表面が局部加熱される接合膜をもつ半無限体の熱応力とその消失条件*

山 田 勝 稔^{*1}, 大 石 篤 哉^{*1}

Thermal Stresses in a Layered Semi-Infinite Body due to Temperature Discontinuity on Its Surface and Thermal Stress-Free Conditions

Katsutoshi YAMADA and Atsuya OISHI

In this study, a thermal stress problem is solved for a layered half-space when a portion of its surface is heated by temperature discontinuity. When the thermal conductivities of both materials are made equal, the solutions become those for a temperature field which does not produce any stress in the case of homogeneous material. Here it is verified whether there exists a condition for stresses to disappear between the coefficient of thermal expansion and elastic constants. As the result, we found that thermal stress disappears when $\alpha_2/\alpha_1=1$ for plane stress, as expected, and when $\alpha_2/\alpha_1=(1+\nu_1)/(1+\nu_2)$ for plane strain, which was not expected, α being the coefficient of thermal expansion, and ν Poisson's ratio. The physical meaning of the conditions and their extension to finite or three-dimensional bodies are discussed, and also a method of making combinations of materials of any coefficient of thermal expansion stress free is given.

Key Words: Elasticity, Thermal Stress, Laminated Construction, Layered Semi-Infinite Body, Thermal Stress-Free Conditions

1. 結 言

均質体においてはその表面で変位拘束がない限り、一様な温度上昇の場合のみならず温度分布のある場合でも熱応力の生じない温度場が存在しその一般的条件が知られている⁽¹⁾。

一方、異材接合体においては一般に両材料の線膨張係数が異なる限り熱応力が生じると考えられている。しかし先に著者は、点熱源が界面に存在するときに両材料の線膨張係数と弾性定数の間に特異性の消失する条件が存在することを見出した⁽²⁾。この事実から類推して、異材接合体においては熱応力の消失する条件が両材料の物性値の間に存在することも推察されるが、このような問題は今まで必ずしも明確にされていないように思われる。

本研究は、まず接合膜を有する半無限体の表面が指定された温度で局部的に加熱されるとき熱応力問題を二次元熱弾性理論を用いて解析し厳密解を得た。次いでこの問題の解において、両材料の熱伝導率のみを等しくすると熱応力を発生しない温度分布⁽¹⁾に対する解を得るので、この解を詳細に吟味してみた。その

結果、平面応力の場合には予想どおり熱応力が消失するのは弾性定数に関係なく両材料の線膨張係数が等しいときのみであることがわかった。しかし、平面ひずみの場合には予想に反して両材料の線膨張係数 α_i とポアソン比 $\nu_i (i=1, 2)$ の間に $\alpha_2/\alpha_1=(1+\nu_1)/(1+\nu_2)$ の関係があるとき熱応力が消失することがわかった。続いて、この条件の物理的意味、その有限物体や三次元応力状態への拡張、両材料が任意の線膨張係数をもつ接合体の温度と外力負荷の組合せによる熱応力消失方法等について言及しておいた。

2. 解 析

図1に示すような接合膜をもつ半無限体を考える。材料1, 2はともに等方・等質とし、添字1, 2はこの材料1, 2を表す。厚さ a の膜表面で次式で表される加熱を受ける。

$$(T_2)_{x=-a} = \begin{cases} T_0 & |y| \leq b \\ 0 & |y| > b \end{cases} \dots\dots\dots (1)$$

界面 $x=0$ は完全接合されているとすると

$$T_1 = T_2$$

$$K_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} = K_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \dots\dots\dots (2)$$

ここで $K_i (i=1, 2)$ は熱伝導率である。さらに無限遠で

* 原稿受付 平成5年11月18日。

*1 正員、徳島大学工学部 (〒770 徳島市南常三島町2-1)。

温度は零とする。すなわち

$$T_i \rightarrow 0 (i=1, 2) \text{ as } r^2 = x^2 + y^2 \rightarrow \infty \dots\dots\dots (3)$$

