はく離を有する帯板異材接合部の応力解析*

長谷部 宣男^{*1}, 加藤 誠司^{*2}
上田 篤志^{*3}, 中村 卓次^{*1}

Stress Analysis of Dissimilar Strip with Debondings

Norio HASEBE, Seiji KATO,
Atsusi UEDA and Takuji NAKAMURA

A bimaterial problem of strips which are bonded at their ends is solved. The strips have debondings at both sides of the interface and the debonding lengths are changed. Concentrated loads are applied at the tips of each strip. The complex variable method and a rational mapping function are used for the analysis. Stress distributions are shown for two cases in which locations of the interface are different. Stress intensity of debonding is defined and the values are obtained for some debonding lengths. Aspects of the debonding are investigated. The effect of material constants on debonding is also investigated.

Key Words: Bimaterial, Interface, Debonding, Strip Stress Intensity Factor, Complex Variable Method, Rational Mapping Function

1. 緒 言

弾性定数の異なる材料すなわち異種材料の接合部は、溶接部、介在物と母材、複合材料、セラミックスや金属材料の接合などに見られ、さらに近年、異材接合の積極的な利用からミクロ的にもマクロ的にもより多く見られるようになってきている。その接合問題は形状的、外力条件的にも数多く解析され、多くの文献にその成果がまとめられている(例えば、Piva-Viola⁽¹⁾, Sih-Chen⁽²⁾, Rice⁽³⁾, Murakami ら⁽⁴⁾, Comninou⁽⁵⁾)。

弾性理論上、はく離先端の応力は振動しながら発散する特異性を有する。しかしその振動範囲ははく離先端のごく近傍で、かつエネルギー解放率は振動しない。本論文では均質の場合の応力拡大係数と区別して、接合線上の応力成分の表示式に現れる係数をはく離の応力の強さと名付けて用いる。はく離の応力の強さは、エネルギー解放率の平方根の次元を有し、エネルギー解放率で応力の強度評価をするのと同じで、これを

はく離の破壊力学的評価の指標として用いる。

異材接合問題の解析手法は数値計算手法も含めると数多くある(Hasebe ら⁽⁶⁾, Introduction)。しかしその解析的な解は少ない。著者らは複素応力関数と有理写像関数を用いて、異材の形状が同じで接合部が直線の場合の解を導き、クラックを有する部分接合された半平面の応力解析や破壊^{(7)~(10)}について、また接合線の上に円孔とはく離を有する半無限板の接合問題⁽⁶⁾の解析を行った。本論文は上記の論文で得られた一般解を用いて、帯板の端部が部分的に接合され、集中荷重を受ける場合の応力解析を行い、応力分布、はく離の応力の強さを求め、はく離の進展について考察する。

2. 解析のための準備

図1(a)に示す材料定数の異なる二つの対称な形状の帯板が端面の一部で接合された構造を考える。

帯板の幅を w 、接合部の長さを c 、左右の非接合部の長さを b_2, b_1 とする。非接合部は接合部がはく離を生じた場合のモデルとして、以後これをはく離部、長さをはく離長と称することにする。解法として有理写像関数(後述)を使う。この関数の表す帯の長さは約 $4.5w$ である。接合部付近の応力状態に注目するとき、この長さは半無限長の場合と同じになる。

* 原稿受付 平成5年12月21日。

^{*1} 正員、名古屋工業大学 (〒466 名古屋市昭和区御器所町)。^{*2} 中部電力(株) (〒461-91 名古屋市東区東新町1)。^{*3} 住友金属工業(株) (〒541 大阪府中央区北浜4-5-33)。

座標を (X, Y) とする。 $Y \geq 0$ の帯の材料を材料 I, $Y \leq 0$ の材料を材料 II と称する。材料 I を X 軸に関して回転すると、図 1(b) に示す図形が得られる。これらの図形の面を各々 z_j 平面とし、その座標を (x_j, y_j) で表す。なお添字 $j=1, 2$ は材料 I, II を表す。 z_1, z_2 平面での材料 I, II の形状は同じであるから、これらの形状を単位円内部に等角写像する写像関数として同一の関数を用いることができる。以下、本論文において、図 1(a) の物理面における座標、応力、変位成分の記号、添字に大文字を、図 1(b) の座標面に対して小文字の記号を用いることにする。

図 1(a), (b) に示す接合部の境界 CD を M, それ以外の境界を L_j と呼ぶ。境界条件としては、M 上で応力と変位の成分が連続、 L_j 上で外力の 2 成分が与えられる。図 1(a) と (b) の座標系を用いた外力、変位および応力成分の関係は次式で表される。

$$\begin{aligned} P_{X1} &= p_{x1}, & P_{Y1} &= -p_{y1}, & P_{X2} &= p_{x2}, & P_{Y2} &= p_{y2} \\ U_1 &= u_1, & V_1 &= -v_1, & U_2 &= u_2, & V_2 &= v_2 \\ \sigma_{X1} &= \sigma_{x1}, & \sigma_{Y1} &= \sigma_{y1}, & \tau_{XY1} &= -\tau_{xy1} \\ \sigma_{X2} &= \sigma_{x2}, & \sigma_{Y2} &= \sigma_{y2}, & \tau_{XY2} &= \tau_{xy2} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (1)$$

