き裂と粒界との干渉* (転位壁モデルを用いる検討)

北 川 浩^{*1}, 劉 兵^{*2}

Interaction between Crack and Grain Boundary (Based on Dislocation Wall Model)

Hiroshi KITAGAWA and Bing LIU

The interaction between a crack and a grain boundary is studied by the singular integral equation method. The dislocation wall model is used for representation of a low-angle grain boundary and the crack is assumed to be described by the continuous distribution of infinitesimal dislocations. The problem is first reduced to a system of singular integral equations with standard Cauchy kernels, which is solved by using the Gauss-Chebyshev integration formula, and then the stress intensity factors at the crack tip are calculated numerically. The influence of the distance and angle between the crack and dislocation wall, length of dislocation wall and the dislocation spacing of the wall on the stress intensity factors is examined. Finally, the correspondence to single dislocation-crack interaction obtained using the Rice-Thomson model is discussed.

Key Words: Crack, Grain Boundary, Dislocation Wall, Stress Intensity Factor, Singular Integral Equation, Rice-Thomson Model

1. 緒言

結晶粒界は結晶の中に存在する面欠陥である。多結晶と単結晶の性質の差は直接的、間接的に粒界の存在によって生じると考えられ、粒界が材料特性に及ぼす影響についてこれまでに数多くなされてきた。粒界を含む結晶を連続体力学で扱うためのモデルとして、二つの結晶粒の接合粒界を適当な転位列によって記述しようとする転位壁モデルの提案がなされている。例えば、隣接結晶粒の傾角が θ である小傾角粒界は刃状転位の配列と考えることができ、転位間隔 h とBurgersベクトル b との間に $h \approx b/\theta$ が成立することが証明されている⁽¹⁾。F.C.Frank⁽²⁾はこのような小傾角粒界の特性を検討したうえで、小傾角粒界の転位壁(dislocation wall)モデルを提案し、このモデルに基づいて無限および有限な転位壁の弾性場、ポリゴン状粒界の成長、小傾角粒界の移動現象および粒界と他の欠陥との相互作用などの研究を行っている^{(3)~(6)}。

一方、線状欠陥および面状欠陥がき裂の挙動に及ぼす影響を検討することは重要であり、き裂と介在物や繊維などの相互作用^{(7),(8)}、異材界面や粒界がき裂に及ぼす影響^{(9)~(11)}など多くの研究がなされてきている。しかし、粒界そのものの特性を考えて、き裂との相互作用について検討した研究は必ずしも多くはなく、解析的な取扱いが困難なこともあって未解明な問題が多く残されている。

本研究では、小傾角結晶粒界の転位壁モデルを用いて、結晶粒内に存在するき裂と粒界の相互作用について検討する。また、Rice-Thomsonのき裂と転位の相互作用の理論⁽¹²⁾を用いて一本の転位とき裂の相互作用を調べ、転位壁とき裂の相互作用との比較を行う。

2. 計算モデルおよび方法

結晶粒内に存在するき裂と粒界の相互作用を考察するために、図1に示すように、き裂を含んだ結晶粒が一樣なせん断応力 τ_a を受けている状態を考える。図中のき裂と結晶粒の一つの粒界の相互作用を図2のようにモデル化する。図に示すように、長さ $d-c$ のき裂と長さ $b-a$ の小傾角粒界をモデル化した転位壁が存在すると考える。転位壁の中央に座標原点を取り、転位壁の転位の間隔と長さをそれぞれ h と l 、き裂先端と転位壁中央点の間の距離と傾角をそれぞれ c と θ とする。

2.1 連続分布転位によるき裂の表現 き裂内部に適当な密度で転位を分布させ、き裂縁の応力条件とき裂端の変位条件を満たすように分布密度を定める方法によっていろいろなき裂問題を解くことができる⁽¹³⁾。この考え方を用いると、図3に示すようにき裂の内部にそれぞれ y 軸および x 軸に平行なBurgersベクトルをもつ、密度 $p(t), q(t)$ の刃状転位を分布させ、これを重ね合わせることによって図2に示すようなモードI, II両成分を持つき裂場を表現することができる。