最後に、この物体には外力は作用していないとする。
このときの熱応力問題を二次元熱弾性理論を用いて解析する。

2・1 温度分布 定常な温度分布は境界条件(1), (2), (3)のほかに次式を満足しなければならない。

$$\nabla^2 T_i = 0 \left(\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \dots\dots\dots (4)$$

これらすべてを満足する温度分布はフーリエ変換を用い容易に求められ次式を得る。

$$T_1 = \frac{T_0}{\pi} (1-\lambda) \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m \left[\tan^{-1} \frac{b+y}{d_m+x} + \tan^{-1} \frac{b-y}{d_m+x} \right] \dots\dots\dots (5)$$

$$T_2 = \frac{T_0}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m \left[\tan^{-1} \frac{b+y}{d_m+x} + \tan^{-1} \frac{b-y}{d_m+x} \right] - \frac{T_0}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^{m+1} \left[\tan^{-1} \frac{b+y}{d_m-x} + \tan^{-1} \frac{b-y}{d_m-x} \right] \dots\dots\dots (6)$$

ここで

$$\lambda = \frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} \dots\dots\dots (7)$$

$$d_m = (2m+1)a \dots\dots\dots (8)$$

解(5), (6)がすべての境界条件を満足していることは容易に確認できる。

2・2 熱弾性変位ポテンシャル 特解は次の熱弾性変位ポテンシャルより求まる。

$$\nabla^2 \varphi_i = m_i T_i \dots\dots\dots (9)$$

ここで

$$m_i = \begin{cases} (1+\nu_i)\alpha_i/(1-\nu_i) & \text{(plane strain)} \\ (1+\nu_i)\alpha_i & \text{(plane stress)} \end{cases} \dots\dots\dots (10)$$

温度(5), (6)に対する式(9)の解として次式をとる。

$$\varphi_1 = -\frac{m_1 T_0}{\pi} (1-\lambda) \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m \int_0^{\infty} \frac{1}{\xi^2} (d_m+x) e^{-(d_m+x)\xi} \times \sin \xi b \cos \xi y d\xi \dots\dots\dots (11)$$

図1 接合膜を持つ半無限体と座標系

$$\varphi_2 = -\frac{m_2 T_0}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m \int_0^{\infty} \frac{1}{\xi^2} (d_m+x) e^{-(d_m+x)\xi} \times \sin \xi b \cos \xi y d\xi + \frac{m_2 T_0}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^{m+1} \times \int_0^{\infty} \frac{1}{\xi^2} (d_m-x) e^{-(d_m-x)\xi} \times \sin \xi b \cos \xi y d\xi \dots\dots\dots (12)$$

この関数 φ_i で記述される変位, 応力はそれぞれ次式で与えられる。

$$u_i' = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}, v_i' = \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \dots\dots\dots (13)$$

$$\sigma_{ix}' = -2G_i \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2}, \sigma_{iy}' = -2G_i \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2}, \tau_{ixy}' = 2G_i \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x \partial y} \dots\dots\dots (14)$$

ここで $G_i (i=1, 2)$ はせん断弾性係数である。応力はすべて閉形で表せるがその結果は省略する。

2・3 Airy の応力関数 補解として、次の Airy の応力関数 $\chi_i (\nabla^4 \chi_i = 0)$ を導入する。

$$\chi_1 = \int_0^{\infty} (A+Bx) e^{-\xi x} \cos \xi y d\xi \dots\dots\dots (15)$$

$$\chi_2 = \int_0^{\infty} (C+Dx) e^{-\xi x} \cos \xi y d\xi + \int_0^{\infty} (E+Fx) e^{\xi x} \cos \xi y d\xi \dots\dots\dots (16)$$

定数 $A \sim F$ は境界条件より決定される積分定数である。関数 χ_i により記述される変位は次式で与えられる。

$$2G_i u_i'' = -\frac{\partial \chi_i}{\partial x} + (\chi_i + 1) \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \dots\dots\dots (17)$$

$$2G_i v_i'' = -\frac{\partial \chi_i}{\partial y} + (\chi_i + 1) \frac{\partial \psi_i}{\partial x}$$

