金属基複合材料の非弾性構成モデルの定式化*

(第1報, 横等方性の場合)

河 井 昌 道^{*1}Formulation of Inelastic Constitutive Model for Metal Matrix Composites
(1st Report, Transversely Isotropic Model)

Masamichi KAWAI

A constitutive model to describe time-dependent inelastic behavior of unidirectionally fiber-reinforced metal matrix composites is developed from phenomenological and continuum mechanics points of view. The fibrous composite is treated as a homogeneous medium which hardens with inelastic deformation. The inherent anisotropy is assumed to be transversely isotropic. The constitutive modeling is based on the well-established thermodynamic formalism for internal state variable theories, where the thermodynamic potentials are defined using a transversely isotropic tensor of the fourth order. First, a kinematic hardening model is derived in the invariant form. In this model, the evolution of the internal state variable is prescribed by the Bailey-Orowan type so that both the transient and steady-state creep behavior can be described. Then, an isotropic hardening model is formulated by assuming a particular representation of the kinematic hardening variable. It is found that the isotropic hardening model can yield the power law relation for steady-state responses.

Key Words: Metal Matrix Composite, Anisotropy, Plasticity, Creep, Constitutive Equation, Thermodynamic Formalism, Transverse Isotropy, Kinematic Hardening, Isotropic Hardening, Power Law Creep

1. 結 言

顕著な初期異方性を有する新しい材料の開発とそれらを構造部材として応用するための研究が増加している。その例として、高分子系および金属系の繊維強化複合材料をあげることができる。炭素繊維やアラミド繊維を強化材とする高分子系複合材料は、軽量・高強度の要請から航空・宇宙分野を中心に広く応用されてきている^{(1)~(4)}。比強度・比剛性だけでなく耐熱性にも優れた金属基複合材料としては、炭化けい素繊維、ボロン繊維、アルミナ繊維、炭素繊維などによってアルミやチタンを強化した複合材が研究され、一部実用化されている。このほか、初期異方性の顕著な材料の開発・応用は、高温構造要素、特にガスタービンエンジンのタービンブレード用の超耐熱合金の開発にも見ることができる⁽⁵⁾。

これらの高分子系、金属系の複合材料、ならびに新しい超耐熱合金では、従来の材料では実現できない優れた性能の向上が得られる。しかし、一方では、初期異方性が著しく増大し、これが変形挙動と破壊挙動に重要な影響を及ぼす。したがって、これらの材料の応用

にあたっては、機能の異方性主軸を適切に配置することが極めて重要な設計要件となる。また同時に、これまでに整備されてきた応力解析に基づく設計手法と適合させるためには、これらの初期異方性材料について精密な非弾性構成モデルを開発することが不可欠の要件となる。変形挙動の記述に関しては、初期異方性だけでなく、非弾性変形に伴う硬化/軟化の異方性も考慮しなければならない。さらに、上述の材料は、いずれも、使用条件下で粘性的な永久変形を伴うので、応用に当たっては、粘塑性挙動の記述が重要となる。特に、高温で応用される金属基複合材や超耐熱金属に対してはクリープ変形が極めて重要となる^{(6)~(16)}。金属基複合材料のクリープ変形に関する実験的研究^{(9)~(13)}においては、これまでの金属材料と同様、遷移クリープ、定常クリープおよび加速クリープの三段階の現れることが示されている。また、多くの場合、定常クリープ速度の応力依存性が応力のべき関数、すなわち Norton 則によって記述できることが報告されている。

高分子系および金属系複合材料、ならびに柱状晶/単結晶超耐熱合金に対する構成モデルの定式化の研究は、上述の工学的要請から、活発に行われるようになっている。定式化の手法は、(1)従来の巨視的現象論的な非弾性構成モデルを拡張する場合[(1.1)降伏面塑

* 原稿受付 平成5年8月2日。

*1 正員、筑波大学構造工学系 (☎305 つくば市天王台 1-1-1)。

性理論を拡張する方法, (1.2)統一形構成モデルを拡張する方法], および(2)微視的な応答の平均操作を用いる場合[(2.1)結晶内の滑り応答の平均化に基づく結晶塑性モデルの手法を用いる方法, (2.2)巨視的な特性の異なったいくつかの部分から構成される基本体積要素を考え, 基本体積要素の応答について平均化を行う方法]に大別できる。

巨視的な手法としては, 降伏挙動に異方性を導入するのに用いられたテンソル関数表現の不変形式の考察に基づく方法⁽¹⁴⁾を挙げることができる。例えば, Boehler-Sawczuk⁽¹⁵⁾は横等方材料や直交異方性材料の塑性変形と破壊の定式化を検討した。また, Betten⁽¹⁶⁾, Sawczuk-Trampczynski⁽¹⁷⁾, Waniewski⁽¹⁸⁾, および Johnson⁽¹⁹⁾はクリープポテンシャルに異方性構造テンソルを導入する方法によって定常クリープ構成モデルを導いた。Robinson⁽²⁰⁾は, Rice⁽²¹⁾および Leckie-Ponter⁽²²⁾の非弾性ポテンシャルを用いた定式化に異方性を記述するための構造テンソルを持ち込むことにより, 金属基複合材料を主対象とし, 非定常変形も記述できる現象論的な粘塑性構成式を定式化した。Krempf⁽²³⁾も, 自身の提案した等方性材料に対する統一形非弾性構成モデルを初期直交異方性材料に対する構成モデルへ拡張発展させた。Nouailhas-Freed⁽²⁴⁾は, Chabocheの粘塑性構成モデル⁽²⁵⁾を基礎にして, 超耐熱単結晶合金を対象とする現象論的立方晶構成モデルを開発した。

