円柱状弾性介在物を有する弾性体の引張り*

長谷川 久夫*¹, 吉 家 幸 一*²

Tension of Elastic Solid with Elastic Circular-Cylindrical Inclusion

Hisao HASEGAWA and Kohichi YOSHIIE

This paper discusses the stress concentration problem of an elastic solid with an elastic circular-cylindrical inclusion under tension. A method of solution is developed for the problem mentioned above by using fundamental solutions of axisymmetric problems of elasticity. The fundamental solutions are defined as solutions for the problem of an elastic solid subjected to axisymmetric body forces acting along a circle. Performing numerical calculations, influence of the length of the elastic circular-cylindrical inclusion on the stress distribution around the inclusion and on the central section is investigated. The influence of the share moduli of elasticity on the stress distribution is also shown.

Key Words: Elasticity, Tension, Stress Analysis, Stress Concentration, Body Force Method, Elastic Circular-Cylindrical Inclusion

1. ま え が き

物体中に空かや介在物が存在すると、その近傍の応力場が乱され、応力集中が生じるので、しばしば疲労や破壊の原因となっている。そのため、この種の問題はすでに数多く研究が行われてきている。例えば、1 個の球状^{(1)~(3)}あるいはだ円体状介在物⁽⁴⁾⁽⁵⁾を有する無限体、2 個またはそれ以上の球状あるいはだ円体状介在物の干渉問題^{(6)~(8)}などが研究されている。しかし、円柱状介在物を有する無限体⁽⁹⁾問題は、解法上の困難さから、あまり研究されていないようである。この円柱状介在物は、不連続繊維強化複合材の力学的モデルに適しているので、その応力状態を明らかにすることは、このような複合材の強度評価を行う上で重要である⁽⁹⁾。

前報で円筒状空か⁽¹⁰⁾および円柱状剛体介在物⁽¹¹⁾の問題を考察した。本報は、半球状の端面の円柱状弾性介在物を有する一様等方無限弾性体が引張りを受けるときの介在物近傍の応力集中を三次元弾性理論により

考察したものである。本問題に対し、物体力分布による解法を示す。そのため、軸対称物体力問題の基本解⁽¹²⁾を利用する。数値計算を実行し、境界面および介在物近傍の応力分布に及ぼす介在物の長さおよび弾性係数の影響を明らかにする。

2. 境 界 条 件

図 1 に示すように、半径 c の半球状の端面をもつ円柱状弾性介在物を有する無限体(母材)に、円柱座標 (r, θ, z) と球座標 (R, θ, ϕ) をとる。そして、この介在物の半径を c 、直線部の長さを S とする。また、母材の横弾性係数、ポアソン比を μ_1, ν_1 、介在物のそれらを μ_2, ν_2 とする。そして、介在物から十分に離れたところで、単純引張応力 $\sigma_z = p$ を受けるものとする。また、母材と介在物との境界面は完全に接着されており、すべりはしないものとする。本問題は上下対称であるので、 $Z \geq 0$ の範囲のみを考えることにする。このとき、本問題の境界条件は次のようになる。

$$(i) \quad r = c, 0 \leq Z \leq S/2;$$

$$u_1^I = u_1^{II}, u_3^I = u_3^{II}$$

$$\sigma_r^I = \sigma_r^{II}, \tau_{rz}^I = \tau_{rz}^{II}$$

$$(ii) \quad R = c, 0 \leq \phi \leq \pi/2;$$

$$u_1^I = u_1^{II}, u_3^I = u_3^{II}$$

* 平成 5 年 11 月 16 日 材料力学講演会において講演、原稿受付 平成 5 年 12 月 16 日。

*¹ 正員、明治大学理工学部 (〒214 川崎市多摩区東三田 1-1-1)。

*² 学生員、明治大学大学院。

$$\sigma_R^I = \sigma_R^{II}, \tau_{R\phi}^I = \tau_{R\phi}^{II}$$

(iii) $Z \gg S/2 + c$ or $r \gg c$;

$$\sigma_z = p, \sigma_r = \sigma_\theta = \tau_{rz} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

