傾斜材料からなる円形断面の片持ちはりの数式処理による最適設計*

石川 篤^{*1}, 松本英治^{*2}, 柴田俊忍^{*2}

Optimal Design of Cantilever with Circular Cross Section Made of Gradient Material by Symbolic Manipulation

Atsushi ISHIKAWA, Eiji MATSUMOTO and Toshinobu SHIBATA

In this paper we consider optimal distribution of a gradient material at the circular cross section of a cantilever. The design variables are the parameters which express the distribution of the material density or the elastic constant, and Young's modulus is assumed to be linear in the material density. Two problems are analyzed: (1) maximization of the bending stiffness with constant weight, and (2) minimization of the maximum stress at the cross section with constant bending stiffness. In a general case, the above problems reduce to generalized eigenvalue problems which are formulated and solved by symbolic manipulation and numerical calculation. The optimal distribution indicates that for (1), the density is concentrated at the circular surface such as of a circular cylinder, and for (2), Young's modulus decreases with respect to the radius. The obtained results are also applicable to the optimal design of composite materials where the distribution of the material density is not continuous.

Key Words: Optimum Design, Material Design, Composite Material, Computational Mechanics, Gradient Material, Symbolic Manipulation, Cantilever

1. 緒 言

数式処理システムによって, これまで, 手計算では不可能であり, 数値計算でも求められなかった複雑な数式の導出を計算機を使ってできるようになった. 最近では, 数式処理の長所を生かし, 様々な計算力学の分野にも応用されつつある. 例えば, 最適設計の分野では, はりの座屈荷重, たわみ, 固有振動数などに関する最適形状を決定するために数式処理を応用したいくつかの試みがある^{(1)~(6)}.

一方, 材料技術の進歩に伴い, 傾斜材料や複合材料など, 複数の材料を用いて材料に不均質性や異方性を与え, 均質・等方的な単一材料では得ることのできないよりよい力学的特性を持った材料を作り出そうという試み(材料設計)が行われている.

本研究では, 傾斜材料の設計において密度と縦弾性定数の分布をパラメータで表し, 適当な制約条件の下での最適化問題を解くことにより最適な材料を求めようと試みた. このような最適解は理想的な分布をもつ傾斜材料を示しているが, 既存の傾斜材料を用いて部

材を設計するときにも, その目標とすることが出来る. また, 本研究に必要なパラメータを含む最適化問題に現れる高次多項式の導出や解析は手計算では困難であるが, 数式処理システムの一つである REDUCE と数値計算を併用することによりこの問題を解決した⁽⁷⁾.

以下の章では, 半径方向に密度および縦弾性定数が変化する円形断面はりを考え, ①重量一定の条件の下で曲げ剛性を最大にする問題, ②曲げ剛性一定の条件の下で半径方向の応力分布のうち最大の応力値を最小にする問題という, 二つの最適材料設計問題について解析を行う.

2. 重量一定に基づく最大剛性設計

本章では, 重量一定の制約条件の下で, 図1のように半径方向に密度・縦弾性定数が変化する傾斜材料のはりに対して, 曲げ剛性を最大にするような密度と縦弾性定数の分布を求める.

2.1 密度に制限がないとき 密度は負の値をとらないので, 材料が存在しない場合($\rho=0$)を含め, 密度が $\rho \geq 0$ の範囲でこの問題を考える.

2.1.1 理論 はりのパラメータをそれぞれ, 次のようにおく.

* 原稿受付 平成5年10月20日.

*¹ 学生員, 京都大学大学院 (〒606 京都市左京区吉田本町).*² 正員, 京都大学工学部.