一方, 微視的応答の平均化操作によるモデル化としては次のような例がある。すなわち, 大野ら⁽²⁶⁾は, 一方向凝固柱状晶超耐熱合金の引張り・ねじり組合せ応力条件下のクリープ挙動を実験的に調べるとともに, 結晶滑りモデルを構築して, 良好な解析結果を報告した。また, 多結晶金属材料のマイクロメカニクスの手法で用いられるセルフコンシステントモデル⁽²⁷⁾あるいはMori-Tanaka⁽²⁸⁾による修正を用いて繊維強化複合材あるいは粒子強化複合材の降伏面あるいは応力-ひずみ関係を予測する方法が, Dvorak⁽²⁹⁾, Weng⁽³⁰⁾, Tayaら⁽³¹⁾, Gramollら⁽³²⁾, および Wakashimaら⁽³³⁾によって議論された。さらに, 平均操作をやや巨視的な要素について考える手法が, 大矢ら⁽³⁴⁾, Aboudi⁽⁸⁾, および Sun-Chen⁽³⁶⁾によって提案された。

本研究では, 巨視的および現象論的な観点から, 繊維強化金属基複合材料の時間依存非弾性変形挙動を記述するための新しい定式化を検討する。特に, これまでの研究で解決されていない問題, すなわち, 遷移クリープ応答と定常クリープ応答, ならびに実験で観察されている定常クリープ速度の応力べき乗依存性を記

述できる構成モデルの開発を目的とする。この論文では, まず最初の段階として, 一方向強化金属基複合材料への応用を想定し, 横等方性連続体の時間依存非弾性変形挙動を議論する。構成モデルの定式化にあたっては, 非可逆熱力学に基礎をおく定式化手法⁽³⁶⁾を応用する。初期異方性(横等方性)は, 4階に異方テンソルにより一般的な形で導入する。ひずみ硬化には, 移動硬化を仮定する。まず, 仮定した内部状態変数によって自由エネルギー関数を定義し, これによって内部状態変数に関連する熱力学的力変数(内部応力)を定義する。続いて, 散逸エネルギー関数を熱力学的力変数と横等方性異方テンソルの等方関数として定義し, 変数に関するこう配に基づいて内部状態変数の発展式を規定する。定式化された横等方非弾性構成式は, 異方テンソルの係数の選び方によって等方非弾性モデルに帰着できる。提案した構成モデルはひずみ硬化としてMalinin-Khadjinsky形⁽³⁷⁾の移動硬化を仮定しているが, 内部状態変数に著者の提案した経験的表示⁽³⁸⁾を仮定することによって等方硬化モデルへ修正することができる。さらに, この等方硬化モデルにおいて, 応力指数と回復指数が等しいと仮定すれば, 定常状態でNorton則が成立する。

2. 等方・移動硬化非弾性構成モデル

本研究では, 横等方性で近似できる一方向繊維強化金属基複合材料の現象論的非弾性構成モデルの定式化を, 熱力学的定式化手順⁽²²⁾に基づいて検討する。このため, まず最初に, 基礎となる等方性材料に対する定式化手順を説明する。以下では, 表示を簡潔にするため, 必要に応じて次の記号を用いる。

$$\text{tr}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{I} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{tr}(\mathbf{xy}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$J(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{3}{2} \text{tr}(\mathbf{x}^2)} \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{x}^2)} \quad \dots\dots\dots (4)$$

異方性材料の非弾性挙動を議論する場合, 材料定数の同定と実的な解析を行う上で, 2種類の直角座標系, すなわち, 異方性の主軸方向に一致する材料座標系(主軸座標系)と試料全体の記述のために任意に選んだ全体座標系(非主軸座標系)に対して各テンソルの成分を考える必要がある。この研究では, 構成モデルの構築に主眼をおき, 具体的な成分表示の導出までは言及しないが, 必要に応じてそれぞれの座標系を付随する基底を $\{\mathbf{e}_i\}$ および $\{\mathbf{e}_a\}$ によって参照する。このとき, 2階の恒等テンソルは

$$\mathbf{I} = \delta_{ab} \mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_b = \delta_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad \dots\dots\dots (5)$$

と書ける。ここで、 δ_{ab} , δ_{ij} はクロネッカーのデルタであり、 $\otimes$ はテンソル積を表す。

2.1 内部状態変数と自由エネルギー関数 非弾性変形によって生じたある瞬間における内部状態が2階の内部状態変数テンソル ξ によって記述されるものと仮定する。仮定した内部状態変数に関連する熱力学的力、すなわち内部応力を規定するため、自由エネルギー関数を定義する。ここでは、弾性と非弾性の非弾性を仮定して、全自由エネルギーが

$$\Psi = \Psi_e(\epsilon^e) + \Psi_p(\xi) \quad (6)$$

と表現できるものとする⁽³⁶⁾。さらに、非弾性モデルに関連する右辺第2項を

$$\rho^* \Psi_p(\xi) = \frac{1}{3} H \xi \cdot \xi \quad (7)$$

と表現する⁽³⁸⁾。ここで、 ρ^* , H はそれぞれ、密度と材料定数を表す。

内部状態変数 ξ に関連する熱力学的力(移動硬化変数) p は、自由エネルギー関数の内部状態変数に関するこう配によって定義されるから、

$$p = \rho^* \frac{\partial \Psi_p}{\partial \xi} = \frac{2}{3} H \xi \quad (8)$$

となる。

2.2 内部状態変数の発展式と散逸エネルギー関数 次に、仮定した内部状態変数の発展式を規定するため、散逸エネルギー関数を定義する。ここでは、散逸エネルギー関数が偏差応力 s と移動硬化変数 p の差によって定義される有効応力

$$s^* = s - p \quad (9)$$

を用いて次のように表される場合を検討する。

$$\begin{aligned} \Omega^*(s^*, p) &= \Omega[J(s^*)] + \Lambda[J(p)] \\ &= \frac{K}{m+1} \{J(s^*)\}^{m+1} + \frac{M}{l+1} \{J(p)\}^{l+1} \\ &= \frac{K}{m+1} \left(\sqrt{\frac{3}{2}} s^* \cdot s^* \right)^{m+1} + \frac{M}{l+1} \left(\sqrt{\frac{3}{2}} p \cdot p \right)^{l+1} \end{aligned} \quad (10)$$