ここで

$$\chi_i = \begin{cases} 3-4\nu_i & \text{(plane strain)} \\ (3-\nu_i)/(1+\nu_i) & \text{(plane stress)} \end{cases} \dots\dots\dots (18)$$

関数 ψ_i は次式から決定される。

$$\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x \partial y} = \frac{1}{4} \nabla^2 \chi_i, \nabla^2 \psi_i = 0 \dots\dots\dots (19)$$

応力は次式で与えられる。

$$\sigma_{ix}'' = \frac{\partial^2 \chi_i}{\partial y^2}, \sigma_{iy}'' = \frac{\partial^2 \chi_i}{\partial x^2}, \tau_{ixy}'' = -\frac{\partial^2 \chi_i}{\partial x \partial y} \dots\dots\dots (20)$$

補解は次の境界条件を満足するように決定される。界面 $x=0$ の変位, 応力の連続条件

$$u_1' + u_1'' = u_2' + u_2'' \dots\dots\dots (21)$$

$$v_1' + v_1'' = v_2' + v_2''$$

$$\sigma_{1x}' + \sigma_{1x}'' = \sigma_{2x}' + \sigma_{2x}'' \dots\dots\dots (22)$$

$$\tau_{1xy}' + \tau_{1xy}'' = \tau_{2xy}' + \tau_{2xy}''$$

表面 $x=-a$ での応力自由の条件

$$\sigma_{2x}' + \sigma_{2x}'' = 0 \dots\dots\dots (23)$$

$$\tau_{2xy}' + \tau_{2xy}'' = 0$$

さらに応力は無限遠で零とする。変位, 応力の式を境

界条件(21), (22), (23)に代入し, 得られる $A \sim F$ に関する連立方程式を解いて次式を得る.

$$A = \frac{M}{D}, \frac{B}{2\xi} = \frac{N}{D} \quad (24)$$

ここで

$$D = [e^{2a\xi} - \alpha][e^{2a\xi} - \beta] - 4\beta a^2 \xi^2 e^{2a\xi} \quad (25)$$

$$\alpha = \frac{\delta - 1}{\delta}, \beta = \frac{\eta - 1}{\eta} \quad (26)$$

および⁽³⁾

$$\delta = \frac{\Gamma x_1 + 1}{x_2 + 1}, \eta = \frac{\Gamma x_2}{x_2 + 1}, \Gamma = \frac{G_2}{G_1} \quad (27)$$

さらに次の記号

$$\sigma_T = \frac{G_1 m_1 T_0}{\pi} \quad (28)$$

$$\omega = \frac{m_2}{m_1} \quad (29)$$

$$t = a\xi \quad (30)$$

を導入すると, M, N は次式で与えられる.