図 1 円形断面はり

はりの断面半径： a

半径方向の無次元数： $\xi = r/a$

密度： $\rho(\xi)$ (ξ の関数)

縦弾性定数： $E(\xi)$ (ξ の関数)

このとき、 ξ を用いて、はりの重量 W は、

$$W = 2\pi L a^2 \int_0^1 \xi \cdot \rho(\xi) d\xi \quad (1)$$

はりの曲げ剛性 K は、

$$K = \pi a^4 \int_0^1 \xi^3 \cdot E(\xi) d\xi \quad (2)$$

と表される。

密度が必ず正になるための条件を考慮して、 ξ に対する密度 $\rho(\xi)$ の分布を

$$\rho(\xi) = (X_1 + X_2 \cdot \xi + X_3 \cdot \xi^2 + \dots)^2 \quad (3)$$

と仮定する。ここで、 X_i は材料の密度分布を決定するパラメータである。通常、同種の傾斜材料において密度と弾性定数には何らかの相関があるが、ここでは、縦弾性定数と密度が線形関係にあると仮定して、

$$E(\xi) = B + C \cdot \rho(\xi) \quad (4)$$

とする。式(4)の $E(\xi)$ を代入すれば、曲げ剛性式(2)は、

$$\begin{aligned} K &= \pi a^4 \int_0^1 \xi^3 \cdot (B + C \cdot \rho(\xi)) d\xi \\ &= \pi a^4 \left(\frac{B}{4} + C \int_0^1 \xi^3 \cdot \rho(\xi) d\xi \right) \end{aligned} \quad (5)$$

となる。

重量が一定、すなわち、式(1)の $W = \text{一定}$ の条件の下で、曲げ剛性 K を最大にする問題を考えると、定数項を無視すれば、重量 W を変換した量 w が一定という制約式

$$w = \int_0^1 \xi \cdot \rho(\xi) d\xi = \frac{W}{2\pi L a^2} = w_0 \quad (6)$$

のもとで、曲げ剛性 K を変換した量 k

$$k = \int_0^1 \xi^3 \cdot \rho(\xi) d\xi \Rightarrow (\text{最大}) \quad (7)$$

を目標関数とすればよいことになる。

式(6)、式(7)に式(3)の $\rho(\xi)$ を代入して展開すると

$$w = \int_0^1 \xi \cdot (X_1 + X_2 \cdot \xi + X_3 \cdot \xi^2 + \dots)^2 d\xi$$

$$= \sum P_{ij} X_i X_j = w_0 \text{ のもとで} \dots \dots \dots (8)$$

$$\begin{aligned} k &= \int_0^1 \xi^3 \cdot (X_1 + X_2 \cdot \xi + X_3 \cdot \xi^2 + \dots)^2 d\xi \\ &= \sum Q_{ij} X_i X_j \Rightarrow (\text{最大}) \dots \dots \dots (9) \end{aligned}$$

のように、パラメータ X_i の 2 次の制約式、目標関数となる。

ここで、任意の $\{X_i\}$ に対して

$$Y_i = \frac{X_i}{\sqrt{\frac{\sum P_{ij} X_i X_j}{w_0}}} \quad (10)$$

なる $\{Y_i\}$ をとれば、

$$w = \sum P_{ij} Y_i Y_j = w_0 \quad (11)$$

となり、制約条件(11)を満たす任意の $\{Y_i\}$ に対して式(10)を満たす $\{X_i\}$ は必ず存在する。すなわち、 $C \neq 0$ として $\{X_i\} = \{C \cdot Y_i\}$ は式(10)を満たす。したがって、 $\{X_i\}$ がすべての値をとれば、 $\{Y_i\}$ は式(8)を満たすすべての値を取り得る。

結局、式(8)を満たす任意の $\{Y_i\}$ に対して曲げ剛性 $\sum Q_{ij} Y_i Y_j$ を最大にする問題は、任意の $\{X_i\}$ に対して

$$k = \sum Q_{ij} Y_i Y_j = \left(\frac{\sum Q_{ij} X_i X_j}{\left(\frac{\sum P_{ij} X_i X_j}{w_0} \right)} \right) \Rightarrow (\text{最大}) \dots \dots (12)$$