このとき、非弾性ひずみ速度は散逸エネルギー関数の偏差応力に関するこう配として定義され、次のように表現できる。

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}^p &= \frac{\partial \Omega^*}{\partial s} = \frac{3}{2} K \{J(s^*)\}^m \frac{s^*}{J(s^*)} \\ &= \frac{3}{2} K \{J(s-p)\}^m \frac{s-p}{J(s-p)} \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}} F n^* \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、

$$F = K \{J(s^*)\}^m = K \{J(s-p)\}^m \quad (12)$$

$$n^* = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{s^*}{J(s^*)} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{s-p}{J(s-p)} \quad (13)$$

内部状態変数の発展式も同様に導かれ、次のようになる。

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= -\frac{\partial \Omega^*}{\partial p} = -\left[\frac{\partial \Omega}{\partial p} + \frac{\partial \Lambda}{\partial p} \right] \\ &= \frac{3}{2} K \{J(s^*)\}^m \frac{s^*}{J(s^*)} - \frac{3}{2} M \{J(p)\}^l \frac{p}{J(p)} \\ &= \dot{\epsilon}^p - \frac{3}{2} R \frac{p}{J(p)} \\ &= \dot{\epsilon}^p - \sqrt{\frac{3}{2}} R v \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}} (F n^* - R v) \end{aligned} \quad (14)$$

ここで、

$$R = M \{J(p)\}^l \quad (15)$$

$$v = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{p}{J(p)} \quad (16)$$

2.3 まとめ 初期等方性材料の移動硬化構成モデルは

$$\dot{\epsilon}^p = \sqrt{\frac{3}{2}} F n^* \quad (17)$$

$$\dot{p} = \frac{2}{3} H \xi = H \left[\frac{2}{3} \dot{\epsilon}^p - R \frac{p}{J(p)} \right] \quad (18)$$

によって与えられる。

以上の手順で導かれた構成モデルは、Malinin-Khadjinsky⁽³⁷⁾の移動硬化クリープ構成式と同形式であり、べき形のひずみ速度関数とBailey-Orowan形の発展式によって特徴付けられる。なお、上述の移動硬化構成モデルに含まれる材料定数は、 K , m , H , M , l の5個である。

3. 横等方・移動硬化非弾性構成モデル

繊維強化金属基複合材料の巨視的な応力-ひずみ関係にバウシinger効果の現れることが、アルミナ繊維強化アルミニウムや炭化けい素(粒子、ウイスカ)強化アルミニウムについて報告されている⁽³⁹⁾。また、弾性繊維と非硬化完全塑性体マトリックスから構成された複合材料の挙動が繊維の弾性によって移動硬化的となることをDvorak-Rao⁽⁴⁰⁾が理論的に解明している。さらに、有限要素法による応力解析において、マトリックス金属の非弾性挙動に等硬化化を仮定しても、巨視的応力-ひずみ関係にはバウシinger効果の現れることが示されている⁽⁴¹⁾⁽⁴²⁾。

本研究では、これらの事実を踏まえ、上述の等方性材料に対する移動硬化非弾性構成モデルを横等方性材料に対する移動硬化非弾性構成モデルへ拡張することを考える。このため、まず、異方性の連続体力学的表示

方法の概略を示す。続いて、この異方性テンソルを前述の熱力学的定式化の枠組に組み込み、一つの新しい定式化を試みる。

3・1 4階の横等方テンソルと不変量 一般的な異方性固体の非弾性挙動の定式化については、連続体力学に基づいて多くの検討がなされている⁽¹⁴⁾⁽⁴³⁾。この節では、これらの研究によって確立された異方性の記述方法について、本研究に必要な事柄の概要を示す。

いま、ある2階の対称テンソル $\mathbf{y}$ が、ある2階の構造テンソル $\mathbf{H}$ と2階の対称テンソル $\mathbf{x}$ のテンソル値テンソル関数

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{H}, \mathbf{x}) \quad \dots\dots\dots (19)$$

によって与えられるものとする。

テンソル関数の表現定理から、

$$\begin{aligned} \mathbf{y} = & f_1 \mathbf{I} + f_2 \mathbf{H} + f_3 \mathbf{H}^2 + f_4 \mathbf{x} + f_5 \mathbf{x}^2 + f_6 (\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{x}\mathbf{H}) \\ & + f_7 (\mathbf{H}^2 \mathbf{x} + \mathbf{x}\mathbf{H}^2) + f_8 (\mathbf{H}\mathbf{x}^2 + \mathbf{x}^2 \mathbf{H}) \\ & + f_9 (\mathbf{H}^2 \mathbf{x}^2 + \mathbf{x}^2 \mathbf{H}^2) \quad \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

と表現できる。ここで、スカラー係数 f_i は不変量

$$\{\text{tr } \mathbf{x}, \text{tr } \mathbf{x}^2, \text{tr } \mathbf{x}^3, \text{tr } \mathbf{H}, \text{tr } \mathbf{H}^2, \text{tr } \mathbf{H}^3, \text{tr } \mathbf{H}\mathbf{x}, \text{tr } \mathbf{H}\mathbf{x}^2, \text{tr } \mathbf{H}^2 \mathbf{x}, \text{tr } \mathbf{H}^2 \mathbf{x}^2\} \quad \dots\dots\dots (21)$$

の関数である。

いま、構造テンソル $\mathbf{H}$ が横等方性を特徴付ける場合を考える。この場合、横等方に垂直な単位ベクトルを $\mathbf{h}$ とすれば、構造テンソル $\mathbf{H}$ は

$$\mathbf{H} = \mathbf{h} \otimes \mathbf{h} \quad \dots\dots\dots (22)$$

と表現できる。構造テンソル $\mathbf{H}$ が式(22)で与えられる場合、式(20)は

$$\begin{aligned} \mathbf{y} = & k_0 \mathbf{I} + k_1 \mathbf{H} + k_2 \mathbf{x} + k_3 (\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{x}\mathbf{H}) \\ & + k_4 \mathbf{x}^2 + k_5 (\mathbf{H}\mathbf{x}^2 + \mathbf{x}^2 \mathbf{H}) \quad \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

と表現することができる⁽¹⁴⁾⁽⁴³⁾。また、スカラー係数 k_i は、不変量 $\{\text{tr } \mathbf{x}, \text{tr } \mathbf{x}^2, \text{tr } \mathbf{x}^3, \text{tr } \mathbf{H}\mathbf{x}, \text{tr } \mathbf{H}\mathbf{x}^2\}$ の関数となる。