ここに $\sigma_R, \tau_{R\phi}$ はそれぞれ介在物の半球状端面に作用する垂直応力および ϕ 方向のせん断応力であり、そして、 $R^2 = r^2 + (z - s/2)^2$ である。また、上添字 I, II はそれぞれ母材領域、介在物領域の量を表している。

3. 基本解

本報では、軸対称物体力問題の基本解を使用する。ここで使用する基本解は、無限体内の 2 円周 ($r = a, z = \pm h$) 上に図 2 に示すような r 軸方向および Z 軸方向に働く大きさ 1 の軸対称物体力

$$F_k = \frac{1}{2\pi r} \delta(r-a) \{ \delta(z-h) \pm \delta(z+h) \} \quad (k=1, 3) \dots\dots\dots (2)$$

が存在する問題の解として定義される。それらを次式

図 1 円柱状弾性介在物を有する無限弾性体

図 2 2 円周上に作用する軸対称物体力

のように表す。

$$u_i^{k*} = u_i^{k*}(a, h, r, z)$$

$$\sigma_{ij}^{k*} = \sigma_{ij}^{k*}(a, h, r, z)$$

$$(k=1, 3) \dots\dots\dots (3)$$

式(2)において、 F_k は物体力ベクトル $\vec{F}$ の k 方向成分 [$k=1$ のとき r 方向(図 3), $k=3$ のとき Z 方向(図 4)] を、 $\delta(\quad)$ はディラックのデルタ関数を表す。また、 $\pm$ は $k=1$ のとき正、 $k=3$ のとき負をとる。式(3)の具体的な式は本文末の付録に示されている。

4. 解法

図 5 は介在物のない無限体(母材)内に半球状端面をもつ円柱状弾性介在物の境界となる面(二点鎖線 L)を、図 6 は介在物と同じ弾性係数をもつ無限体内に円柱状弾性介在物の境界となる面(二点鎖線 L)を想定したものである。それらの面の近傍(破線 Γ_I, Γ_{II})に物体力を分布させ、境界面において境界条件式(1)を満足するように分布させた物体力の大きさを定めるのが本解法の原理である。図中の記号 L は想定した境界面を、 Γ_I, Γ_{II} は物体力分布面を表す。また、 ϕ は Z 軸から荷重点までの角度を、 ψ は観測点までの角度を、 ε はそれらの面間の距離を表す。

図 3 半径 a の円周上の r 方向物体力 F_1

図 4 半径 a の円周上の Z 方向物体力 F_3

図5, 図6の破線面(Γ_1, Γ_{II})上に物体力を分布させ、その大きさを $f^k(\Gamma_1), g^k(\Gamma_{II}), (k=1, 3)$, とする。このとき、母材領域内および介在物領域内の任意の点に生じる変位 u_i および応力 σ_{ij} は次式で表される。

(i) 母材側領域；

$$\left\{ \begin{matrix} u_i^1 \\ \sigma_{ij}^1 \end{matrix} \right\} = \int_{\Gamma_1} \left[f^1(\Gamma_1) \left\{ \begin{matrix} u_i^{1*} \\ \sigma_{ij}^{1*} \end{matrix} \right\} + f^3(\Gamma_1) \left\{ \begin{matrix} u_i^{3*} \\ \sigma_{ij}^{3*} \end{matrix} \right\} \right] d\Gamma_1$$

$$+ \left\{ \begin{matrix} u_i^0 \\ \sigma_{ij}^0 \end{matrix} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

(ii) 介在物側領域；

$$\left\{ \frac{u_{ij}^{\parallel}}{\sigma_{ij}^{\parallel}} \right\} = \int_{\Gamma_{\parallel}} \left[g^1(\Gamma_{\parallel}) \left\{ \frac{u_{ij}^{1*}}{\sigma_{ij}^{1*}} \right\} + g^3(\Gamma_{\parallel}) \left\{ \frac{u_{ij}^{3*}}{\sigma_{ij}^{3*}} \right\} \right] d\Gamma_{\parallel} \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここで $u_i^{**}, \sigma_{ij}^{**}, (k=1, 3)$, は式(3)の基本解を表し, u_i^0, σ_{ij}^0 は介在物のない均質体が単純引張り $\sigma_x = p$ を受けたときの解で次式で表される。

$$u_1^0 = \frac{-\nu_1 p r}{2\mu_1(1+\nu_1)}, u_3^0 = \frac{p z}{2\mu_1(1+\nu_1)}$$

$$\sigma_z^0 = p, \sigma_r^0 = \sigma_\theta^0 = \tau_{rz}^0 = 0 \dots\dots\dots (6)$$