図2中の座標系 $ox'y'$ に関する刃状連続分布転位による応力場は次のように与えられる⁽⁷⁾。

* 原稿受付 平成5年9月20日。

^{*1} 正員、大阪大学工学部 (〒565 吹田市山田丘2-1)。

^{*2} 正員、大阪大学大学院。

図1 き裂を有する多結晶体

図2 き裂と転位壁との相互作用モデル

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx'} &= \int_c^d [P_{xx'}(x', y', t)p(t) + Q_{xx'}(x', y', t)q(t)]dt \\ \sigma_{yy'} &= \int_c^d [\dot{P}_{yy'}(x', y', t)p(t) + Q_{yy'}(x', y', t)q(t)]dt \\ \sigma_{xy'} &= \int_c^d [P_{xy'}(x', y', t)p(t) + Q_{xy'}(x', y', t)q(t)]dt \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} P_{xx'}(x', y', t) &= A \frac{(t-x')[(t-x')^2 - y'^2]}{[(t-x')^2 + y'^2]^2} \\ P_{yy'}(x', y', t) &= A \frac{(t-x')[(t-x')^2 + 3y'^2]}{[(t-x')^2 + y'^2]^2} \\ P_{xy'}(x', y', t) &= A \frac{y'[-(t-x')^2 + y'^2]}{[(t-x')^2 + y'^2]^2} \\ Q_{xx'}(x', y', t) &= A \frac{y'[3(t-x')^2 + y'^2]}{[(t-x')^2 + y'^2]^2} \\ Q_{yy'}(x', y', t) &= A \frac{y'[-(t-x')^2 + y'^2]}{[(t-x')^2 + y'^2]^2} \\ Q_{xy'}(x', y', t) &= A \frac{(t-x')[(t-x')^2 - y'^2]}{[(t-x')^2 + y'^2]^2} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここで、 $A = \frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)}$ 、 μ は横弾性係数、 b は Burgers ベクトルの大きさ、 ν はポアソン比であって、応力成分につけた添字 c はき裂 (crack) による応力場という

図3 転位分布密度関数で表現するき裂

意味である。転位密度 $p(t), q(t)$ はき裂面が自由境界である条件とき裂両端で変位にギャップが生じない条件より定める。

2.2 転位壁の弾性的性質 対称な小傾角粒界に相当する刃状転位が平行に無限に配列した転位壁のまわりの応力場は、一本の転位の応力場を加え合わせることによって求められる⁽³⁾。この無限な転位壁から二つの半無限転位列を除去することによって有限な長さの転位壁のまわりの応力場が求められ、図2に示すような場合、座標系 oxy に対する応力成分は次の式で与えられる⁽⁴⁾。

$$\begin{aligned} \sigma_{gxx} &= -\frac{A}{h} \left[\frac{\pi \sin \frac{2\pi x}{h} (\sinh^2 \frac{\pi y}{h} + \sin^2 \frac{\pi x}{h} + \frac{\pi y}{h} \sinh \frac{2\pi y}{h})}{2 (\sinh^2 \frac{\pi y}{h} + \sin^2 \frac{\pi x}{h})^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \ln \frac{y^2 + (x + N_2 h + \frac{1}{2} h)^2}{y^2 + (x - N_1 h - \frac{1}{2} h)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{y^2}{y^2 + (x - N_1 h - \frac{1}{2} h)^2} - \frac{y^2}{y^2 + (x + N_2 h + \frac{1}{2} h)^2} \right] \\ \sigma_{gxy} &= \frac{A}{h} \left[\frac{\pi \sin \frac{2\pi x}{h} (\frac{\pi y}{h} \sinh \frac{2\pi y}{h} - \sinh^2 \frac{\pi y}{h} - \sin^2 \frac{\pi x}{h})}{2 (\sinh^2 \frac{\pi y}{h} + \sin^2 \frac{\pi x}{h})^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \ln \frac{y^2 + (x - N_1 h - \frac{1}{2} h)^2}{y^2 + (x + N_2 h + \frac{1}{2} h)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{y^2}{y^2 + (x - N_1 h - \frac{1}{2} h)^2} - \frac{y^2}{y^2 + (x + N_2 h + \frac{1}{2} h)^2} \right] \\ \sigma_{gyy} &= \frac{Ay}{h} \left[\frac{\pi^2 \cosh \frac{2\pi y}{h} \cos \frac{2\pi x}{h} - 1}{2h (\sinh^2 \frac{\pi y}{h} + \sin^2 \frac{\pi x}{h})^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{x + N_2 h + \frac{1}{2} h}{y^2 + (x + N_2 h + \frac{1}{2} h)^2} - \frac{x - N_1 h - \frac{1}{2} h}{y^2 + (x - N_1 h - \frac{1}{2} h)^2} \right] \end{aligned}$$