さらに、引数テンソル $\mathbf{x}$ に関して準線形の場合、

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad \dots\dots\dots (24)$$

と表示することができる⁽¹⁵⁾。ここで、 $\mathbf{A}$ は横等方性を考慮した4階の異方性テンソルを表す。

本研究では、4階の異方性テンソル $\mathbf{A}$ を用いて横等方非弾性構成モデルの定式化を議論する。任意の正規直交基底(全体座標系あるいは非主軸座標系)を $\{\mathbf{e}_a\}$ によって表現すれば、

$$\mathbf{A} = A_{abcd} \mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_b \otimes \mathbf{e}_c \otimes \mathbf{e}_d \quad \dots\dots\dots (25)$$

となる。このとき、横等方性テンソル $\mathbf{A}$ の全体(非主軸)座標系に関する成分 A_{abcd} は、

$$\begin{aligned} A_{abcd} = & \lambda \delta_{ab} \delta_{cd} + \mu (\delta_{ac} \delta_{bd} + \delta_{ad} \delta_{cb}) \\ & + \alpha (\delta_{ab} h_c h_d + \delta_{cd} h_a h_b) \\ & + \beta (\delta_{ac} h_b h_d + \delta_{bd} h_a h_c + \delta_{ad} h_b h_c + \delta_{bc} h_a h_d) \end{aligned}$$

$$+ \gamma h_a h_b h_c h_d \quad \dots\dots\dots (26)$$

と書くことができる。ここで、 δ_{ab} は、クロネッカーのデルタであり、 h_a は横等方ベクトル $\mathbf{h}$ の全体座標系に関する成分を表す。成分間には、 $A_{abcd} = A_{cdab}$ が成立する。この成分表示に含まれる係数 $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu$ は材料定数である。

次に、この4階の異方性テンソルによって線形変換された量を考える。任意の2階の対称テンソル $\mathbf{x}$ に $\mathbf{A}$ を作用させた場合、全体座標に関する成分表示は

$$\begin{aligned} y_{ab} = & A_{abcd} x_{cd} \\ = & \lambda \delta_{ab} x_{dd} + 2\mu x_{ab} + \alpha (\delta_{ab} h_c h_d x_{cd} + h_a h_b x_{dd}) \\ & + \beta (x_{ad} h_b h_d + x_{bd} h_a h_d + x_{cd} h_b h_c + x_{cb} h_a h_c) \\ & + \gamma h_a h_b h_c h_d x_{cd} \quad \dots\dots\dots (27) \end{aligned}$$

となる。

任意の対称偏差テンソル $\mathbf{x}$ に対して、写像された $\mathbf{y}$ が対称偏差テンソルになるための条件は、

$$y_{aa} = (3\alpha + 4\beta + \gamma) h_c h_d x_{cd} = 0 \quad \dots\dots\dots (28)$$

によって与えられる。すなわち、この条件は、

$$3\alpha + 4\beta + \gamma = 0 \quad \dots\dots\dots (29)$$

のとき成立する。

本研究では、 $\mathbf{A}$ に2階の偏差テンソルを作用させる場合だけを議論するから、式(27)の右辺第1項は任意の λ に対してつねに零となる。したがって、2階対称偏差テンソルへの作用だけを議論する限りにおいて、一般性を失うことなく、

$$\lambda = 0 \quad \dots\dots\dots (30)$$

と仮定することができる。

なお、 $\mathbf{A}$ の成分表示において、

$$\alpha = \beta = \gamma = 0 \quad \dots\dots\dots (31)$$

を仮定すれば、

$$A_{abcd} = \mu (\delta_{ac} \delta_{bd} + \delta_{ad} \delta_{cb}) \quad \dots\dots\dots (32)$$

となり、 $\mathbf{A}$ は4階の等方性テンソルとなる。この等方性テンソルは任意の偏差テンソルをその偏差テンソルの 2μ 倍に写像する。したがって、 $\mu = 0.5$ と仮定すれば、任意の偏差対称テンソルは自分自身に写像される。また、対称な非偏差テンソルに対しても、

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu \quad \dots\dots\dots (33)$$

とおけば、 $\mathbf{A}$ の作用は偏差テンソルを 2μ 倍に拡大する作用となるから、式(33)に加えてさらに $\mu = 0.5$ と仮定すれば、 $\mathbf{A}$ は任意の非偏差対称テンソルを自分自身の偏差テンソルに変える変換となる。

以上のことから、本研究においては、写像テンソル $\mathbf{A}$ の全体座標成分が

$$\begin{aligned} A_{abcd} = & \mu (\delta_{ac} \delta_{bd} + \delta_{ad} \delta_{cb}) + \alpha (\delta_{ab} h_c h_d) \\ & + \beta (\delta_{ac} h_b h_d + \delta_{bd} h_a h_c + \delta_{ad} h_b h_c + \delta_{bc} h_a h_d) \end{aligned}$$

$$-(3\alpha+4\beta)h_a h_b h_c h_d \cdots (34)$$

によって表される場合を考える。この表現に含まれる材料定数は、 α , β , μ の3個である。 $\mathbf{A}$ によって、任意の偏差テンソル $\mathbf{x}$ は、偏差テンソル $\mathbf{y}$

$$\begin{aligned} y_{ab} &= A_{abcd} x_{cd} \\ &= 2\mu x_{ab} + \alpha(\delta_{ab} h_c h_d x_{cd}) \\ &\quad + \beta(x_{ad} h_b h_c + x_{bd} h_a h_c + x_{cd} h_b h_c + x_{cb} h_a h_c) \\ &\quad - (3\alpha+4\beta)h_a h_b h_c h_d x_{cd} \cdots (35) \end{aligned}$$

に写像される。

座標系によらない直接不変表記を用いれば、

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{A} \mathbf{x} \\ &= 2\mu \mathbf{x} + \alpha \mathbf{I} \operatorname{tr}(\mathbf{H} \mathbf{x}) + 2\beta(\mathbf{x} \mathbf{H} + \mathbf{H} \mathbf{x}) \\ &\quad - (3\alpha+4\beta) \operatorname{tr}(\mathbf{H} \mathbf{x}) \mathbf{H} \cdots (36) \end{aligned}$$