$$\begin{aligned} \frac{\xi^2 M}{a\sigma_T} = & \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m \left\{ \left[(1-\lambda) \left(\alpha + \frac{\eta}{\delta} \right) - \left(\lambda \frac{1}{\eta} + \frac{1}{\delta} \right) \Gamma \omega \right] t^{-1} e^{4t} + \left[- \left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\eta} \right) \Gamma \omega \right] e^{4t} + \left[- \frac{2}{\eta} \Gamma \omega \right] t e^{4t} \right. \\ & + \left[- (1-\lambda) \left(\alpha + \frac{\eta}{\delta} \right) (1+\beta) + \left\{ \lambda \frac{1}{\eta} (1+\alpha) + \frac{1}{\delta} (1+\beta) \right\} \Gamma \omega \right] t^{-1} e^{2t} + \left[- 2(1-\lambda) \left(\frac{1}{\delta} + \frac{\alpha}{\eta} \right) \right. \\ & + \left. \left\{ - \lambda \left(\frac{\alpha}{\eta} + \frac{\beta}{\delta} \right) + \left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\eta} \right) \right\} \Gamma \omega \right] e^{2t} + \left[- 4(1-\lambda) \left(\alpha + \frac{\eta}{\delta} \right) \beta + 2 \left(\lambda \frac{1}{\eta} + \frac{\beta}{\delta} \right) \Gamma \omega \right] t e^{2t} \\ & + \left[(1-\lambda) \left(\alpha + \frac{\eta}{\delta} \right) \beta - \left(\lambda \frac{\alpha}{\eta} + \frac{\beta}{\delta} \right) \Gamma \omega \right] t^{-1} + \left[\lambda \left(\frac{\alpha}{\eta} + \frac{\beta}{\delta} \right) \Gamma \omega \right] + \left[- 2 \lambda \frac{\beta}{\delta} \Gamma \omega \right] t \left\} e^{-(dm/a)t} \sin\left(\frac{b}{a}t\right) \right. \\ & + \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m \left(\frac{dm}{a} \right) \left\{ \left[- 2(1-\lambda) + \left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\eta} \right) \Gamma \omega \right] e^{4t} + \left[\frac{2}{\eta} \Gamma \omega \right] t e^{4t} + \left[2(1-\lambda)(\alpha + \beta) \right. \right. \\ & - \left. \left\{ \lambda \left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\eta} \right) + \left(\frac{\alpha}{\eta} + \frac{\beta}{\delta} \right) \right\} \Gamma \omega \right] e^{2t} + \left[- 2 \left(\lambda \frac{1}{\eta} - \frac{\beta}{\delta} \right) \Gamma \omega \right] t e^{2t} + \left[8(1-\lambda)\beta \right] t^2 e^{2t} \\ & + \left. \left[- 2(1-\lambda)\alpha\beta + \lambda \left(\frac{\alpha}{\eta} + \frac{\beta}{\delta} \right) \Gamma \omega \right] + \left[- 2 \lambda \frac{\beta}{\delta} \Gamma \omega \right] t \left\} e^{-(dm/a)t} \sin\left(\frac{b}{a}t\right) \right\} \quad (31) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\xi^2 N}{a\sigma_T} = & \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m \left\{ \left[(1-\lambda) \frac{\eta}{\delta} \beta - \frac{1}{\delta} \Gamma \omega \right] t^{-1} e^{4t} + \left[- \frac{1}{\delta} \Gamma \omega \right] e^{4t} + \left[- (1-\lambda) \frac{\eta}{\delta} (1+\beta^2) + \frac{1}{\delta} (1+\beta) \Gamma \omega \right] t^{-1} e^{2t} \right. \\ & + \left[\left\{ \lambda \frac{1}{\delta} (1-2\beta) + \frac{\beta}{\delta} \right\} \Gamma \omega \right] e^{2t} + \left[- 4(1-\lambda) \frac{\eta}{\delta} \beta^2 + 2 \frac{\beta}{\delta} \Gamma \omega \right] t e^{2t} + \left[(1-\lambda) \frac{\eta}{\delta} \beta - \frac{\beta}{\delta} \Gamma \omega \right] t^{-1} \\ & + \left[\lambda \frac{\beta}{\delta} \Gamma \omega \right] + \left[- 2 \lambda \frac{\beta}{\delta} \Gamma \omega \right] t \left\} e^{-(dm/a)t} \sin\left(\frac{b}{a}t\right) + \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m \left(\frac{dm}{a} \right) \left\{ \left[\frac{1}{\delta} \Gamma \omega \right] e^{4t} \right. \\ & + \left. \left[- \left(\lambda \frac{1}{\delta} + \frac{\beta}{\delta} \right) \Gamma \omega \right] e^{2t} + \left[2 \frac{\beta}{\delta} \Gamma \omega \right] t e^{2t} + \left[\lambda \frac{\beta}{\delta} \Gamma \omega \right] + \left[- 2 \lambda \frac{\beta}{\delta} \Gamma \omega \right] t \left\} e^{-(dm/a)t} \sin\left(\frac{b}{a}t\right) \right\} \quad (32) \end{aligned}$$

残りの未知係数 $C \sim F$ は, 次のように求まる.