とする問題、あるいは

$$k = \frac{\sum Q_{ij} X_i X_j}{\sum P_{ij} X_i X_j} \Rightarrow (\text{最大}) \dots \dots \dots (13)$$

とする問題となる。 $\{X_i\}$ は任意なので式(13)から、次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial X_i} &= \frac{2Q_{ij} X_j (\sum P_{ij} X_i X_j) - 2P_{ij} X_j (\sum Q_{ij} X_i X_j)}{(\sum P_{ij} X_i X_j)^2} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

ここで、 $i \neq j$ のとき、

$$P_{ij} = P_{ji} = \frac{[X_i X_j \text{ の係数}]}{2} \quad (15)$$

のようにすれば、 P_{ij} は対称行列とできるので、以下では P_{ij} 、 Q_{ij} を対称行列とみなす。

結局、式(14)を整理すれば、重量一定の条件の下で曲げ剛性を最大にする問題は、

$$(Q_{ij} - k P_{ij}) X_j = 0 \quad (16)$$

という一般化固有値問題となる。この一般化固有値問題では、固有値が曲げ剛性 k となり、固有ベクトルが近似式のパラメータ $\{X_i\}$ となっているので、最大の固有値 k に対する固有ベクトル $\{X_i\}$ を求めれば、式(11)で定義される $\{Y_i\}$ が最大剛性を与える密度分布のパラメータとなる。

2・1・2 計算方法と計算結果 2・1・1 の理論に基づき、密度に制限がないときに重量一定の制約条件の下で、どのような密度分布が曲げ剛性を最大にするか

計算したので、計算手順と計算結果を示す。

計算の手順は、まず、数式処理を用いて、近似式(3)・(4)をもとに、式(16)の固有値問題の係数行列 P_{ij} 、 Q_{ij} を計算した。次に、実対称行列に関する一般化固有値問題の固有値と固有ベクトルを計算する数値計算のプログラムを用い、式(16)の固有値問題を解きパラメータを決定した。

これらの計算により得られた、密度に制限がない場合の最適解を、図2に示す。グラフの横軸には無次元化した半径 $\xi=r/a$ を、縦軸には無次元化した密度 $\rho(\xi)/\rho_c$ をとっている。ここで、 ρ_c は、密度、弾性定数がはり断面に対し、一定としたときの密度であり、

$$\rho_c = 2w_0 = \frac{W}{\pi a^2 \cdot L} \quad (17)$$

である。また、 N は近似式(3)の次数である。

この図2を見ると、近似の次数 N が高くなるにつれて、

- (1) 外周部での密度が高くなる。
 - (2) 外周付近で密度が高くなっている部分の厚さが薄くなる。
 - (3) 中心部($\xi=0$ の所)に存在する一定密度の部分の厚さが薄くなる。(近似の次数が十分大きくなればこの部分は無視できる。)
- という傾向が見られる。式(4)において、密度と縦弾性定数には線形関係が成り立つと仮定しているので、縦弾性定数の分布についても同様の結果が得られることになる。

これらの結果より、密度に制限がない場合、重量一定の条件下で曲げ剛性を最大にするには、中央を空洞、

図2 重量一定の条件下で曲げ剛性を最大にする問題の最適解

すなわち、円管状のはりとし、外周部の密度と縦弾性定数を高くすればよいことがわかる。

2・2 密度に $0 < \alpha \leq \rho$ の下限があるとき 式(3)

に代わり、密度 $\rho(\xi)$ の分布を

$$\rho(\xi) = \alpha + (X_1 + X_2 \cdot \xi + X_3 \cdot \xi^2 + \dots)^2 \quad (18)$$