と書くことができる。また、

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot \mathbf{A} \mathbf{x} &= 2\mu \operatorname{tr}(\mathbf{x}^2) + 4\beta \operatorname{tr}(\mathbf{x} \mathbf{H} \mathbf{x}) \\ &\quad - (3\alpha+4\beta) \{\operatorname{tr}(\mathbf{H} \mathbf{x})\}^2 \cdots (37) \end{aligned}$$

が成立する。

3・2 横等方・移動硬化非弾性構成モデル 横等方テンソル $\mathbf{A}$ と有効応力 s^* を用いて、上述の等方性材料に対する非弾性構成モデルを横等方性材料に対するモデルへ拡張する。

内部状態変数と熱力学的力の関係を規定する自由エネルギー関数の表示には、前述の式(7)を仮定する。なお、自由エネルギー関数の表示においても、散逸エネルギー関数の場合と同様に、横等方性テンソルを導入して新しく定義し直すこともできるが、ここでは、簡単のため等方性の場合の表現を用いる。

散逸エネルギー関数については、

$$\begin{aligned} \Omega^*(\mathbf{A}; s^*, \mathbf{p}) &= \Omega[U(\mathbf{A}, s^*)] + \Lambda[V(\mathbf{A}, \mathbf{p})] \\ &= \frac{K}{m+1} U^{m+1} + \frac{M}{l+1} V^{l+1} \cdots (38) \end{aligned}$$

を仮定する。ここで、

$$U(\mathbf{A}, s^*) = \sqrt{\frac{3}{2}(\mathbf{s} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{s} - \mathbf{p})} \cdots (39)$$

$$V(\mathbf{A}, \mathbf{p}) = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{A} \mathbf{p}} \cdots (40)$$

このように仮定した場合、非弾性ひずみ速度は

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}^p &= \frac{\partial \Omega^*}{\partial \mathbf{s}} = \frac{3}{2} K U^m \frac{\mathbf{u}}{U} \\ &= \frac{3}{2} G \frac{\mathbf{u}}{U} \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}} G \mathbf{u}^* \cdots (41) \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$G = K U^m \cdots (42)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{A} s^* = \mathbf{A}(\mathbf{s} - \mathbf{p}) \cdots (43)$$

$$\mathbf{u}^* = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{u}}{U} \cdots (44)$$

一方、内部状態変数の発展式は、次のように表現される。

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon} &= -\frac{\partial \Omega^*}{\partial \mathbf{p}} = \frac{3}{2} K U^m \frac{\mathbf{u}}{U} - \frac{3}{2} M V^l \frac{\mathbf{v}}{V} \\ &= \dot{\epsilon}^p - \frac{3}{2} M V^l \frac{\mathbf{v}}{V} = \frac{3}{2} \left(G \frac{\mathbf{u}}{U} - S \frac{\mathbf{v}}{V} \right) \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}} (G \mathbf{u}^* - S \mathbf{v}^*) = \dot{\epsilon}^p - \sqrt{\frac{3}{2}} S \mathbf{v}^* \cdots (45) \end{aligned}$$

ここで、

$$S = M V^l \cdots (46)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{p} \cdots (47)$$

$$\mathbf{v}^* = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{v}}{V} \cdots (48)$$

なお、式(39)、(40)、(43)、(47)は、次のように表示することができる。

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} U^2 &= (\mathbf{s} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{s} - \mathbf{p}) \\ &= 2\mu \operatorname{tr}[(\mathbf{s} - \mathbf{p})^2] + 4\beta \operatorname{tr}[(\mathbf{s} - \mathbf{p}) \mathbf{H}(\mathbf{s} - \mathbf{p})] \\ &\quad - (3\alpha+4\beta) [\operatorname{tr}(\mathbf{H}(\mathbf{s} - \mathbf{p}))]^2 \cdots (49) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} V^2 &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{A} \mathbf{p} \\ &= 2\mu \operatorname{tr}(\mathbf{p}^2) + 4\beta \operatorname{tr}[\mathbf{p} \mathbf{H} \mathbf{p}] - (3\alpha+4\beta) [\operatorname{tr}(\mathbf{H} \mathbf{p})]^2 \\ &\quad \cdots (50) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{A}(\mathbf{s} - \mathbf{p}) \\ &= 2\mu(\mathbf{s} - \mathbf{p}) + \alpha \mathbf{I} \operatorname{tr}(\mathbf{H}(\mathbf{s} - \mathbf{p})) \\ &\quad + 2\beta[(\mathbf{s} - \mathbf{p}) \mathbf{H} + \mathbf{H}(\mathbf{s} - \mathbf{p})] \\ &\quad - (3\alpha+4\beta) \operatorname{tr}(\mathbf{H}(\mathbf{s} - \mathbf{p})) \mathbf{H} \cdots (51) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{A} \mathbf{p} \\ &= 2\mu \mathbf{p} + \alpha \mathbf{I} \operatorname{tr}(\mathbf{H} \mathbf{p}) + 2\beta(\mathbf{p} \mathbf{H} + \mathbf{H} \mathbf{p}) \\ &\quad - (3\alpha+4\beta) \operatorname{tr}(\mathbf{H} \mathbf{p}) \mathbf{H} \cdots (52) \end{aligned}$$

3・3 まとめ 横等方性・移動硬化構成モデルは、

$$\dot{\epsilon}^p = \sqrt{\frac{3}{2}} G \mathbf{u}^* \cdots (53)$$

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{2}{3} H \dot{\epsilon} = H \left[\frac{2}{3} \dot{\epsilon}^p - S \frac{\mathbf{v}}{V} \right] \cdots (54)$$

と表現される。

この構成モデルにおいて、 $\mu > \alpha$ で、

$$\mu \cong \alpha \cdots (55)$$

とおけば、強化繊維方向に非弾性変形が生じない場合をシミュレートできる。Sun-Chen⁽⁴⁴⁾ も繊維方向の塑性変形が生じない場合を古典的な等方硬化・時間独立塑性理論を用いて議論している。本モデルの特徴は、時間依存非弾性変形で、しかも移動硬化の場合について一般的な表現を与えていることにある。

