) Sin, G. C., *J. Heat Transfer*, **87**(1965), 293.
- (10) Rice, J. R. and Rosengren, G. F., *J. Mech. Phys. Solids*, **16**(1968), 1.
- (11) Hutchinson, J. W., *J. Mech. Phys. Solids*, **16**(1968), 13.