式(4), (5)に境界条件式(1)を適用すると, 物体

図 5 母材内に想定した円柱状介在物の境界面と物体力分布面

図 6 無限体内に想定した円柱状介在物の境界面と物体力分布面

力の大きさ $f^k(\Gamma_I)$, $g^k(\Gamma_{II})$ を未知関数とする次式の積分方程式が得られる.

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_1} \left[f^1(\Gamma_1) \begin{Bmatrix} u_1^{1*} \\ u_3^{1*} \\ \sigma_n^{1*} \\ \tau_n^{1*} \end{Bmatrix} + f^3(\Gamma_1) \begin{Bmatrix} u_1^{3*} \\ u_3^{3*} \\ \sigma_n^{3*} \\ \tau_n^{3*} \end{Bmatrix} \right] d\Gamma_1 + \begin{Bmatrix} u_1^0 \\ u_3^0 \\ \sigma_n^0 \\ \tau_n^0 \end{Bmatrix}_L \\ &= \int_{\Gamma_{II}} \left[g^1(\Gamma_{II}) \begin{Bmatrix} u_1^{1*} \\ u_3^{1*} \\ \sigma_n^{1*} \\ \tau_n^{1*} \end{Bmatrix} + g^3(\Gamma_{II}) \begin{Bmatrix} u_1^{3*} \\ u_3^{3*} \\ \sigma_n^{3*} \\ \tau_n^{3*} \end{Bmatrix} \right] d\Gamma_{II} \\ & \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

ここに σ_n, τ_n は境界面に作用する垂直応力およびせん断応力であり、添字 L は観測点 (r, z) が介在物境界面上にあることを意味している。

積分方程式(7)を連立一次方程式に帰着させて解くために、物体力の大きさ f^k, g^k を次のように置く。

$$\begin{aligned} f^k(\Gamma_I) &= \sum_{n=1}^N F_n^k \delta(\Gamma_I - \Gamma_{In}) \\ g^k(\Gamma_{II}) &= \sum_{n=1}^N G_n^k \delta(\Gamma_{II} - \Gamma_{II n}) \\ (k=1, 3) &\dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

式(8)は物体力を連続的ではなく、 N 個の点(円周 $\Gamma_{1n}, \Gamma_{11n}$)に離散的に作用させることを意味する。

式(8)を式(7)に代入すれば次式を得る.

$$\sum_{n=1}^N \left[F_n^1 \begin{bmatrix} u_1^{1*} \\ u_3^{1*} \\ \sigma_n^{1*} \\ \tau_n^{1*} \end{bmatrix} + F_n^3 \begin{bmatrix} u_1^{3*} \\ u_3^{3*} \\ \sigma_n^{3*} \\ \tau_n^{3*} \end{bmatrix} \right]_L + \begin{bmatrix} u_1^0 \\ u_3^0 \\ \sigma_n^0 \\ \tau_n^0 \end{bmatrix}_L$$

$$= \sum_{n=1}^N \left[G_n^1 \begin{bmatrix} u_1^{1*} \\ u_3^{1*} \\ \sigma_n^{1*} \\ \tau_n^{1*} \end{bmatrix} + G_n^3 \begin{bmatrix} u_1^{3*} \\ u_3^{3*} \\ \sigma_n^{3*} \\ \tau_n^{3*} \end{bmatrix} \right]_L \dots\dots\dots (9)$$

式(9)には、それぞれ N 個の任意定数 F_n^A, G_n^A があるので、母材と介在物との境界面上に N 個の観測点を選ぶと、 $4N$ 元の連立一次方程式が構築される。この方程式を解くことにより、境界条件を満足するような物体力の大きさ F_n^A, G_n^A が求められる。この求められた物体力を用いることにより、介在物内および母材内