以下の解析では図 1(b) の座標面での応力、変位成

分が求められ、物理面でのそれらは式 (1) より求められる。

材料定数としては次式の Dundurs の定数 α_D, β_D を用いる⁽⁸⁾⁽¹¹⁾。四つの材料定数が二つの α_D, β_D によって表される。

$$\begin{aligned} \alpha_D &= \frac{(x_1+1)\Gamma - (x_2+1)}{(x_1+1)\Gamma + (x_2+1)} \\ \beta_D &= \frac{(x_1-1)\Gamma - (x_2-1)}{(x_1+1)\Gamma + (x_2+1)}, & \Gamma &= \frac{\mu_2}{\mu_1} \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

ここで μ_j はせん断弾性係数、 x_j はポアソン比 ν_j を用いて平面応力では $x_j = (3-\nu_j)/(1+\nu_j)$ 、平面ひずみでは $x_j = 3-4\nu_j$ で表される。材料 I, II が同じ場合には $\alpha_D = \beta_D = 0.0$ となる。また、対称な形状を解析するので $-1.0 \leq \alpha_D \leq 0.0$ 、 $\mu_2 \leq \mu_1$ を考えればよい。 $\mu_2 \geq \mu_1$ の場合は材料 I, II を入れ替えて考えればよい。

3. 写 像 関 数

図 1(b) に示すような半無限長の帯状領域を図 1(c) の単位円およびその内部に写像する関数は、Schwarz-Christoffel の公式を用いて、次式で与えられる。

$$z_j = K \int \frac{dt_j}{(1-it_j)(1-t_j)^{1/2}(1+t_j)^{1/2}} \quad \dots\dots\dots (3)$$

式 (3) は無理関数であるので、この式をもとに分数式の和の形の有理写像関数をつくる。 $t_j = \pm 1, -i$ で式 (3) の一次導関数が特異点になるため、それらの近傍で、べき級数の収束は極めて遅い。したがって式 (3) を次式のように $t_j = \pm 1, -i$ での収束の遅い項と、その残りとして収束の速い項とに分離する。

$$\begin{aligned} z_j &= K \left[\int \frac{A}{1-it_j} dt_j + \int \frac{B}{(1-t_j)^{1/2}} dt_j \right. \\ &\quad + \int \frac{C}{(1+t_j)^{1/2}} dt_j \\ &\quad + \left. \int \left\{ \frac{1}{(1-it_j)(1-t_j)^{1/2}(1+t_j)^{1/2}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{A}{1-it_j} - \frac{B}{(1-t_j)^{1/2}} - \frac{C}{(1+t_j)^{1/2}} \right\} dt_j \right] \dots\dots\dots (4) \\ A &= \frac{1}{\sqrt{2}}, & B &= \frac{1}{\sqrt{2}(1-i)}, & C &= \frac{1}{\sqrt{2}(1+i)} \end{aligned}$$

ここで式 (3) の係数 K は次のようにして帯の幅が w になるように決められる。 $t_j \rightarrow -i$ のとき帯が長くなり、そのことは式 (4) の右辺第 1 項によって表され、この項は

$$K \int \frac{A}{1-it_j} dt_j = K A i \log(1-it_j) \quad \dots\dots\dots (5)$$

となる。上式の $\log(1-it_j)$ の表す図形は幅 πi をもつ x 軸の負の方向に伸びる帯状領域を表す。今帯形状は図 1(b) に示すように y_j の負の方向にあるので

図 1 解析形状と単位円

$$KAi(\pi i) = w \quad \therefore K = -w/(\pi A) \quad \cdots \cdots (6)$$

となるように K を選べばよい、有理写像関数は式(4)の各項に対して次のように作られる。

$$\int \frac{B}{(1-t_j)^{1/2}} dt_j = -2B(1-t_j)^{1/2} \\ \equiv -2B \left[1 + \sum_{i=1}^{14} \left(\frac{-A_i}{1-\alpha_i t_j} + A_i \right) \right] \quad \cdots \cdots (7)$$

$$\int \frac{C}{(1+t_j)^{1/2}} dt_j = 2C(1+t_j)^{1/2} \\ \equiv 2C \left[1 + \sum_{i=1}^{14} \left(\frac{-A_i}{1+\alpha_i t_j} + A_i \right) \right] \quad \cdots \cdots (8)$$

$$\int \frac{A}{1-it_j} dt_j = A_i \log(1-it_j) \\ \equiv -A_i \sum_{i=1}^{14} \left(\frac{B_i}{1-\beta_i t_j} - B_i \right) \quad \cdots \cdots (9)$$