ここで、 h は転位間隔であって、応力成分の添字 g は粒界 (grain boundary) による応力場という意味である。 $h = l/(N_1 + N_2)$ で N_1 と N_2 はそれぞれ原点の左側と右側の転位の数であり、以下では $N_1 = N_2$ とする。

2.3 境界条件による積分方程式の誘導 き裂面が自由表面であるという条件より、次の境界条件が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \sum \sigma_{\theta\theta}(r, \theta) &= \sigma_{a\theta\theta}(r, \theta) + \sigma_{c\theta\theta}(r, \theta) + \sigma_{g\theta\theta}(r, \theta) = 0 \\ \sum \sigma_{r\theta}(r, \theta) &= \sigma_{ar\theta}(r, \theta) + \sigma_{cr\theta}(r, \theta) + \sigma_{gr\theta}(r, \theta) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ただし, $c < r < d$ である.

ここで, 応力成分の添字 a は外力 (applied stress) による応力場という意味である.

式 (1), (3) および外力 τ_a を座標変換することによって得られる各応力成分を式 (4) に代入すると次式が得られる.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)} \int_c^d \frac{p(t)}{t-r} dt &= -\sigma_{\theta\theta}(r, \theta) + 2\tau_a \sin 2\theta \\ \frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)} \int_c^d \frac{q(t)}{t-r} dt &= -\sigma_{gr\theta}(r, \theta) - 2\tau_a \cos 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

き裂の両端において両縁が相対変位を生じない条件から次式が成立する.

$$\left. \begin{aligned} \int_c^d p(t) dt &= 0 \\ \int_c^d q(t) dt &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式 (5), (6) を整理すると次式を得る.

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_c^d \frac{p(t)}{t-r} dt &= -\frac{1}{\pi h} \sigma'_{\theta\theta}(r, \theta) + \frac{\tau_a \sin 2\theta}{A'} \\ \frac{1}{\pi} \int_c^d \frac{q(t)}{t-r} dt &= -\frac{1}{\pi h} \sigma'_{gr\theta}(r, \theta) - \frac{\tau_a \cos 2\theta}{A'} \\ \int_c^d p(t) dt &= 0 \\ \int_c^d q(t) dt &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ここで, $c < t, r < d$ であり,

$$A' = \frac{\pi A}{2}, \quad \sigma'_{\theta\theta} = \frac{2\pi(1-\nu)h}{\mu b} \sigma_{\theta\theta}, \quad \sigma'_{gr\theta} = \frac{2\pi(1-\nu)h}{\mu b} \sigma_{gr\theta}$$

式 (7) は, 標準的な Cauchy 核を有する特異積分方程式で, Muskhelishvili の関数理論によって上式中の未知関数 $p(t), q(t)$ は次のように与えられる⁽¹⁴⁾.

$$\left. \begin{aligned} p(t) &= \frac{F_1(t)}{(d-t)^{1/2}(t-c)^{1/2}} \\ q(t) &= \frac{F_2(t)}{(d-t)^{1/2}(t-c)^{1/2}} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ここで, $c < t < d$ であり, $F_1(t), F_2(t)$ は有界な関数である.

次のように無次元化変数 ω, ρ を導入する.

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \frac{1}{d-c}(2t-c-d) \\ \rho &= \frac{1}{d-c}(2r-c-d) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

ここで, $c \leq t, r \leq d$, $-1 \leq \omega, \rho \leq 1$ である.

Gauss-Chebyshev の積分公式⁽¹⁵⁾を用いると, 式 (7) は次のような $2n \times 2n$ の線形連立方程式に帰着させることができる.