図 7 解の収束性

の任意の点における変位および応力が式(4), (5)から得られる。

5. 数値結果および考察

上述の解法に基づきポアソン比を $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ として数値計算を実行した。その結果を図7～図15に示す。

図7は解の収束性(介在物境界面上の $\psi = 45^\circ$ の点の応力 σ_R)を示したものである。白丸印は母材側, 黒丸印は介在物側の値を表す。選点数 N の増加につれ解はある値に収束し, 白丸印と黒丸印は一致する。なお, 本結果の解析精度は0.5%以下の誤差と考えられる。

図8は中央断面($Z=0$)上の応力 σ_z の分布を, S/c をパラメータにして図示したもので, 実線は $\mu_2/\mu_1 = 0.5$, 破線は $\mu_2/\mu_1 = 2.0$ の場合の値である。 $r/c < 1.0$ は介在物領域, $r/c > 1.0$ は母材領域を表す。介在物境界面において応力 σ_z は不連続である。介在物領域内では $\mu_2/\mu_1 = 2.0$ のほうが, また, 母材領域内では $\mu_2/\mu_1 = 0.5$ のほうが応力は大きくなる。そして, 直線部長さ S/c を大きくしていくと, $\mu_2/\mu_1 = 0.5$ の場合は応力が小さくなり, $\mu_2/\mu_1 = 2.0$ の場合は大きくなる。

図9は中央断面($Z=0$)の応力 σ_z に及ぼす弾性係

数 μ_2/μ_1 の影響を明らかにしたもので, 直線部長さが $S/c = 1.0$ の場合の結果である。 μ_2/μ_1 の値を大きくしていくと, 介在物内では応力は大きくなり, 母材内では小さくなる。

図10は介在物境界面上の応力 σ_n を, また図11は介在物境界面上のせん断応力 τ_n を図示したものである。横軸において角度 $\psi = 90^\circ$ より左側の範囲は半球状端面, 右側の範囲は直線部の応力分布を表す。図中の実線は $S/c = 0.5$, 破線は $S/c = 4.0$ のときの結果である。応力 σ_n および τ_n は直線部よりも半球状端面のほうが大きい。 μ_2/μ_1 の値を大きくしていくとこれらの応力は大きくなり, $\mu_2/\mu_1 \rightarrow \infty$ すなわち介在物が剛体のとき最も大きくなる。また, μ_2/μ_1 の値が大きいつき, S/c の影響は大きくなる。

図12～15は介在物と母材の境界面上の最大主応力 $\sigma_{\max}$ および最大主せん断応力 $\tau_{\max}$ を図示したもので, 図12と図13は母材側, 図14と図15は介在物側の値を表す。母材側の $\sigma_{\max}$ および $\tau_{\max}$ は $\mu_2/\mu_1 = 0$ (空か) から μ_2/μ_1 が増加していくと, 初め減少し, $\mu_2/\mu_1 = 1.0$ (介在物のない均質体) のとき最小となり, その後 μ_2/μ_1 が大きくなるにつれて大きくなり, $\mu_2/\mu_1 \rightarrow \infty$ す

図8 中央断面($Z=0$)上の応力 σ_z の分布
(直線部長さ S/c の影響)

図10 介在物境界面上の応力 σ_n の分布

図9 中央断面($Z=0$)上の応力 σ_z の分布
(弾性係数 μ_2/μ_1 の影響)

図11 介在物境界面上のせん断応力 τ_n の分布

図 12 直線部長さ S/c と最大主応力 $\sigma_{\max}$ の関係
(境界面上の母材側)

図 14 直線部長さ S/c と最大主応力 $\sigma_{\max}$ の関係
(境界面上の介在物側)

図 13 直線部長さ S/c と最大主せん断応力 $\tau_{\max}$ の関係
(境界面上の母材側)

図 15 直線部長さ S/c と最大主せん断応力 $\tau_{\max}$ の関係
(境界面上の介在物側)