とすれば、 $0 < \alpha \leq \rho$ 、すなわち、密度の下限を α とできる。

このとき、式(6)、式(7)に式(18)を代入して展開すれば、重量一定の条件下で曲げ剛性を最大にする問題の制約式と目標関数は、それぞれ、

$$w = \int_0^1 \xi \cdot \{ \alpha + (X_1 + X_2 \cdot \xi + X_3 \cdot \xi^2 + \dots)^2 \} d\xi = \frac{\alpha}{2} + \sum P_{ij} X_i X_j = w_0 \quad (19)$$

$$k = \int_0^1 \xi^3 \cdot \{ \alpha + (X_1 + X_2 \cdot \xi + X_3 \cdot \xi^2 + \dots)^2 \} d\xi = \frac{\alpha}{4} + \sum Q_{ij} X_i X_j \Rightarrow (\text{最大}) \quad (20)$$

とパラメータの2次式となる。

言い換えれば、制約式を

$$\sum P_{ij} X_i X_j = w_0 - \frac{\alpha}{2} \quad (21)$$

とし、目標関数を

$$\sum Q_{ij} X_i X_j \Rightarrow (\text{最大}) \quad (22)$$

とすればよいことになる。この式(21)、式(22)は、密度に制限がないときの制約式と目標関数の式(8)、式(9)の w_0 を $(w_0 - \alpha/2)$ で置き換えたものに等しい。ゆえに、密度の下限を α とした場合の密度の関数の最適なパラメータ $\{Y'_i\}$ は、密度に制限がない場合の最適なパラメータ $\{Y_i\}$ を用いて、次の式(23)より決定できる。

$$Y'_i = \frac{X_i}{\sqrt{\frac{\sum P_{ij} X_i X_j}{(w_0 - \frac{\alpha}{2})}}} = \sqrt{\frac{w_0 - \frac{\alpha}{2}}{w_0}} \cdot Y_i \quad (23)$$

式(23)のパラメータを式(18)に代入すれば、密度に下限があるときの最適な密度分布は、密度に制限がないときの最適な密度分布(図2)を縦軸方向に $(w_0 - \alpha/2)/w_0$ 倍して、 α だけ平行移動したものであるとわかる。

すなわち、密度に制限がないときと同様に、密度に下限があるときにも、外周部での密度と縦弾性定数を大きくすれば曲げ剛性を大きくできるといえる。

2・3 密度に $0 \leq \rho \leq \beta$ の上限があるとき 密度のとりうる値に上限がある場合、いかなる密度分布が曲げ剛性を最大にするか考える。

密度のとりうる範囲を $0 \leq \rho \leq \beta$ (上限 β)とする。

図2の密度に制限がない場合の計算結果によると、

外周部での密度と縦弾性定数が大きいほど曲げ剛性が大きくなる。これを考慮して、図3(a), (b)のはり I・はり II のように、半径方向に密度が増加し、外周部で密度が上限 β となる 2 種類の密度分布のはりを考え、この二つのはりの重量が等しいとき、どちらの分布が曲げ剛性が大きくするか比較する。

はり I の密度分布は、

$$\rho = \begin{cases} 0 & (0 \leq \xi \leq \xi_1) \\ \rho(\xi) & (\xi_1 < \xi \leq \xi_2) \\ \beta & (\xi_2 < \xi \leq 1) \end{cases} \quad (24)$$

となる。ここで、 $\rho(\xi)$ は $0 \leq \rho(\xi) \leq \beta$ なる任意の関数である。

また、はり II の密度分布は、

$$\rho = \begin{cases} 0 & (0 \leq \xi \leq \xi_3) \\ \beta & (\xi_3 < \xi \leq 1) \end{cases} \quad (25)$$

である。

式(8), (9)に従うと、はり I の重量 w_1 、曲げ剛性 k_1 は、それぞれ、

$$w_1 = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \xi \cdot \rho(\xi) d\xi + \int_{\xi_2}^1 \xi \cdot \beta d\xi \quad (26)$$