$$\begin{aligned} \frac{\xi^2 C}{a\sigma_T} = & \eta \left(\frac{1}{D} \frac{\xi^2 M}{a\sigma_T} \right) + (\delta - \eta) \left(\frac{1}{D} \frac{\xi^2 N}{a\sigma_T} \right) + \frac{\xi^2 C_0}{a\sigma_T}, \frac{\xi^2 D}{a\sigma_T} = 2\delta \left(\frac{1}{D} \frac{\xi^2 N}{a\sigma_T} \right) + 2(\eta - 1) \frac{\xi^2 D_0}{a\sigma_T} \\ \frac{\xi^2 E}{a\sigma_T} = & -(\eta - 1) \left(\frac{1}{D} \frac{\xi^2 M}{a\sigma_T} \right) - (\delta - \eta) \left(\frac{1}{D} \frac{\xi^2 N}{a\sigma_T} \right) + \frac{\xi^2 E_0}{a\sigma_T}, \frac{\xi^2 F}{a\sigma_T} = 2(\eta - 1) \left(\frac{1}{D} \frac{\xi^2 M}{a\sigma_T} - \frac{1}{D} \frac{\xi^2 N}{a\sigma_T} \right) + 2(\eta - 1) \frac{\xi^2 F_0}{a\sigma_T} \quad (33) \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} \frac{\xi^2 C_0}{a\sigma_T} = & \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m \left[- (1-\lambda)(2\eta - 1) + (1+\lambda)\Gamma\omega \right] t^{-1} e^{-(dm/a)t} \sin\left(\frac{b}{a}t\right) \\ & + 2 \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m \left(\frac{dm}{a} \right) \left[(1-\lambda)\eta - \Gamma\omega \right] e^{-(dm/a)t} \sin\left(\frac{b}{a}t\right) \\ \frac{\xi^2 D_0}{a\sigma_T} = & - \sum_{m=0}^{\infty} (1-\lambda) \lambda^m t^{-1} e^{-(dm/a)t} \sin\left(\frac{b}{a}t\right) \\ \frac{\xi^2 E_0}{a\sigma_T} = & \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m \left[(1-\lambda)(2\eta - 1) - (1+\lambda)\Gamma\omega \right] t^{-1} e^{-(dm/a)t} \sin\left(\frac{b}{a}t\right) \\ & + 2 \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m \left(\frac{dm}{a} \right) \left[- (1-\lambda)(\eta - 1) + \lambda\Gamma\omega \right] e^{-(dm/a)t} \sin\left(\frac{b}{a}t\right) \\ \frac{\xi^2 F_0}{a\sigma_T} = & - \sum_{m=0}^{\infty} (1-\lambda) \lambda^m t^{-1} e^{-(dm/a)t} \sin\left(\frac{b}{a}t\right) + 2 \sum_{m=0}^{\infty} (1-\lambda) \lambda^m \left(\frac{dm}{a} \right) e^{-(dm/a)t} \sin\left(\frac{b}{a}t\right) \quad (34) \end{aligned}$$

以上ですべての未知係数が求まり問題は解けたことになる.

2・4 逆フーリエ変換 以上の解析によりフーリエ積分形の解を得ることができる。これらはすべて次の積分で表すことができる。

$$\begin{cases} I_c^\pm(p, q; m) \\ I_s^\pm(p, q; m) \end{cases} = \int_0^\infty \frac{1}{D} t^p e^{qt} e^{-\{(dm/a) \pm (x/a)\}t} \begin{cases} \sin\left(\frac{b}{a}t\right) \sin\left(\frac{y}{a}t\right) \\ \sin\left(\frac{b}{a}t\right) \cos\left(\frac{y}{a}t\right) \end{cases} dt \dots\dots\dots (35)$$

$$\begin{cases} I_c^\pm(p; m) \\ I_s^\pm(p; m) \end{cases} = \int_0^\infty t^p e^{-\{(dm/a) \pm (x/a)\}t} \begin{cases} \sin\left(\frac{b}{a}t\right) \sin\left(\frac{y}{a}t\right) \\ \sin\left(\frac{b}{a}t\right) \cos\left(\frac{y}{a}t\right) \end{cases} dt \dots\dots\dots (36)$$

前報⁽²⁾で示したように $1/D$ は次のように級数に展開できる。

$$\frac{1}{D} = \sum_{k=1}^\infty \sum_{i,j=0}^\infty {}^k\gamma_{ij} t^{2(k-1)} e^{-2(i+j+k+1)t} \quad (k=1, 2, 3, \dots; i, j=0, 1, 2, \dots) \dots\dots\dots (37)$$