なお、

$$\mu = \frac{1}{2}, \alpha = \beta = 0 \cdots (56)$$

とおけば、

$$A(\mathbf{s}-\mathbf{p})=\mathbf{s}-\mathbf{p}, A\mathbf{p}=\mathbf{p}, U=J(\mathbf{s}-\mathbf{p}), V=J(\mathbf{p})$$

$$G=F, S=R, \mathbf{u}^*=\mathbf{n}^*, \mathbf{v}^*=\mathbf{v} \quad \dots\dots\dots (57)$$

となるから、前述の等方・移動硬化非弾性構成モデルに帰着される。

4. 横等方・等方硬化非弾性構成モデル

定式化した横等方・非弾性構成モデルにおいては、ひずみ硬化が純粋に移動硬化であることを仮定している。著者が、初期等方性材料の異方硬化クリープ挙動の定式化に用いた内部変数の記述方法を用いれば、上述の横等方・移動硬化構成モデルを横等方・等方硬化構成モデルへ変換することができる。

4.1 等方硬化モデルとしての再構築 初期等方性材料の異方硬化クリープ構成モデルの定式化⁽³⁸⁾にあたって、著者は、移動・等方混合硬化を

$$\xi = \alpha + \sqrt{\frac{3}{2}} \rho \mathbf{n} \quad \dots\dots\dots (58)$$

によって表現した。ここで、 α および ρ はそれぞれ移動硬化と等方硬化を記述する内部状態変数である。ここで、 $\mathbf{n}$ は偏差応力の方向を表す単位テンソル

$$\mathbf{n} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{s}}{J(\mathbf{s})} = \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|} \quad \dots\dots\dots (59)$$

を表す。

式(58)の右辺第2項の等方硬化項のみ

$$\xi = \sqrt{\frac{3}{2}} \rho \mathbf{n} \quad \dots\dots\dots (60)$$

を取り上げれば、内部応力は、形式的に、

$$\mathbf{p} = \frac{2}{3} H \xi = \sqrt{\frac{2}{3}} H \rho \mathbf{n} = \sqrt{\frac{2}{3}} r \mathbf{n} \quad \dots\dots\dots (61)$$

とかける。ここで、 r は

$$r = H \rho \quad \dots\dots\dots (62)$$

であり、等方硬化変数を表す。この場合、有効応力は、

$$\mathbf{s}^* = \mathbf{s} - \mathbf{p} = \mathbf{s} - \sqrt{\frac{2}{3}} r \mathbf{n}$$

$$= \left\{ 1 - \frac{r}{J(\mathbf{s})} \right\} \mathbf{s} \quad \dots\dots\dots (63)$$

となる。

これらの関係を用いれば、

$$\frac{2}{3} U^2 = \mathbf{s}^* \cdot \mathbf{A} \mathbf{s}^* = \left\{ 1 - \frac{r}{J(\mathbf{s})} \right\}^2 \mathbf{s} \cdot \mathbf{A} \mathbf{s}$$

$$= \frac{2}{3} \{ J(\mathbf{s}) - r \}^2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \mathbf{n} \quad \dots\dots\dots (64)$$

$$\frac{2}{3} V^2 = \mathbf{p} \cdot \mathbf{A} \mathbf{p} = \frac{2}{3} r^2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \mathbf{n} \quad \dots\dots\dots (65)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{A} \mathbf{s}^* = \left\{ 1 - \frac{r}{J(\mathbf{s})} \right\} \mathbf{A} \mathbf{s} \quad \dots\dots\dots (66)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{p} = \sqrt{\frac{2}{3}} r \mathbf{A} \mathbf{n} \quad \dots\dots\dots (67)$$

が成立する。また、

$$\frac{\mathbf{u}}{U} = \frac{\left\{ 1 - \frac{r}{J(\mathbf{s})} \right\} \mathbf{A} \mathbf{s}}{\left| 1 - \frac{r}{J(\mathbf{s})} \right| \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{s} \cdot \mathbf{A} \mathbf{s}}$$

$$= \text{sgn} \left\{ 1 - \frac{r}{J(\mathbf{s})} \right\} \frac{\mathbf{A} \mathbf{s}}{\sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{s} \cdot \mathbf{A} \mathbf{s}}$$

$$= \text{sgn} \left\{ 1 - \frac{r}{J(\mathbf{s})} \right\} \frac{\mathbf{A} \mathbf{n}}{\sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \mathbf{n}} \quad \dots\dots\dots (68)$$

$$\frac{\mathbf{v}}{V} = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}} r \mathbf{A} \mathbf{n}}{|r| \sqrt{\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \mathbf{n}}} = \text{sgn}(r) \frac{\mathbf{A} \mathbf{n}}{\sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \mathbf{n}} \quad \dots\dots\dots (69)$$

を導くことができる。

一方向への単調負荷条件を想定し、上記の関係を代入すると、非弾性ひずみ速度は以下のように表現することができる。

$$\dot{\epsilon}^p = \frac{3}{2} G \frac{\mathbf{u}}{U} = \frac{3}{2} K U^m \frac{\mathbf{u}}{U}$$

$$= \frac{3}{2} K \sqrt{\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \mathbf{n}}^m \{ J(\mathbf{s}) - r \}^m \frac{\mathbf{A} \mathbf{n}}{\sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \mathbf{n}}$$

$$= \frac{3}{2} \dot{P} \frac{\mathbf{A} \mathbf{n}}{\sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \mathbf{n}} \quad \dots\dots\dots (70)$$

ここで、

$$\dot{P} = K \sqrt{\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \mathbf{n}}^m \{ J(\mathbf{s}) - r \}^m \quad \dots\dots\dots (71)$$

一方、内部変数速度は、

$$\dot{\xi} = \sqrt{\frac{3}{2}} \dot{\rho} \mathbf{n} = \dot{\epsilon}^p - \frac{3}{2} S \frac{\mathbf{v}}{V} \quad \dots\dots\dots (72)$$