(a) はり I の密度分布

(b) はり II の密度分布

図 3

$$k_1 = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \xi^3 \cdot \rho(\xi) d\xi + \int_{\xi_2}^1 \xi^3 \cdot \beta d\xi \quad (27)$$

となり、はり II の重量 w_2 、曲げ剛性 k_2 は

$$w_2 = \int_{\xi_3}^1 \xi \cdot \beta d\xi \quad (28)$$

$$k_2 = \int_{\xi_3}^1 \xi^3 \cdot \beta d\xi \quad (29)$$

となる。

はり I とはり II の重量が等しい条件は、式(26), (28)から、

$$w_2 - w_1 = \int_{\xi_3}^{\xi_2} \xi \cdot (\beta - \rho(\xi)) d\xi - \int_{\xi_1}^{\xi_3} \xi \cdot \rho(\xi) d\xi = 0 \quad (30)$$

と表せる。また、はり II とはり I との曲げ剛性の差は、式(27), (29)から

$$k_2 - k_1 = \int_{\xi_3}^{\xi_2} \xi^3 \cdot (\beta - \rho(\xi)) d\xi - \int_{\xi_1}^{\xi_3} \xi^3 \cdot \rho(\xi) d\xi \quad (31)$$

と書ける。

ここで、式(31)の第 1 項は、積分区間 $[\xi_3, \xi_2]$ において $\xi \leq \xi_3$ であることを用いて、

$$\int_{\xi_3}^{\xi_2} \xi^3 \cdot (\beta - \rho(\xi)) d\xi \geq \int_{\xi_3}^{\xi_2} \xi_3^2 \cdot \xi \cdot (\beta - \rho(\xi)) d\xi \quad (32)$$

とできる。同様に、式(31)の第 2 式は積分区間 $[\xi_1, \xi_3]$ において $\xi_3 \leq \xi$ であることを用いて、

$$\int_{\xi_1}^{\xi_3} \xi^3 \cdot \rho(\xi) d\xi \leq \int_{\xi_1}^{\xi_3} \xi_3^2 \cdot \xi \cdot \rho(\xi) d\xi \quad (33)$$

とできる。結局、式(32), (33)を式(31)に代入して、重量が等しい条件式(30)を用いると、

$$k_2 - k_1 \geq \xi_3^2 \cdot \left\{ \int_{\xi_3}^{\xi_2} \xi \cdot (\beta - \rho(\xi)) d\xi - \int_{\xi_1}^{\xi_3} \xi \cdot \rho(\xi) d\xi \right\} = 0 \quad (34)$$

が導かれる。この問題では、 $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3$ とはならないので、式(34)の等号は成り立たない。

このことから、はり I のように半径方向の中間部に密度 $\rho(\xi)$ ($0 \leq \rho(\xi) \leq \beta$) の材質を使ったはりよりも、はり II のように外周部に密度 β (密度の上限) となるように質量を集中させた円管状のはりの方が曲げ剛性が高くなることがわかる。つまり、密度に上限がある場合には、はりの外側に(密度・縦弾性定数の制限内で)できる限り密度と縦弾性定数の高い材料を用いれば、曲げ剛性を高くできる。

3. 曲げ剛性一定に基づく最大応力の最小化

2 章において、重量一定を条件に円形断面はりの曲げ剛性を大きくするためには、はりの外側ほど縦弾性

定数を大きくすればよいことがわかった。このとき、応力も外側ほど大きくなる。

本章では、曲げ剛性を一定の下で、円形断面はりの断面内の応力の最大値(以下、最大応力とする)を最小にする問題を考えるに当たり、①縦弾性定数が半径方向に増加するとき、②応力が半径方向に増加するとき、という二つの仮定にもとづいて解くことにする。

3・1 縦弾性定数が半径方向に増加するとき はりの中心軸を含む鉛直面内において、中立面から $\xi = r/a$ の距離にある点での応力は、はりにかかる曲げモーメントを M として、

$$\sigma(\xi) = \frac{M}{\pi a^3} \cdot \frac{\xi \cdot E(\xi)}{\left(\int_0^1 \xi^3 \cdot E(\xi) d\xi \right)} \quad \cdots (35)$$