式(7)と(8)は同じ A_i, α_i を用いて表される。式(7)、(8)中の A_i, α_i および式(9)中の B_i, β_i の求め方については文献(12)、(13)に述べてあるのでここでは省略するが、その値は表1(a)、(b)に示す。

次に式(4)の第4項を次式のようにおく。

$$\text{第4項} = \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{1-\gamma_i t_j} + \text{定数項} \quad \cdots \cdots (10)$$

この場合の C_i, γ_i は、式(4)の第4項を展開したべき

表1 写像関数の係数

(a) 式(7)、(8)の係数 α_i, A_i

α_i	A_i	α_i	A_i
0.999 992 202	0.000 000 014	0.977 909 967	0.001 057 409
0.999 963 987	0.000 000 084	0.940 203 707	0.005 077 965
0.999 882 436	0.000 000 466	0.849 898 079	0.019 687 151
0.999 655 267	0.000 002 080	0.184 855 377	0.812 717 890
0.999 005 791	0.000 010 802	0.022 208 748	8.366 034 528
0.997 195 306	0.000 047 434	0.682 783 030	0.066 868 501
0.992 046 823	0.000 243 718	0.438 978 210	0.217 474 355

(b) 式(9)の係数 β_i, B_i

β_i	B_i	β_i	B_i
0.999 995 093	0.000 012 924	0.980 420 728	0.019 724 918
0.999 970 635	0.000 039 249	0.947 500 549	0.054 394 308
0.999 899 291	0.000 117 962	0.867 925 863	0.128 608 975
0.999 696 627	0.000 316 781	0.236 660 493	1.000 280 048
0.999 125 119	0.000 943 308	0.049 413 075	2.509 003 005
0.997 508 639	0.002 528 176	0.717 302 271	0.266 996 777
0.992 985 177	0.007 471 586	0.490 294 901	0.517 866 957

(c) 式(10)の係数 γ_i, C_i

$\text{Re}[\gamma_i]$	$\text{Im}[\gamma_i]$	$\text{Re}[C_i]$	$\text{Im}[C_i]$
-0.972 795 860	0.000 020 618	0.000 007 974	-0.000 001 638
-0.920 389 752	0.000 087 883	0.000 073 117	-0.000 016 043
0.972 795 507	0.000 020 769	-0.000 007 974	-0.000 001 638
-0.745 197 757	0.000 641 813	0.001 076 900	-0.000 292 752
-0.627 677 425	0.001 402 130	0.003 090 351	-0.000 964 484
-0.494 789 174	0.002 831 831	0.008 512 362	-0.003 076 560
0.920 388 710	0.000 088 302	-0.000 073 120	-0.000 016 042
-0.843 760 150	0.000 260 737	0.000 326 309	-0.000 078 717
-0.350 698 584	0.005 467 535	0.024 944 942	-0.010 282 775
-0.200 302 987	0.010 556 506	0.095 945 431	-0.039 913 990
0.843 758 086	0.000 261 490	-0.000 326 323	-0.000 078 716
-0.052 146 298	0.023 086 737	1.034 732 145	0.194 361 098
0.052 138 063	0.023 087 543	-1.034 921 432	0.194 505 975
0.745 194 374	0.000 642 892	-0.001 076 949	-0.000 292 753
0.200 294 245	0.010 557 489	-0.095 954 927	-0.039 917 300
0.350 690 725	0.005 468 778	-0.024 946 685	-0.010 283 388
0.627 672 517	0.001 403 440	-0.003 090 510	-0.000 964 504
0.494 782 693	0.002 833 204	-0.008 512 859	-0.003 076 683

級数と、式(10)を展開したべき級数の t_j の1乗から $2n$ 乗までのべきの各項で一致するように決められる。その決め方は文献(12)、(14)に述べてある。 $n=18$ のときの C_i, γ_i の値を表1(c)に示す。

以上より式(4)の各項の分数式を用いて、最終的に有理写像関数を次式のように書き表すことができる。

$$z_j = \omega(t_j) = \sum_{k=1}^N \frac{E_k}{\zeta_k - t_j} + E_c \quad \cdots \cdots (11)$$

今の場合 $N=60$ になる。式(11)は有理関数であるためその長さは前述のように有限であり、隅角点 B_j, E_j は曲率半径が $10^{-3}w$ 程度の丸みを有している。

4. 解法および境界条件

有理写像関数を用いた場合の複素応力関数 $\phi_j(t_j)$ ($j=1, 2$) の一般解の誘導は、文献(8)に述べてあるのでその結果のみを記す。

$$\phi_j(t_j) = H_j(t_j) \\ + \frac{\gamma_j}{1+\lambda_j} \left[\sum_{k=1}^N \left\{ 1 - \frac{\chi_j(t_j)}{\chi_j(\zeta_k)} \right\} \frac{A_{(3-j)k} \bar{B}_k \zeta_k^2}{\zeta_k - t_j} \right. \\ \left. - \sum_{k=1}^N \left\{ 1 + \frac{1+\lambda_j - \gamma_j}{\gamma_j} \frac{\chi_j(t_j)}{\chi_j(\zeta_k)} \right\} \frac{\bar{A}_{jk} B_k}{\zeta_k - t_j} \right] \quad \cdots (12)$$