なわち介在物が剛体のとき最も大きくなる。また、 $\mu_2/\mu_1 < 1.0$ の場合には、介在物長さが $S/c > 2.0$ になると S/c の値に関係なく $\sigma_{\max}$ および $\tau_{\max}$ の値は一定値になる。そして、 $\mu_2/\mu_1 > 1.0$ の場合には、 S/c の値が大きくなるにつれて $\sigma_{\max}$ 、 $\tau_{\max}$ とも大きくなる。介在物側の $\sigma_{\max}$ および $\tau_{\max}$ は、 $\mu_2/\mu_1 \leq 1.0$ の場合には、 S/c の値に関係なく一定値となるが、 $\mu_2/\mu_1 > 1.0$ の場合には、 S/c の値の増加につれて大きくなる。また、 S/c の値が同じならば $\mu_2/\mu_1 \rightarrow 0$ (空か) のとき最も小さく、 μ_2/μ_1 の値が増加するにつれて大きくなり、 $\mu_2/\mu_1 \rightarrow \infty$ すなわち介在物が剛体のとき最も大きい。

6. む す び

本論文のおもな結果を要約すると次のようになる。

(1) 円柱状弾性介在物を有する無限体が引張りを受けるときの応力集中問題に対して、物体力分布による解法を示した。

(2) 数値計算を実行し、母材と介在物の境界面および介在物近傍の応力分布に及ぼす弾性係数および介在物長さの影響を明らかにした。すなわち、(i) 弾性

係数 μ_2/μ_1 が大きくなると介在物領域では応力 σ_z は大きくなり、母材領域では逆に小さくなる。(ii) 直線部長さ S が応力分布に与える影響は $\mu_2/\mu_1 > 1.0$ のとき大きくなる。(iii) 最大主応力は、 $\mu_2/\mu_1 < 1.0$ のときには、直線部長さ S がある程度長くなると S に関係なく一定値になり、 $\mu_2/\mu_1 > 1.0$ のときには、 S が長くなるにつれて大きくなる。

付 録

本論文で使用した基本解は次のとおりである⁽¹²⁾。

(i) 半径 (r) 方向物体力 F_1 に対する基本解

無限弾性体内の二円周 ($r=a$, $z=\pm h$) 上に図 3 に示するような半径方向に作用する物体力が存在する問題に対する解(基本解)は、次式で表される。

$$\begin{aligned}
2\mu u_1^* &= \frac{1}{D} \sum_{i=1}^2 \left\{ (3-4\nu) Q_{1/2}(x_i) + \frac{z_i^2}{2ar} B_1 \right\}, 2\mu u_3^* = -\frac{1}{2rD} \sum_{i=1}^2 z_i B_3 \\
\sigma_r^* &= \frac{1}{2rD} \sum_{i=1}^2 \left\{ (3-2\nu) B_3 - 2(3-4\nu) Q_{1/2}(x_i) - \frac{z_i^2}{2ar} B_4 - \frac{z_i^2}{ar} B_1 \right\} \\
\sigma_\theta^* &= \frac{1}{2rD} \sum_{i=1}^2 \left\{ 2(3-4\nu) Q_{1/2}(x_i) + \frac{z_i^2}{ar} B_1 + 2\nu B_3 \right\} \\
\sigma_z^* &= \frac{1}{2rD} \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{z_i^2}{2ar} B_4 - (1-2\nu) B_3 \right\} \\
\tau_{rz}^* &= \frac{1}{2arD} \sum_{i=1}^2 z_i \{ B_2 + 2(1-\nu) B_1 \}, \tau_{r\theta}^* = \tau_{z\theta}^* = 0 \dots\dots\dots (10)
\end{aligned}$$