と書ける。また、縦弾性定数 $E(\xi)$ が半径方向に増加すると仮定しているの、縦弾性定数の半径方向の変化率を

$$\frac{dE(\xi)}{d\xi} = (X_1 + X_2 \cdot \xi + X_3 \cdot \xi^2 + \cdots)^2 \geq 0 \quad \cdots (36)$$

と仮定する。式(36)を積分すれば、縦弾性定数は、

$$E(\xi) = \int_0^\xi (X_1 + X_2 \cdot \xi + X_3 \cdot \xi^2 + \cdots)^2 d\xi \quad \cdots (37)$$

のようなパラメータを含んだ式となる。

式(35)において、縦弾性定数 $E(\xi)$ が半径方向に増加するので、応力が最大となるのは、 $\xi=1$ の点となる。ゆえに、目標関数である最大応力は、

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{\pi a^3} \cdot \frac{E(1)}{\left(\int_0^1 \xi^3 \cdot E(\xi) d\xi \right)} \Rightarrow (\text{最小}) \quad \cdots (38)$$

と表される。両辺の逆数をとれば、式(38)の最大応力を最小にする最小値問題の目標関数は、

$$\lambda = \frac{1}{\sigma_{\max}} = \frac{\left(\int_0^1 \xi^3 \cdot E(\xi) d\xi \right)}{E(1)} \Rightarrow (\text{最大}) \quad \cdots (39)$$

という最大値問題の目標関数に書き直せる。

ここで、式(39)の分母・分子は、パラメータの2次式になるので、それぞれ、

$$E(1) = \sum P_{ij} X_i X_j \quad \cdots (40)$$

$$k = \int_0^1 \xi^3 \cdot E(\xi) d\xi = \sum Q_{ij} X_i X_j \quad \cdots (41)$$

とおけば、目標関数(39)は、

$$\lambda = \frac{\sum Q_{ij} X_i X_j}{\sum P_{ij} X_i X_j} \Rightarrow (\text{最大}) \quad \cdots (42)$$

と書ける。

$\{X_i\}$ は任意なので、 $\partial \lambda / \partial X_i = 0 (i=1, 2, \cdots)$ を考え、式を整理すれば、結局、断面内の応力の最大値を最小にする問題は、

$$(Q_{ij} - \lambda \cdot P_{ij}) \cdot X_j = 0 \quad \cdots (43)$$

という一般化固有値問題として解くことができ、この

固有値問題の最大固有値に対する固有ベクトル $\{X_i\}$ が、最適なパラメータの組となる。

さらに、この $\{X_i\}$ を用いて、

$$Z_i = \sqrt{\frac{k_0}{\sum Q_{ij} X_i X_j}} \cdot X_i \quad \cdots (44)$$

なる新しい変形 $\{Z_i\}$ を考える。この $\{Z_i\}$ を用いると、式(41)の曲げ剛性は

$$\sum Q_{ij} Z_i Z_j = k_0 \quad \cdots (45)$$

となり、曲げ剛性が定数 k_0 となっていることがわかる。また、式(44)の目標関数は、

$$\lambda = \frac{\sum Q_{ij} Z_i Z_j}{\sum P_{ij} Z_i Z_j} = \frac{\sum Q_{ij} X_i X_j}{\sum P_{ij} X_i X_j} \Rightarrow (\text{最大}) \quad \cdots (46)$$

となり、式(42)と同じ式になる。以上のことから、式(44)で表される $\{Z_i\}$ が、ある決められた曲げ剛性 k_0 に対する最適なパラメータの組になっており、曲げ剛性一定のもとで断面内の応力の最大値を最小にする最適なパラメータを決定することができる。