$H_j(t_j)$ は境界条件から得られる関数で、 $\chi_j(t_j)$ は次式で与えられるプレメリ関数である。

$$\chi_j(t_j) = (t_j - \alpha)^{m_j} (t_j - \beta)^{1-m_j} \quad \cdots \cdots (13)$$

$$m_j = 0.5 + i \frac{\ln(\lambda_j)}{2\pi}$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{\lambda_2} = \frac{(x_2 \mu_1 + \mu_2)}{(x_1 \mu_2 + \mu_1)} = \frac{1 - \beta_D}{1 + \beta_D}$$

α, β は境界 L_j と M との接点 C, D に対応する t_j 平面上の座標 [図1(c)参照]、 m_j の指数0.5は接点で応力が不連続、変位が連続の条件より決定される。

さらに式(12)において、 $\zeta_k \equiv 1/\bar{\zeta}_k, A_{jk} \equiv \phi'_j(\zeta_k), B_k \equiv E_k/\omega'(\bar{\zeta}_k)$ ($k=1 \sim N$)、 N は式(11)の N である。 A_{jk} は上式の関係を用いて A_{1k}, A_{2k} の実部、虚部に関する $4N$ 元連立一次方程式を解いて求められる。

具体的に境界条件を与え式(12)中の関数 $H_j(t_j)$ を求める。図1(a)に示す帯の先端で集中荷重 P が作用し、境界 M 上で外力や変位が外から与えられない場合を解析する。帯の先端の点 A_j は、単位円上の点 $t_j = -i$ に対応する(図1参照)。このとき $H_j(t_j)$ は次式で与えられる。

$$h_{Lj} = i \int (p_{xj} + ip_{yj}) ds = \begin{cases} 0 & \widehat{A_j B_j C} \\ -P & \widehat{D E_j F_j} \end{cases} \quad \cdots \cdots (14)$$

$$H_j(t_j) = \frac{\chi_j(t_j)}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{-P}{\chi_j(\sigma)(\sigma - t_j)} d\sigma \quad \cdots \cdots (15)$$

式(15)のだ円型の積分は難しいが、その一次導関数は

次式のように積分形を含まない形で得られる⁽¹⁵⁾。

$$H_j(t_j) = \frac{iP}{2\pi} \frac{\chi_j(t_j)(i+\alpha)(i+\beta)}{\chi_j(-i)(t_j-\alpha)(t_j-\beta)(t_j+i)} \quad \dots\dots\dots (16)$$

上式が積分形を含まないことより、係数 A_{jk} の決定に数値積分を必要としないため、その決定が容易になる。

5. 応力分布

接合線上では、応力の連続条件より $\sigma_{Y1} = \sigma_{Y2} (= \sigma_Y)$, $\tau_{XY1} = \tau_{XY2} (= \tau_{XY})$ および次式が成り立つ。

$$\sigma_{X2} = \mu\sigma_{X1} + \gamma\sigma_Y \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$\mu = \Gamma \frac{\kappa_1 + 1}{\kappa_2 + 1} = \frac{1 + \alpha_D}{1 - \alpha_D}$$

$$\gamma = \frac{3 - \kappa_2}{1 + \kappa_2} - \Gamma \frac{3 - \kappa_1}{1 + \kappa_2} = \frac{2(2\beta_D - \alpha_D)}{1 - \alpha_D}$$

図2(a) ははく離長が $b_1/w = b_2/w = 0.25$ の左右対称なはく離の場合の応力分布を、図2(b) は $b_1/w =$

図2 応力分布図

図3 はく離先端の座標系

0.40, $b_2/w = 0.20$ の左右非対称な場合のそれを示す。材料 I, II の境界線上の応力分布を重ねて描いてある。また境界上の各点の応力の大きさは、境界線の法線方向に対して示してある。材料定数は $\alpha_D = -0.50$, $\beta_D = -0.15$ である。応力分布図より、接合部より帯の長手方向に w 程度離れると、接合部の影響はほぼなく大きさは 1.0 になっている。図2(b) の点 D では偏心荷重のため圧縮応力になっている。偏心荷重と対称荷重では接合線上の応力分布に大きな違いがある。

6. はく離の応力の強さ

はく離先端近傍の接合線上の応力成分の表示式を考える。図3に示す標準座標系を考え $Y_n \geq 0$ の材料を材料 A, $Y_n \leq 0$ の材料を材料 B と称する。

図1(a) の点 C 近傍での応力表示は、図3の材料 A を材料 II, 材料 B を材料 I としてみることができる。点 C ($z_j = z_c$) は t_j 平面上の $t_j = \alpha$ の点に対応する。応力関数を $z_j = z_c$ のまわりで展開し特異項である第 1 項をとると

$$\phi_j'(z_j) = \frac{K_c^{(j)} \exp(\pi \varepsilon_j)}{2\sqrt{2}\pi} (z_j - z_c)^{m_j-1} + O(r^0) \quad \dots\dots\dots (18)$$