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{F_1(\omega_k)}{n(\omega_k - \rho_l)} &= -\frac{d-c}{2\pi h} \sigma'_{\theta\theta}(\rho_l, \theta) + \frac{(d-c)\omega_a \sin 2\theta}{2A} \\ \sum_{k=1}^n F_1(\omega_k) &= 0 \\ \sum_{k=1}^n \frac{F_2(\omega_k)}{n(\omega_k - \rho_l)} &= -\frac{d-c}{2\pi h} \sigma'_{gr\theta}(\rho_l, \theta) - \frac{(d-c)\omega_a \cos 2\theta}{2A} \\ \sum_{k=1}^n F_2(\omega_k) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ここで, ω_k, ρ_l はそれぞれ第一と第二の Chebyshev 多項式の根で⁽¹⁵⁾,

$$\left. \begin{aligned} \omega_k &= \cos \frac{\pi(2k-1)}{2n} \quad (k=1, 2, \dots, n) \\ \rho_l &= \cos \frac{\pi l}{2n} \quad (l=1, 2, \dots, n-1) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

上式から関数 F_1, F_2 を数値的に求めることができる.

2.4 応力の特異性 図 2 に示すようなき裂先端 $r=c$ および $r=d$ におけるモード I とモード II の応力拡大係数 K_I と K_{II} は次のように与えられる.

$$\left. \begin{aligned} K_I(c) &= \lim_{r \rightarrow c} \sqrt{2(c-r)} \sigma_{\theta\theta}(r, \theta) \\ K_I(d) &= \lim_{r \rightarrow d} \sqrt{2(r-d)} \sigma_{\theta\theta}(r, \theta) \\ K_{II}(c) &= \lim_{r \rightarrow c} \sqrt{2(c-r)} \sigma_{r\theta}(r, \theta) \\ K_{II}(d) &= \lim_{r \rightarrow d} \sqrt{2(r-d)} \sigma_{r\theta}(r, \theta) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

積分曲線端点における Cauchy 積分の特性によって次式が得られる⁽¹⁴⁾.

$$\left. \begin{aligned} K_I(c) &= \frac{\mu b}{2(1-\nu)} \lim_{r \rightarrow c} \sqrt{2(r-c)} p(r) \\ K_I(d) &= -\frac{\mu b}{2(1-\nu)} \lim_{r \rightarrow d} \sqrt{2(d-r)} p(r) \\ K_{II}(c) &= \frac{\mu b}{2(1-\nu)} \lim_{r \rightarrow c} \sqrt{2(r-c)} q(r) \\ K_{II}(d) &= -\frac{\mu b}{2(1-\nu)} \lim_{r \rightarrow d} \sqrt{2(d-r)} q(r) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

上式に式 (8), (9) を代入すると次の式になる.

$$\left. \begin{aligned} K_I(c) &= \frac{\sqrt{2}\mu b}{2(1-\nu)} (d-c)^{-1/2} F_1(-1) \\ K_I(d) &= -\frac{\sqrt{2}\mu b}{2(1-\nu)} (d-c)^{-1/2} F_1(1) \\ K_{II}(c) &= \frac{\sqrt{2}\mu b}{2(1-\nu)} (d-c)^{-1/2} F_2(-1) \\ K_{II}(d) &= -\frac{\sqrt{2}\mu b}{2(1-\nu)} (d-c)^{-1/2} F_2(1) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

一方, き裂先端 c におけるエネルギー解放率は次の式で与えられる.

$$\begin{aligned} G &= \frac{1-\nu}{2\mu} (K_I^2 + K_{II}^2) \\ &= \frac{\mu b^2}{4(1-\nu)} (d-c)^{-1} [F_1^2(-1) + F_2^2(-1)] \end{aligned} \quad (15)$$

3. 計算結果および考察

以上に述べた数値解析方法を用いて, 有限な転位壁とき裂の相互作用について考察する. ここでは, より重要と考えられるき裂先端 c における応力拡大係数を検討することにし, 応力拡大係数を次のように無次元化する.

$$\left. \begin{aligned} K'_I(c) &= \frac{K_I(c)}{\tau_a \sqrt{(d-c)/2}} \\ K'_{II}(c) &= \frac{K_{II}(c)}{\tau_a \sqrt{(d-c)/2}} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

ここで、き裂の長さ $d-c$ を一定として、外力 $\tau_a = \frac{\mu b}{2(1-\nu)(d-c)/2}$ とすると、上式は次のようになる。

$$K_I'(c) = F_1(-1), \quad K_{II}'(c) = F_2(-1) \quad (17)$$

以下においては混乱を生じることはないので、簡単化のために、 K_I', K_{II}' を K_I, K_{II} と表現する。なお、式 (10) 中の n を 100 として数値計算を行う。