3・2 応力が半径方向に増加するとき 応力が半径方向に増加するという仮定から、応力を表した式(35)の分子が半径方向に増加すればよい。すなわち、式(35)の分子を

$$F(\xi) = \xi \cdot E(\xi) \quad \cdots (47)$$

とおけば、その半径方向の変化率は

$$\frac{dF(\xi)}{d\xi} = (X_1 + X_2 \cdot \xi + X_3 \cdot \xi^2 + \cdots)^2 \geq 0 \quad \cdots (48)$$

とおける。このとき、式(48)の両辺を積分すれば、

$$F(\xi) = \int_0^\xi (X_1 + X_2 \cdot \xi + X_3 \cdot \xi^2 + \cdots)^2 d\xi \quad \cdots (49)$$

となる。

また、この $F(\xi)$ を用いると式(35)の応力は、

$$\sigma(\xi) = \frac{M}{\pi a^3} \cdot \frac{F(\xi)}{\left(\int_0^1 \xi^2 \cdot F(\xi) d\xi \right)} \quad \cdots (50)$$

と書き直される。

式(50)で、応力が最大になる点は、 $\xi=1$ の点となるので、目標関数である最大応力は

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{\pi a^3} \cdot \frac{F(1)}{\left(\int_0^1 \xi^2 \cdot F(\xi) d\xi \right)} \Rightarrow (\text{最小}) \quad \cdots (51)$$

となる。式(51)の最大応力を最小にする最小値問題の目標関数は、逆数をとれば、

$$\lambda = \frac{\left(\int_0^1 \xi^2 \cdot F(\xi) d\xi \right)}{F(1)} \Rightarrow (\text{最大}) \quad \cdots (52)$$

という最大値問題の目標関数になる。

ここで、式(52)の分母・分子は、パラメータの2次式になるので、それぞれ、

$$F(1) = \sum P_{ij} X_i X_j \quad \cdots (53)$$

$$k = \int_0^1 \xi^3 \cdot E(\xi) d\xi = \sum Q_{ij} X_i X_j \dots\dots\dots (54)$$

とおけば、目標関数(52)は、

$$\lambda = \frac{\sum Q_{ij} X_i X_j}{\sum P_{ij} X_i X_j} \Rightarrow (\text{最大}) \dots\dots\dots (55)$$

と書ける。

この式(55)の最大値問題も、3・1の式(42)と同様に、 $\partial \lambda / \partial X_i = 0 (i=1, 2, \dots, N)$ を考え、式を整理すれば、

$$(Q_{ij} - \lambda \cdot P_{ij}) \cdot X_j = 0 \dots\dots\dots (56)$$

のように、一般化固有値問題として解くことができ、この固有値問題の最大固有値に対する固有ベクトル $\{X_i\}$ が、最大応力を最小にするパラメータとなる。

また、ここで求められた $\{X_i\}$ に対して、

$$Z_i = \sqrt{\frac{k_0}{\sum Q_{ij} X_i X_j}} \cdot X_i \dots\dots\dots (57)$$

と変数変換した $\{Z_i\}$ が、ある決められた曲げ剛性 k_0 に対して、断面内の最大応力を最小にする最適なパラメータの組となる。

3・3 計算結果 2・1・2と同様に、数式処理と数値計算を用いて一般化固有値問題を解いてパラメータを決定し、曲げ剛性一定の下で断面内の応力の最大値を最小にする縦弾性定数と応力の分布を計算した。本研究では二つの仮定に基づいてこの問題を解いたが、3・1のように縦弾性定数が半径方向に増加すると仮定して解いたときには、縦弾性定数と応力の分布は、図4, 5のようになり、3・2のように応力が半径方向に増加すると仮定して解いたときには、図6, 7のようになった。ここで、縦弾性定数の分布を示した図4, 6では、縦弾性定数が断面内で一様と仮定したときの縦弾性定数

図4 縦弾性定数が半径方向に増加するときの最適解 (縦弾性定数)