ここで

$${}^k\gamma_{ij} = 4^{k-1} \binom{i+k-1}{i} \binom{j+k-1}{j} a^i b^{j+k-1} \dots\dots\dots (38)$$

式(37)を積分(35)に用いると、容易に積分できて次式を得る。

$$\begin{aligned} I_n^\pm(p, q; m) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^\infty \sum_{i,j=0}^\infty {}^k\gamma_{ij} \left[\varepsilon_n G_n\left(r; c \pm \frac{x}{a}, \frac{b}{a} + \frac{y}{a}\right) + G_n\left(r; c \pm \frac{x}{a}, \frac{b}{a} - \frac{y}{a}\right) \right] \\ (n=c, s; \varepsilon_s=1, \varepsilon_c=-1) &\dots\dots\dots (39) \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{cases} G_c(r; x, y) \\ G_s(r; x, y) \end{cases} = \int_0^\infty t^r e^{-xt} \begin{cases} \cos(yt) \\ \sin(yt) \end{cases} dt \dots\dots\dots (40)$$

および

$$r=2(k-1)+p, c=2(i+j+k+1)-q + \frac{dm}{a} \dots\dots\dots (41)$$

積分(40)は次のように閉じた形で表せる⁽⁴⁾。

$$G_c(r; x, y) = r! \left(\frac{x}{x^2+y^2} \right)^{r+1} \sum_{0 \leq 2n \leq r+1} (-1)^n \binom{r+1}{2n} \left(\frac{y}{x} \right)^{2n}, G_c(-1; x, y) = -\frac{1}{2} \log(x^2+y^2) \dots\dots (42)$$

$$G_s(r; x, y) = r! \left(\frac{x}{x^2+y^2} \right)^{r+1} \sum_{n=0}^{[r/2]} (-1)^n \binom{r+1}{2n+1} \left(\frac{y}{x} \right)^{2n+1}, G_s(-1; x, y) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \dots\dots\dots (43)$$

積分(36)も関数(42), (43)によって次のように表せる。

$$\begin{aligned} J_n^\pm(p; m) &= \frac{1}{2} \left[\varepsilon_n G_n\left(p; \frac{dm}{a} \pm \frac{x}{a}, \frac{b}{a} + \frac{y}{a}\right) + G_n\left(p; \frac{dm}{a} \pm \frac{x}{a}, \frac{b}{a} - \frac{y}{a}\right) \right] \quad (n=c, s; \varepsilon_s=1, \varepsilon_c=-1) \\ &\dots\dots\dots (44) \end{aligned}$$

このようにして応力をすべて閉形で表すことができる。

このようにして得られた閉形解から特別な場合として、 $K_1=K_2, a_1=a_2, G_1=G_2, \nu_1=\nu_2$ とすると $x=-a$ を自由面とする均質半無限体の解を得る。このときの応力成分はすべて零となることを示すことができる。この結果は予期したものであり、単連結領域でその温度場が平面調和関数であるとき熱応力は誘起されないことが知られている⁽¹⁾。

さらに3章で述べる熱応力消失条件の誘導はこの閉形解が有効に利用できる。

3. 熱応力消失条件

3・1 線膨張係数と弾性定数の影響 こうして得られた解において熱伝導率のみを等しくおいたときの解の挙動を調べてみる。すなわちこのときの温度分布はすでに述べたように均質体に対しては熱応力を生じないことが知られているが、接合体の場合にはどのようなかを調べてみる。

得られた解において $K_1=K_2$ すなわち $\lambda=0$ において、少し長い計算をすると次式を得る。

$$\frac{\sigma_{kij}}{\sigma_T} = \frac{\sigma'_{kij}}{\sigma_T} + \frac{\sigma''_{kij}}{\sigma_T}$$

$$= \frac{1}{\delta} [\delta + \eta - 1 - \Gamma\omega] F_{kij}(\delta, \eta, I_n^+, J_n^+) \quad (45)$$

$$(k=1, 2; i, j=x, y; n=c, s) \dots\dots\dots (45)$$

ここで $F_{kij}(\quad)$ は材料定数 δ, η と積分(35), (36)の関数である。式(45)を見れば、 $\delta + \eta - 1 - \Gamma\omega = 0$ のとき、すなわち