(a) K_I (b) K_{II}

図 4 き裂と転位壁間の距離 c による
応力拡大係数の変化

図 4(a),(b) には、転位の間隔 h と転位壁の長さ l が一定の場合、き裂先端 c における応力拡大係数のき裂と転位壁の間の距離 c による変化を示す。転位壁から h 程度の範囲内では、転位壁はき裂先端場に強い影響を与えることがわかる。これは無限転位壁の場合には、応力場の有効な領域は転位壁から垂直方向に h 程度の範囲に限定されていることと定性的に対応している⁽⁴⁾。しかし、図に示すように h よりかなり遠くにき裂が存在する場合でも、長範囲応力場を生じる有限な転位壁から影響を受けることも明らかである。図 5 に $\theta = 30^\circ$ の場合のより広い c の範囲に

図 5 長範囲のき裂と転位壁間の距離による
応力拡大係数の変化

対応する応力拡大係数の変化を示す。 K_I を例にとると、図 4(a) に示すような増加の後に $c \approx l/2$ で最大値を取り、その後次第に減少して転位壁から十分遠いところで $\tau_a \sqrt{\pi(d-c)/2}$ で無次元化された単純なき裂の応力拡大係数 $K_I' = -\sin 2\theta = -0.866$ に近づく。 K_{II} は $K = 0$ に対して K_I とほぼ対称な変化をする。

図 6(a),(b) には転位壁内の転位の間隔 h は一定として、転位壁の長さ l を変えた場合の応力拡大係数の変化を示す。 h に比べて c が大きい場合、 l が大きいほど転位壁がき裂先端場に及ぼす影響は減少する。転位壁の長さが無限の場合には、 $c/h > 1$ で急速にそのような影響は消滅する。なお、転位壁の長さの変化が K_{II} に及ぼす影響は大きい。

(a) K_I (b) K_{II}

図 6 転位壁の長さ l による応力拡大係数の変化

(a) K_I (b) K_{II} 図 7 き裂と転位壁間の角度 θ による応力拡大係数の変化 (a) K_I (b) K_{II} 図 8 転位壁の転位間隔 h による
応力拡大係数の変化

図 7(a),(b) はき裂と転位壁の間の角度 θ によるき裂先端における応力拡大係数の変化を示している。 K_I と K_{II} は全体的にそれぞれ正弦、余弦関数状の変化を示すが、 θ が 0° と 180° に近い場合、転位壁が K_I に及ぼす影響は大きく、 $\theta = 90^\circ$ では K_{II} に対する影響が大きい。

図 8(a),(b) には、き裂と変位壁の間の距離 c と転位壁の長さ l は一定とした場合、転位の間隔 h (転位の数) によるき裂先端の応力拡大係数の変化を示す。一定の転位壁の長さに対して h は小さいほど転位壁がき裂に強い影響を与えることがわかる。

Rice-Thomson のき裂と転位との相互作用理論を用いると、図 2 に示す座標系原点にある転位とき裂の相互作用の結果生じるき裂先端の応力拡大係数が次のように計算できる⁽¹²⁾。

$$\left. \begin{aligned} K_I(c) &= -\frac{2\mu b}{2(1-\nu)\sqrt{2\pi c}} \cos \theta \\ K_{II}(c) &= -\frac{2\mu b}{2(1-\nu)\sqrt{2\pi c}} \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

上式によって求められるき裂と一本の転位の相互作用 (添字 2 をつける) と転位壁とき裂の相互作用 (添字 1 をつける) との比較を行う。図 9 にはき裂先端 c におけるエネルギー解放率の比を示す。この図から c が小さい場合に対して $G_1/G_2 < 1$ 、 c が増加していくと、 $G_1/G_2 > 1$ となることがわかる。一本の転位とき裂の相互作用の場合、き裂先端の応力拡大係数は $1/\sqrt{r}$ のような特異性をもつため、距離が近い場合き裂に対する転位の遮蔽作用は転位壁の遮蔽作用より大きいと考えられる。

一方、図 10 に無限な転位壁、 $N(N=21)$ 個の刃状転位からなる有限な転位壁および座標系原点にある Nb なる Burgers ベクトルをもつ一本の転位のまわりのせん断応力 σ_{12} の変化を示す。無限な転位壁のまわりの応力分布は転位の間隔 h までに急速に減少して、 h より遠い範囲ではほとんど 0 となる。一方、有限な