図6 応力が半径方向に増加するときの最適解 (縦弾性定数)

図5 縦弾性定数が半径方向に増加するときの最適解 (応力)

図7 応力が半径方向に増加するときの最適解 (応力)

図 8 二つの最適解の応力の比較 ($N=5$)

$$E_c = \frac{K}{\frac{\pi a^4}{4}} = \frac{K}{I} \quad (58)$$

を用いて無次元化した縦弾性定数 E/E_c を、縦軸にとっている。また、応力分布を示した図 5, 7 でも、同様に、弾性定数が断面内で一様としたときの最大応力

$$\sigma_{cmax} = \frac{M}{\frac{\pi a^3}{4}} = \frac{Ma}{I} \quad (59)$$

を用いて無次元化した、無次元化応力 σ/σ_{cmax} を縦軸にとった。

まず、図 4 を見れば、縦弾性定数が半径方向に増加する場合には、縦弾性定数の分布は外周付近で一定値に収束するような形になり、近似の次数が上がるにつれて全体が一様な縦弾性定数となるはりに近づいていくことがわかる。

また、応力が半径方向に増加する場合には、図 7 より、今度は、応力の分布が外周付近である一定値に収束するような形になり、近似式の次数が上がるにつれて、全体が一様な応力となるはりに近づいていくことがわかる。このとき、縦弾性定数は、図 6 のように、中央部で高く、外周部で低くなっている。

さらに、二つの場合の応力を比較するために、 $N=5$ のときの応力分布をそれぞれ同じスケールで重ね合わせたのが図 8 である。これを見ると、縦弾性定数が半径方向に増加するとしたときよりも、応力が半径方向

に増加するとしたときの方が応力の最大値が小さく、最大応力の最小化という目的により即した解であるといえる。また、このように応力の最大値に差が生じたのは、縦弾性定数が半径方向に増加するとした方が、制約条件が厳しいからであると思われる。

4. 結 言

本研究では、数式処理を用いて、半径方向に密度と縦弾性定数が変化する傾斜材料の円形断面はりに対し、二つの問題に関して最適材料設計を行った。その結果は以下の通りである。

(1) 重量が一定の下で曲げ剛性を大きくするには、なるべく、はりの外周部で縦弾性定数を大きくしてやればよいことがわかった。その結果、外周部で密度が大きい円管状のはりになることがわかった。これは、数式処理や数値解析によって解いた密度に制限がない場合にも、解析的証明を適用した密度に上限・下限がある場合にも見られた共通の結果である。

(2) 曲げ剛性を一定として半径方向の応力分布のうち応力の最大値を最小にする問題については、縦弾性定数が半径方向に増加するとした場合には、一様な縦弾性定数の分布を持つはりが最適であることがわかった。また、応力が半径方向に増加するとした場合には、一様な応力分布を持つはりが最適であることがわかった。上の二つの条件のうち、最大応力が小さいのは、応力が半径方向に増加すると仮定した場合であり、こちらの方がより最適であるといえる。

文 献

- (1) Rizzi, N. and Tatone, A., *Comput. & Struct.*, **21-4** (1985), 691-700.
- (2) Elishakoff, I. and Couch, B., *J. Symb. Comput.*, **4-3** (1987), 391-396.
- (3) Elishakoff, I. and Tang, J., *Comput. & Methods Appl. Mech. Eng.*, **68-2** (1988), 229-247.
- (4) Smith, W. G., *Comput. & Struct.*, **28-5** (1988), 677-681.
- (5) 奥山・ほか 2 名, 日本機械学会関西学生会平成 2 年度卒業研究発表会前刷集, (1991), 48.
- (6) 権田・ほか 2 名, 日本機械学会関西学生会平成 3 年度卒業研究発表会前刷集, (1992), 119.
- (7) Hearn, A. C., *Reduce User's Manual*, (1987), 1, Rand Corporation.