によって与えられる。この表示において、 $\text{tr}(\dot{\xi} \mathbf{n})$ をとると、次式が得られる。

$$\dot{\rho} = \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\dot{\epsilon}^p - \frac{3}{2} S \frac{\mathbf{v}}{V} \right) \cdot \mathbf{n}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}} \left[K \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \mathbf{n}^{m+1} \left(\|\mathbf{s}\| - \sqrt{\frac{2}{3}} r \right)^m \right.$$

$$\left. - M \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \mathbf{n}^{l+1} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} r \right)^l \right]$$

$$= K \sqrt{\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \mathbf{n}}^{m+1} \{ J(\mathbf{s}) - r \}^m - M \sqrt{\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \mathbf{n}}^{l+1} (r)^l$$

$$= K \sqrt{\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \mathbf{n}} [\dot{P} - M \sqrt{\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \mathbf{n}}^l r^l] \quad \dots\dots\dots (73)$$

ここで、

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \mathbf{n} = 2\mu \text{tr}(\mathbf{n}^2) + 4\beta \text{tr}(\mathbf{n} \mathbf{H} \mathbf{n})$$

$$= (3\alpha + 4\beta) \{ \text{tr}(\mathbf{H} \mathbf{n}) \}^2$$

$$= 2\mu + 4\beta \text{tr}(\mathbf{n} \mathbf{H} \mathbf{n}) - (3\alpha + 4\beta) \{ \text{tr}(\mathbf{H} \mathbf{n}) \}^2$$

$$\quad \dots\dots\dots (74)$$

$$\mathbf{A} \mathbf{n} = 2\mu \mathbf{n} + \alpha \mathbf{I} \text{tr}(\mathbf{H} \mathbf{n}) + 2\beta (\mathbf{n} \mathbf{H} + \mathbf{H} \mathbf{n})$$

$$= (3\alpha + 4\beta) \text{tr}(\mathbf{H} \mathbf{n}) \mathbf{H} \quad \dots\dots\dots (75)$$

4.2 等方硬化モデルの定常応答 上述の等方硬化モデルにおいて、変数 ρ の変化率は、Bailey-Orowan 形発展式によって記述されているので、遷移挙

動および定常挙動が予測できる。

いま,

$$m=l \quad \dots\dots\dots (76)$$

を仮定すると, 式(73)より

$$K\{J(\mathbf{s})-r_s\}^m - Mr_s^m = 0 \quad \dots\dots\dots (77)$$

が成立する。この代数方程式を解くと,

$$r_s = \varphi J(\mathbf{s}) \quad \dots\dots\dots (78)$$

が得られる。ここで,

$$\varphi = \frac{K^{1/m}}{K^{1/m} + M^{1/m}} \quad \dots\dots\dots (79)$$

したがって, 定常状態における非弾性速度は,

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_s^p &= \frac{3}{2} K \sqrt{\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \mathbf{n}}^m (1-\varphi)^m \{J(\mathbf{s})\}^m \frac{\mathbf{A} \mathbf{n}}{\sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \mathbf{n}}} \\ &= \frac{3}{2} \dot{P}_s \frac{\mathbf{A} \mathbf{n}}{\sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \mathbf{n}}} = \frac{3}{2} \dot{P}_s \frac{\mathbf{A} \mathbf{s}}{\sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{s} \cdot \mathbf{A} \mathbf{s}}} \quad \dots (80) \end{aligned}$$

となる。ここで,

$$\dot{P}_s = K \sqrt{\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \mathbf{n}}^m (1-\varphi)^m \{J(\mathbf{s})\}^m \quad \dots\dots\dots (81)$$

このことから, 定常非弾性速度の応力依存性が von Mises の相当応力 $J(\mathbf{s})$ のべき関数によって記述されていることがわかる。

式(80)は, 等方性材料の Norton 則に帰着できることを示すことができる。すなわち, 横等方構成モデルにおいて, 式(56)を仮定すれば,

$$\mathbf{A} \mathbf{n} = \mathbf{n} \quad \dots\dots\dots (82)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1 \quad \dots\dots\dots (83)$$

となるから,

$$\dot{P}_s = K (1-\varphi)^m \{J(\mathbf{s})\}^m \quad \dots\dots\dots (84)$$

とかける。したがって,

$$\dot{\epsilon}_s^p = \frac{3}{2} K (1-\varphi)^m \{J(\mathbf{s})\}^m \frac{\mathbf{s}}{J(\mathbf{s})} \quad \dots\dots\dots (85)$$

となり, Norton 則が導かれる。

上述の等方硬化モデルは, 遷移クリープと定常クリープ挙動を記述することができる。また, 定常クリープ速度の応力依存性が $m=l$ のときべき乗則に帰着できる。したがって, この等方硬化モデルは, 加速クリープ以外について, 金属基複合材の実際に観察されている特徴的なクリープ挙動を記述することができる。

この研究で定式化した横等方・移動硬化構成モデルも, 遷移クリープと定常クリープを記述することができる。しかも, 定式化された構成モデルはこれまでに議論されたものとは異なる形式を与えている。したがって, 本研究におけるモデル化の妥当性については, 横等方・等方硬化モデルだけでなく, 横等方・移動硬化モデルについても実験結果に基づいてさらに検討する必要がある。

5. 結 言

本研究では, 繊維強化金属基複合材料における異方的な時間依存非弾性変形挙動を巨視的および現象論的立場から記述するための新しい構成モデルについて一形式を提案した。まず最初の研究段階として, 一方向強化複合材料を想定し, 初期異方性には横等方性を仮定した。また, ひずみ硬化が移動硬化によって記述されるものと仮定し, 移動硬化変数の発展式が Bailey-Orowan 形によって規定される場合の表現を導いた。定式化には非可逆熱力学に基づく内部状態変数理論の手法を応用した。

定式化した横等方・移動硬化構成モデルは, 初期等方性材料に対する Malinin-Khadjinsky 形移動硬化構成モデルを横等方性の場合へ拡張したものに相当する。開発した横等方・非弾性構成モデルは, 4 階の横等方テンソルの係数の選び方により, 特殊な場合として, 等方性モデルに帰着される。移動硬化変数の発展式には Bailey-Orowan 形の表現が用いられているので, 金属基複合材料のクリープ変形に応用した場合, 遷移クリープと定常クリープの両方の予測が可能となる。