と表すことができる。 ε_j は m_j [式(13)参照] の虚部で $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$ である。 $K_c^{(j)}$ は $K_c^{(j)} \equiv K_c^{(j)} + iK_c^{(j)}$ の形で表される複素数である。式(18)より点 C 近傍の接合線上 ($\theta = 0.0$) の応力成分は次式で表される。

$$\sigma_{Yj} = \frac{\cosh(\pi \varepsilon_j)}{\sqrt{2}\pi r} \sqrt{K_c^{(j)} K_c^{(j)}} \times \cos\{\theta_c^{(j)} + \varepsilon_j \ln(r)\} \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$\sigma_{Xj} = \frac{\cosh(\pi \varepsilon_j) + 2 \sinh(\pi \varepsilon_j)}{\sqrt{2}\pi r} \sqrt{K_c^{(j)} K_c^{(j)}} \times \cos\{\theta_c^{(j)} + \varepsilon_j \ln(r)\} \quad \dots\dots\dots (20)$$

$$\tau_{XYj} = \pm \frac{\cosh(\pi \varepsilon_j)}{\sqrt{2}\pi r} \sqrt{K_c^{(j)} K_c^{(j)}} \times \sin\{\theta_c^{(j)} + \varepsilon_j \ln(r)\} \quad \dots\dots\dots (21)$$

τ_{XYj} は $j=1$ のとき正符号, $j=2$ のとき負符号をとる。また, $\theta_c^{(j)}$ は $K_c^{(j)}$ の偏角である。M 上での $\sigma_{Y1} = \sigma_{Y2}$ または $\tau_{XY1} = \tau_{XY2}$ の関係より $K_c^{(1)} = \overline{K_c^{(2)}}$ である。

次に点 D 近傍での応力表示を求める。これは材料 A を材料 I, 材料 B を材料 II とみることができる。点 D ($z_j = z_d$) は t_j 平面上の $t_j = \beta$ の点に対応する。点 C の場合と同様に応力関数を $z_j = z_d$ のまわりで展開し、特異項である第 1 項だけをとると

$$\phi_j'(z_j) = \frac{K_b^{(j)} \exp(\pi \varepsilon_j)}{2\sqrt{2}\pi} (z_j - z_d)^{-m_j} + O(r^0) \quad \dots\dots\dots (22)$$

と表される。上式より点 D 近傍の接合線上 ($\theta = 0.0$) の

応力成分は次式で表される。

$$\sigma_{Yj} = \frac{\cosh(\pi\epsilon_j)}{\sqrt{2\pi r}} \sqrt{K_b^{(j)} K_b^{(j)}} \times \cos\{\theta_b^{(j)} - \epsilon_j \ln(r)\} \dots \dots \dots (23)$$

$$\sigma_{Xj} = \frac{\cosh(\pi\epsilon_j) + 2 \sinh(\pi\epsilon_j)}{\sqrt{2\pi r}} \sqrt{K_b^{(j)} K_b^{(j)}} \times \cos\{\theta_b^{(j)} - \epsilon_j \ln(r)\} \dots \dots \dots (24)$$

$$\tau_{XYj} = \pm \frac{\cosh(\pi\epsilon_j)}{\sqrt{2\pi r}} \sqrt{K_b^{(j)} K_b^{(j)}} \times \sin\{\theta_b^{(j)} - \epsilon_j \ln(r)\} \dots \dots \dots (25)$$

τ_{XYj} は $j=1$ のとき正符号, $j=2$ のとき負符号をとる。また, $K_b^{(j)} \equiv K_{b1}^{(j)} + iK_{b2}^{(j)}$ と表される。 $\theta_b^{(j)}$ は $K_b^{(j)}$ の偏角で, M 上での $\sigma_{Y1} = \sigma_{Y2}$ または $\tau_{XY1} = \tau_{XY2}$ の関係より $K_b^{(1)} = \overline{K_b^{(2)}}$ が成り立つ。

またエネルギー解放率 G は

$$G = \frac{1}{16} \left(\frac{x_1 + 1}{\mu_1} + \frac{x_2 + 1}{\mu_2} \right) K^{(j)} \overline{K^{(j)}} \dots \dots \dots (26)$$

で表される⁽¹⁶⁾。なお以後 $K^{(j)}$ と表示する場合, はく離先端の点として点 C を考える場合には $K^{(j)}$ を, 点 D を考える場合には $K_b^{(j)}$ を意味する。複素積分および留数定理を用いた上式の誘導は文献(9)に示されている。

式(19)~(21), (23)~(25)よりはく離先端近傍の応力の強さを $\sqrt{K^{(j)} \overline{K^{(j)}}}$ の大ききで評価することができる。したがって, ここではこれをはく離の応力の強さ (Stress Intensity of Debonding; SID) と呼ぶ。これはまた式(26)をみてわかるように, エネルギー解放率ではく離先端の応力の強さを評価するのと同じである。