(ii) z 軸方向物体力 F_3 に対する基本解 無限弾性体内の二円周 ($r=a, z=\pm h$) 上に図 4 に示すような z 軸方向に作用する物体力が存在する問題に対する解(基本解)は、次式で表される。

$$\begin{aligned}
2\mu u_1^* &= \frac{1}{2aD} \sum_{i=1}^2 z_i (-1)^i B_5, 2\mu u_3^* = \frac{1}{2D} \sum_{i=1}^2 (-1)^i \left\{ 2(3-4\nu) Q_{-1/2}(x_i) + \frac{z_i^2}{ar} B_7 \right\} \\
\sigma_r^* &= \frac{-1}{2arD} \sum_{i=1}^2 (-1)^i z_i (B_5 + 2\nu B_7 + B_8), \sigma_\theta^* = \frac{1}{2arD} \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} z_i (B_5 - 2\nu B_7) \\
\sigma_z^* &= \frac{1}{2arD} \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} z_i \{ B_8 - 2(1-\nu) B_7 \} \\
\tau_{rz}^* &= \frac{1}{2aD} \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} \left\{ (1-2\nu) B_5 + \frac{z_i^2}{2ar} B_6 \right\}, \tau_{r\theta}^* = \tau_{z\theta}^* = 0 \dots\dots\dots (11)
\end{aligned}$$

以上の式において B_m は次式を表す。

$$\begin{aligned}
B_1 &= \frac{1}{x_i^2-1} G_1(x_i), B_2 = \frac{1}{x_i^2-1} A_2, B_3 = Q_{1/2}(x_i) - \frac{x_i^2-r/a}{x_i^2-1} G_1(x_i) \\
B_4 &= \frac{1}{x_i^2-1} A_3, B_5 = B_3(a \leftrightarrow r), B_6 = B_4(a \leftrightarrow r), B_7 = \frac{1}{x_i^2-1} G_2(x_i), B_8 = \frac{1}{x_i^2-1} A_1 \dots\dots\dots (12)
\end{aligned}$$

ここに $B_m(a \leftrightarrow r)$ は $B_m(x_i)$ の式で a と r の変換, また, 式(12)における A_m は次式を表す。

$$\left. \begin{aligned}
A_1 &= \left(1 - \frac{2x_i}{x_i^2-1} \frac{z_i^2}{ar} \right) G_2(x_i) + \frac{z_i^2}{2ar} Q_{-1/2}(x_i) \\
A_2 &= G_1(x_i) - \frac{z_i^2}{2ar} Q_{1/2}(x_i) + \frac{2}{x_i^2-1} \frac{z_i^2}{ar} G_2(x_i) \\
A_3 &= 3Q_{-1/2}(x_i) + \frac{r}{a} Q_{1/2}(x_i) - \frac{4}{x_i^2-1} \left\{ G_1(x_i) + \frac{r}{a} G_2(x_i) \right\}
\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

ここに $Q_m(x_i)$ は m 次の第二種ルジャンドル関数,

$$\left. \begin{aligned}
x_i &= (r^2 + a^2 + z_i^2)/2ar \\
z_1 &= z-h, z_2 = z+h \\
D &= 8\pi^2(1-\nu)\sqrt{ar}
\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

であり, また G は次式を表す。

$$\left. \begin{aligned}
G_1(x_i) &= x_i Q_{1/2}(x_i) - Q_{-1/2}(x_i) \\
G_2(x_i) &= x_i Q_{-1/2}(x_i) - Q_{1/2}(x_i)
\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

文 献

- (1) Southwell, R. V. and Gough, H. J., *Phil. Mag.*, **1**(1926), 71.
- (2) Goodier, J. N., *Trans. ASME*, **55**-7(1933), 39.
- (3) Ling, C. B. and Yang, K. L., *J. Appl. Mech.*, **18**-4(1951), 367.
- (4) Edwards, R. H., *J. Appl. Mech.*, **18**-1(1951), 19.
- (5) Weng, G. J. and Tandon, G. P., *J. Appl. Mech.*, **53**-3(1986), 511.
- (6) Sternberg, E. and Sadowsky, M. A., *J. Appl. Mech.*, **19**-1(1952), 19.
- (7) Sahelley, J. F. and Yi-Yuan, Yu, *J. Appl. Mech.*, **33**-1(1966), 68.
- (8) 土田・ほか 3 名, 機論, **44**-382(1978), 1876.
- (9) 笠野・ほか 2 名, 機論, **47**-413, A(1981), 18.
- (10) 長谷川・吉家, 機講論, No. 920-78(1992-9), 274.
- (11) 長谷川・吉家, 機講論, No. 930-9(1993-3), 77.
- (12) 長谷川, 機論, **50**-449, A(1984), 58.