図 9 き裂と転位壁およびき裂と一本の転位の相互作用のエネルギー解放率の比

図 10 無限な転位壁と有限な転位壁および一本の転位のまわりの応力場の比較

図 11 き裂と有限な転位壁 ($N = 21$) およびき裂と $21b$ なる一本の転位の相互作用の応力拡大係数の比較

変位壁のまわりの応力分布は最初に減少するが、増加に転じ、一たん最大値を取った後に減少して、遠方では Nb なる Burgers ベクトルをもつ一本の転位のまわりの応力分布に近づく。図 11 には 21 個の刃状転位からなる有限な転位壁とき裂の相互作用の下でのき裂先端の応力拡大係数と式 (18) によって計算された $21b$ なる Burgers ベクトルをもつ一本の転位とき裂の相互作用に対応するき裂先端の応力拡大係数の比較を示す。 c が小さい範囲では大きい差が出るが、遠方では両解はお互いに近づく。

4. 結 言

本研究では、転位の連続分布理論を用い、小傾角結晶粒界に対応する転位壁モデルを用いて、結晶粒内に存在するき裂と粒界の干渉効果について検討を行った。また、Rice-Thomson のき裂と転位の相互作用についての理論を用いて、単一転位とき裂の相互作用と転位壁とき裂の相互作用の効果の比較も行った。解析結果より得た主な結果は次のようにまとめられる。

(1)、転位間隔と長さが一定の有限な転位壁に対して、 $c < h$ の場合で、転位壁はき裂先端場の特異性に強い影響を及ぼす。 $c > h$ の場合では、この影響は再度強くなり、 $c \approx l/2$ で極値を取る。

(2)、転位間隔が一定の場合、転位壁の長さが増加するに従って転位壁から h より離れた距離範囲での転位壁がき裂に及ぼす影響は減少し、無限な転位壁の場合には消滅する。

(3)、 θ による応力拡大係数の変化は K_I, K_{II} に対して全体的に正弦と余弦関数の形をもつが、小さい θ において転位壁が K_I に及ぼす影響は大きく、逆に $\theta = 90^\circ$ で K_{II} に対する影響が大きい。

(4)、転位壁の長さが一定の場合、転位の間隔は小さいほど転位壁がき裂に強い影響を与える。

文 献

- (1) Read, W.T., *Dislocation in Crystals*, (1953), 173, McGraw-Hill, New York.
- (2) Frank, F.C., *Report of the Conf. on Defects in Crystalline Solids*, (1955), 159, Physical Society, London.
- (3) Li, J.C.M., *Acta Met.*, 9(1961), 384.
- (4) Li, J.C.M., *Acta Met.*, 8(1960), 563.
- (5) Vreenland, T., *Acta Met.*, 7(1959), 240.
- (6) Li, J.C.M., *Acta Met.*, 8(1960), 296.
- (7) 例えば, Liu, X.H. and Erdogan, F., (1983), NASA, GRANT NGR, 39-007-011.
- (8) 例えば, 陳, ほか 1 名, 機論, 59-560, A(1993), 21.
- (9) 例えば, Hutchinson, J.W., Mear, M.E. and Rice, J.R., *J. Appl. Mech.*, 54(1987), 828.
- (10) 例えば, 北川, ほか 2 名, 機論, 59-560, A(1993), 45.
- (11) 例えば, 齊藤, ほか 3 名, 機論, 56-522, A(1990), 99.
- (12) Rice, J.R. and Thomson, R., *Phil. Mag.*, 29(1974), 73.
- (13) 例えば, 石田 誠, き裂の弾性解析と応力拡大係数 (1976), 87, 培風館.
- (14) Muskhelishvili, N.I., *Singular Integral Equations*, (1953) Noordhoff Groningen.
- (15) Erdogan, F. and Gupta, G.D., *Q. Appl. Math.*, 29(1972), 526
- (16) Yokobori, T. and Ichikawa, M., *Rep. Res. Inst. Strength & Fracture of Materials*, 3(1967), 13, Tohoku Univ..
- (17) 日本金属学会, 転位論, (1971), 203, 丸善株式会社.