本論文で解析する形状, 荷重は接合部に対称であるので, 材料 I, II が同じ場合にはモード II の応力拡大

係数は零になり, SID は均質の場合のモード I の応力拡大係数に等しい。応力成分の式(19)~(21)または式(23)~(25)をみてわかるように, SID は σ_{Yj} に対してははく離の, τ_{XYj} に対してはずれの, σ_{Xj} に対してはクラック発生の強度評価の指標となる。

複素応力関数を用いた SID の求め方は文献(17)に示されており, その結果を簡単に示す。まず複素応力関数の一次導関数をプレメリ関数を含む項と含まない項とに分解して次式の形に表す。

$$\phi'(t_j) = \frac{\chi_j(t_j)}{(t_j - \alpha)(t_j - \beta)} J_j(t_j) + J_j^0(t_j) \dots \dots \dots (27)$$

$K^{(j)}$ は式(27)の $J_j(t_j)$ と写像関数 $\omega(t_j)$ を用いて, $t_j = \alpha$ の点(点 C)に対して

$$\frac{K_b^{(j)} \exp(\pi\epsilon_j)}{2\sqrt{2\pi}} = \frac{|\omega'(\alpha)(\alpha - \beta)|^{1-m_j}}{\omega'(\alpha)(\alpha - \beta)} J_j(\alpha) \times \exp[i(1-m_j)(\theta_b - \theta_a)] \dots \dots \dots (28)$$

$t_j = \beta$ の点(点 D)に対して

$$\frac{K_b^{(j)} \exp(\pi\epsilon_j)}{2\sqrt{2\pi}} = \frac{|\omega'(\beta)(\beta - \alpha)|^{m_j}}{\omega'(\beta)(\beta - \alpha)} J_j(\beta) \times \exp[-im_j(\theta_b - \theta_a)] \dots \dots \dots (29)$$

により求められる。ただし, $\delta = \angle \alpha \beta$ [α は単位円の中心; 図 1(c)参照] として $\theta_b - \theta_a = \pi + \delta/2$ である。

本論文では SID として, 接合部の長さ c を用いて次式で無次元化した F 値を用いる。この無次元化は F 値が有限値をとるようになされている。

$$F = \frac{c\sqrt{2c}}{Pw\sqrt{\pi}} \sqrt{K^{(j)} \overline{K^{(j)}}} \cosh(\pi\epsilon_j) \dots \dots \dots (30)$$

左右のはく離長が異なる場合の F 値を表 2 に示す。 $\alpha_D = -0.50$, $\beta_D = -0.15$ の場合で, 点 C での F 値を表の上段に, そのときの $K^{(2)}$ の偏角を表の下段に示す。

図 4 には左右のはく離長の F 値への影響を示す。 α_D

表 2 無次元化されたはく離先端 C のはく離の応力の強さ F
 $\alpha_D = -0.5$, $\beta_D = -0.15$, 上段 F 値, 下段 (K_{II}/K_I)

b_1/w b_2/w	0.05	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90
0.00	0.3550 (-0.312)	0.4678 (-0.241)	0.6267 (-0.194)	0.7583 (-0.161)	0.8817 (-0.139)	1.0020 (-0.124)	1.1208 (-0.116)	1.2388 (-0.114)	1.3567 (-0.121)	1.4778 (-0.181)
0.10	0.2736 (-0.273)	0.3645 (-0.246)	0.4912 (-0.191)	0.5937 (-0.159)	0.6852 (-0.141)	0.7682 (-0.133)	0.8429 (-0.136)	0.9084 (-0.153)	0.9661 (-0.195)	
0.20	0.1686 (-0.296)	0.2337 (-0.241)	0.3353 (-0.187)	0.4222 (-0.156)	0.5010 (-0.143)	0.5737 (-0.144)	0.6413 (-0.161)	0.7055 (-0.200)		
0.30	0.0473 (-0.365)	0.0870 (-0.255)	0.1672 (-0.178)	0.2436 (-0.147)	0.3154 (-0.142)	0.3833 (-0.158)	0.4486 (-0.198)			
0.40	-0.0884 (-0.223)	-0.0726 (-0.182)	-0.0101 (-0.420)	0.0594 (-0.075)	0.1269 (-0.126)	0.1922 (-0.185)				
0.50	-0.2389 (-0.247)	-0.2443 (-0.207)	-0.1940 (-0.203)	-0.1295 (-0.231)	-0.0644 (-0.287)					
0.60	-0.4077 (-0.249)	-0.4284 (-0.210)	-0.3836 (-0.204)	-0.3206 (-0.227)						
0.70	-0.5985 (-0.246)	-0.6240 (-0.213)	-0.5763 (-0.223)							
0.80	-0.8151 (-0.244)	-0.8269 (-0.224)								
0.90	-1.0498 (-0.272)									