多結晶金属の異方硬化クリープ挙動の記述に関連して著者が提案した内部変数の記述方法を仮定した場合, 定式化した横等方・移動硬化構成モデルから横等方・等方硬化モデルを導くことができる。この等方硬化モデルにおいて, 応力指数 (m) と回復指数 (l) を等しくおけば, 定常非弾性速度の応力べき乗依存性が記述され, 拡張された Norton 則が導かれる。

最後に, 本研究に対して, 財団法人倉田記念科学技術振興会から研究助成を受けたことを記し謝意を表する。

文 献

- (1) 酒谷, 機誌, **90**-821 (1987), 475.
- (2) 内田, 機械の研究, **40**-1 (1988), 215.
- (3) 前川, 材料, **38**-435 (1989), 1365.
- (4) 平野, 機械の研究, **42**-4 (1990), 457.
- (5) 楠・山崎, 機誌, **90**-821 (1987), 424.
- (6) Digiovanni, P. R. and Adsit, N. R. 編, Testing Technology of Metal Matrix Composites, *ASTM STP*, 964 (1988), 3.
- (7) Everett, R. K. and Arsenault, R. J. 編, *Metal Matrix Composites: Mechanisms and Properties*, (1991), 189, Academic Press.
- (8) Aboudi, J., *Mech. Compos. Mater.*, (1991), 35, Elsevier Science Publishers.
- (9) Lilholt, H., *Compos. Sci. Technol.*, **22** (1985), 277.
- (10) McLean, M., *Compos. Sci. Technol.*, **23** (1985), 37.
- (11) Miles, D. E. and McLean, M., *Metal Sci.*, **11** (1977), 563.
- (12) Mohamed, F. A., Park, K. T. and Lavernia, E. J., *Mater. Sci. Eng., A*, **150** (1992), 21.

- (13) Lucas, G. F. and McNelly, T. R., *Metall. Trans.*, A, **7** (1976), 1317.
- (14) Spencer, A. J. M. 編, Continuum Theory of the Mechanics of Fibre-Reinforced Composites, *CISM*, No. 282 (1984), 1, Springer-Verlag.
- (15) Boehler, J. P. and Sawczuk, A., *Acta Mech.*, **27** (1977), 185.
- (16) Betten, J., *J. Rheology*, **25**-6 (1981), 565.
- (17) Sawczuk, A. and Trampczynski, W. A., *Int. J. Mech. Sci.*, **24**-11 (1982), 647.
- (18) Waniewski, M., *Ing. Arch.*, **55** (1985), 368.
- (19) Johnson, A. F., *J. Mech. Phys. Solids*, **25** (1977), 117.
- (20) Robinson, D. N., *Nucl. Eng. Des.*, **83** (1984), 389.
- (21) Rice, J. R., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **37** (1979), 728.
- (22) Ponter, A. R. S. and Leckie, F. A., *Trans. ASME, J. Eng. Mater. Technol.*, **98** (1976), 47.
- (23) Krempl, E., *Proc. Int. Conf. on Constitutive Laws for Eng. Materials*, (1987), 137.
- (24) Nouailhas, D. and Freed, A. D., *Trans. ASME, J. Eng. Mater. Technol.*, **114** (1992), 97.
- (25) Chaboche, J. L., *Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Tech.*, **25**-1 (1977), 33.
- (26) Ohno, N., Mizuno, T., Kawaji, H. and Okada, I., *Acta Met. Mater.*, **40**-3 (1992), 559.
- (27) Hill, R., *J. Mech. Phys. Solids*, **12** (1964), 213.
- (28) Mori, T. and Tanaka, K., *Acta Met.*, **21** (1973), 571.
- (29) Dvorak, G. J. (Everett, R. K. and Arsenault R. J. 編), *Metal Matrix Composites : Mechanisms and Properties*, (1991), 1, Academic Press.
- (30) Weng, G. J., *J. Mech. Phys. Solids*, **38** (1990), 419.
- (31) Taya, M., Dunn, M., Derby, B. and Walker, J., *Trans. ASME, Appl. Mech. Rev.*, **43**-5 (1990), S294.
- (32) Gramoll, K. C. (Freed, A. D. and Walker, K. P. 編), Walker, K. P. and Freed, A. D., *High Temperature Constitutive Modeling - Theory and Application*, MD-26/AMD-121 (1991), 439, ASME.
- (33) Wakashima, K., Suzuki, Y. and Umekawa, S., *J. Compos. Mater.*, **13** (1979), 288.
- (34) 浜中・大矢・富岡・大鍋, 機論, **52**-481, A (1986), 2265.
- (35) Sun, C. T. and Chen, J. L., *Compos. Sci. Technol.*, **40** (1991), 115.
- (36) Lemaitre, J. and Chaboche, J. L., *Mechanics of Solid Materials*, (1985), 278, Cambridge University Press.
- (37) Malinin, N. N. and Khadjinsky, G. M., *Int. J. Mech. Sci.*, **14** (1972), 235.
- (38) 河井, 機論, **58**-550, A (1992), 866.
- (39) 柳沢・矢野・佐賀原・大森, 日本金属学会誌, **48**-6 (1984), 583.
- (40) Dvorak, G. J. and Rao, M. S. M., *Int. J. Eng. Sci.*, **14** (1976), 361.
- (41) Llorca, J., Needleman, A. and Suresh, S., *Scripta Met.*, **24** (1990), 1203.
- (42) Povirk, G. L., Stout, M. G., Bourke, M., Goldstone, J. A., Lawson, A. C., Lovato, G. L., Macewen, S. R., Nutt, S. R. and Needleman, A., *Acta Met. Mater.*, **40**-9 (1992), 2391.
- (43) Boehler, J. P. 編, Applications of Tensor Functions in Solid Mechanics, *CISM*, No. 292 (1987), 31, Springer-Verlag.
- (44) Sun, C. T. and Chen, J. L., *J. Compos. Mater.*, **23** (1989), 1009.