$= -0.50, \beta_D = -0.15$ とし、左側のはく離長(b_2/w)が一定で、右側のはく離長(b_1/w)を変化させた場合の点 C での F 値の変化を実線で、点 D でのそれを破線で示している。式(30)の無次元化で F 値が負の値になることは実際にはないが、偏心荷重の影響によって圧縮応力になることを考え、 F 値を負の値にまで拡張して考えたほうがわかりやすい。なお F 値が負の値になるようなはく離状態では、はく離が進展する可能性はない。しかし集中荷重 P が圧縮力の場合には F 値の正負の符号は逆になり、はく離部(B_1C および DE_1)で部材の接触を無視するならば、図 4 の F 値の負の領域ではく離が進展する可能性がある。

はく離端での実際の現象を考察するため、 b_2/w を一定にして b_1/w を変えた場合の SID を、次式で無次

図 4 無次元化されたはく離先端 C, D のはく離の応力の強さ F ($\alpha_0 = -0.5, \beta_0 = -0.15$)

図 5 無次元化されたはく離先端 C, D のはく離の応力の強さ N ($\alpha_0 = -0.5, \beta_0 = -0.15$)

元化した N 値によって図 5 に示す。

$$N = \frac{\sqrt{2w}}{P\sqrt{\pi}} \sqrt{K^{(i)} K^{(j)}} \cosh(\pi \epsilon_j) \dots \dots \dots (31)$$

実線が点 C での、破線が点 D での N 値を示す。同じ b_2/w の実線と破線の交点が同じはく離長を示す。図よりはく離の長いほうが N 値が大きく、はく離しやすいことがわかる。 $b_2/w = 0.00 \sim 0.30$ の実線より、点 C でのはく離はいったんはく離が進展し始めると止まることなく進むという不安定成長をする。 N 値が負の値の場合にはく離の偏心によって生じ、このときはく離は進展しない。

次に材料定数 α_D, β_D の F 値への影響を調べる。なお一般的な材料の組合せによる Dundurs の定数 (α_D, β_D) を調べると、この多くが $\beta_D = k\alpha_D$ の直線の近くに存在する⁽⁸⁾。そこで図 6(a) では、左右対称はく離 ($b_1/w = b_2/w = 0.25$) とし、 $k = 0.10 \sim 0.50$ の五とおりに対して α_D の値を 0.0 から -1.0 まで変化させた場合の点 C での F 値の変化を示す。これより α_D の値が 0.0 から -1.0 に近づくにつれて F 値は大きくなっていく。 $\alpha_D = -1.0$ は材料 I が剛体で材料 II が弾性体の

(a) $b_1/w = 0.25, b_2/w = 0.25$

(b) $b_1/w = 0.40, b_2/w = 0.20$

図 6 無次元化されたはく離先端 C, D のはく離の応力の強さ F

表 3 無次元化されたはく離先端 C の応力の強さ F
 $\beta_D=0.35\alpha_D$, 平面応力 $\nu_1=\nu_2=0.3$, $b_2/w=0.0$

E_1/E_2 α_D	b_1/w	$E_1/E_2=1.0$ $\alpha_D=0.000$			$E_1/E_2=2.0$ $\alpha_D=-0.333$		$E_1/E_2=4.0$ $\alpha_D=-0.600$		$E_1/E_2=10.0$ $\alpha_D=-0.818$	
		Present	Yuuki's ⁽¹⁸⁾	Hasebe's ⁽¹⁹⁾	Present	Yuuki's ⁽¹⁸⁾	Present	Yuuki's ⁽¹⁸⁾	Present	Yuuki's ⁽¹⁸⁾
0.05	0.05	1.140	1.14*	1.140	1.164	1.147	1.215	1.201	1.303	1.281
	0.10	1.189	1.19*	1.189	1.201	1.195	1.232	1.224	1.274	1.266
	0.20	1.367	1.37*	1.369	1.374	1.373	1.391	1.410	1.413	1.411
	0.30	1.660	1.66*	1.658	1.666	1.664	1.679	1.678	1.696	1.693
	0.40	2.111	2.11*	2.113	2.117	2.117	2.131	2.130	2.147	2.146
	0.50	2.825	2.81*	2.824	2.832	2.833	2.847	2.848	2.867	2.866
	0.60	4.033	4.033	4.031	4.043	4.044	4.064	4.064	4.090	4.085
	0.70	6.355	6.367	6.350	6.371	6.384	6.402	6.413	6.445	6.444
	0.80	11.957	11.991	11.950	11.987	12.010	12.044	12.054	12.134	12.095
	0.90	34.656		34.633	34.755		34.860		35.212	

* Gross, Srawley and Brown's results⁽²⁰⁾

場合に相当する。 $\alpha_D=0.0$ は材料 I, II が同じ場合で、このときの SID は均質な場合の応力拡大係数によく一致する⁽¹³⁾。

次に図 6(b) では、左右非対称はく離 ($b_1/w=0.40$, $b_2/w=0.20$) の場合の F 値を示す。左右非対称はく離の場合には点 C と点 D とで F 値が異なるため、点 C での F 値を実線、点 D での F 値を破線で表し、それぞれの目盛をグラフの左端と右端とに区別して示してある。

図 6(a), (b) より、左右対称はく離の場合の F 値の変化に比べて左右非対称はく離の場合のそのほうが α_D, β_D の影響を大きく受けている。図 6(a), (b) では、それぞれの接合部の長さ c は一定であるため、この場合の F 値の変化は実際のはく離進展の現象を表している。 α_D が負の値で絶対値が大きいほどはく離は進展しやすい。

接合部の片側のみにはく離を有する形状 ($b_2/w=0.0$) の境界要素法を用いた解析結果が結城らによって求められている⁽¹⁸⁾。それと本論文の解析結果とを併せて表 3 に示す。なお表 3 では文献 (18) の無次元化とあわせるため、次式で無次元化した値を示してある。

$$\tilde{F} = \frac{w}{P\sqrt{\pi b_1}} \sqrt{K^{(i)} K^{(j)}} \cosh(\pi \epsilon_j) \cdots \cdots (32)$$

平面応力状態で $\nu_1=\nu_2=0.3$ の場合 $k=0.35$ となり、 $\beta_D=k\alpha_D$ の関係が成り立つ。 E_1/E_2 を与えることにより α_D は決定される。 $\alpha_D=0.0$ の均質の場合には、著者らの得た片側切欠きの応力拡大係数の値⁽¹⁹⁾をも併せて示す。これらの値は本論文の値とよく一致していることがわかる。

7. 結 語

対称な形状で、接合部が直線の場合の応力関数の式

(18), (22) を用いて応力分布やはく離の応力の強さを得た。荷重項の一次関数が積分項を含むことなく得られるので応力計算は容易である。応力関数の中に含まれる弾性定数は、Dundurs の定数で表されている。均質の場合の応力拡大係数と区別するために、式 (19) ~ (21), (23) ~ (25) で表されるようにはく離の応力の強さを定義し用いた。これは式 (26) を見てわかるようにエネルギー解放率で強度評価するのと同じである。はく離の応力の強さは応力関数 $\phi_j(t_j)$ 、写像関数 $\omega(t_j)$ を用いて式 (28), (29) より直接精度よく得られる。したがってその値を求めるのに外挿等の数値計算的な操作は必要ない。表 3 より得られた結果は均質の場合には既存の結果とよく一致している。一般の Dundurs の定数の場合にも精度的に問題は生じていないと思われる。図 5 より不安定を生ずる様子がよくわかる。接合部では偏心荷重のためいったんはく離が進展し始めると止まることなく進む。図 6 より、 α_D が -1.0 に近いほどすなわち片方の材料が剛なほどはく離しやすい。外力 P が圧縮荷重の場合、応力の符号は反対になり、はく離部の接触を無視すればはく離の進展等に関して同様の考察がなされる。

文 献

- (1) Piva, A., ほか 1 名, *Eng. Fract. Mech.*, **13**(1980), 143.
- (2) Sih, G. C., ほか 1 名, *Mech. Fract.*, **6**(1981), 117, Martinus Nijhoff.
- (3) Rice, J. R., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **55**-3(1988), 98.
- (4) Murakami, Y., ほか 9 名, *Stress Intensity Factors Handbook*, (1986), 429, Pergamon.
- (5) Comninou, M., *Eng. Fract. Mech.*, **37**-1(1990), 197.
- (6) Hasebe, N., ほか 2 名, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **59**-3(1992), 77.
- (7) Hasebe, N., ほか 2 名, *ASCE, J. Eng. Mech.*, **116**-9(1990), 2017.

- (8) Hasebe, N., ほか 2 名, *ASCE, J. Eng. Mech.*, **116**-12 (1990), 2722.
(9) 長谷部・ほか 2 名, 材料, **39**-445(1990), 1405.
(10) 奥村・ほか 2 名, 土木学会論文集, **428**, I-15(1991), 77.
(11) Dundurs, J., *J. Composite Mater.*, **1**(1967), 310.
(12) Hasebe, N. ほか 1 名, *Ing. Arch.*, **47**(1978), 169.
(13) 長谷部・ほか 1 名, 機論, **47**-423, A(1981), 1129.
(14) Hasebe, N., ほか 1 名, *Ing. Arch.*, **49**(1980), 51.
(15) Hasebe, N., ほか 2 名, *ASCE, J. Eng. Mech.*, **115**-6 (1989), 1137.
(16) Salganik, R. L., *J. Appl. Math. Mech.*, **27**(1963), 1468.
(17) Hasebe, N., ほか 2 名, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **55**-9(1988), 574.
(18) 結城・ほか 1 名, 機論, **55**-510, A(1989), 340.
(19) Hasebe, N., *Eng. Fract. Mech.*, **20**-3(1984), 447.
(20) 石田, き裂の弾性解析と応力拡大係数, (1976), 177 培風館.
-