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{x_1 + 1}{x_2 + 1} \dots\dots\dots (46)$$

のとき両材料のすべての応力成分は消失することがわかる。式(46)は平面応力の場合

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = 1 \dots\dots\dots (47)$$

平面ひずみの場合

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{1 + \nu_1}{1 + \nu_2} \dots\dots\dots (48)$$

となる。これより平面応力の場合は一般に考えられているように熱応力が発生しないのは線膨張係数が等しい場合だけであり、弾性定数に無関係であることが確認できた。しかし平面ひずみの場合には一般の常識に反して線膨張係数が異なっても熱応力の消失する場合のあることがわかる。ここで、ポアソン比の物理的制限 $0 \leq \nu \leq 0.5$ より条件(48)は

$$\frac{2}{3} \leq \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \leq \frac{3}{2} \dots\dots\dots (49)$$

となり、熱応力が消失するために許される線膨張係数の差異は極めて小さい範囲に限られる。式(49)の範囲外の線膨張係数をもつ材料の接合体に対する熱応力消失法は後述する。

3・2 熱伝導率の影響 3・1節の熱応力消失条件(47), (48)は熱伝導率のみ同じで他の物性値は異なる材料について得られたものである。ここでは熱伝導率のみ異なる材料の組合せに対する熱応力消失条件について考察する。

各材料は均質体でありその内部で温度分布は平面調和関数(4)を満足している。しかし、界面上では境界条件(2)の第2式が成立しているから

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K_i \frac{\partial T_i}{\partial x} \right) = 0 \quad (i=1, 2) \dots\dots\dots (50)$$

が成立しない限り調和関数(4)は満足されず熱応力は生じる。式(50)が成立するのは

$$K_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} = K_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} = q \quad (\text{cont.}) \dots\dots\dots (51)$$

のときのみである。すなわち各材料内で温度が直線的に分布する場合であり、このとき熱伝導率が異なっても熱応力は消失する。したがって、熱応力消失条件(47), (48)は熱伝導率が異なる場合でも温度分布が直線的である場合には成立する。

3・3 物理的意味 熱ひずみをも考慮したフックの法則⁽⁵⁾を見ると、熱応力消失条件(47), (48)はそれぞれ平面応力、平面ひずみの場合の単位温度上昇当たりの熱ひずみが界面で等しい条件を表していることがわかる。特に、平面ひずみの場合の消失条件(48)は平面ひずみを保つために必要な軸力 $E_1 \alpha_1 T_1, E_2 \alpha_2 T_2$ による横ひずみが界面における熱ひずみの不適合を打消す条件を表している。

3・4 有限物体および三次元応力状態への拡張

3・3節で述べた消失条件の物理的意味の誘導方法は、境界値問題を解くという過程を含んでいないので、その方法は有限物体の二次元および三次元応力状態にも適用可能である。したがって、消失条件(47), (48)は有限物体の二次元応力状態に対しても有効である。また、三次元応力状態にある接合体の熱応力消失条件は式(47)と同じである。すなわち両材料の線膨張係数が等しいときのみであり、弾性定数に無関係である。

3・5 任意の線膨張係数をもつ場合の熱応力消失法

すでに述べたように平面ひずみ状態に対する熱応力消失条件(48)を満足する両材料の線膨張係数比は非常に小さい範囲に限られる。3・5節では、条件(48)を満足しない任意の線膨張係数をもつ場合の熱応力消失法を考える。

熱応力消失条件(48)は平面ひずみを保持するために必要な軸力による横ひずみが界面における熱ひずみの不適合を打消す条件を表している。したがって、任意の線膨張係数の組合せをもつ接合材に対しては、各材料に一樣な軸力 p_1, p_2 を作用させその大きさを界面における熱ひずみが等しくなる条件

$$\begin{aligned} \alpha_1 T - \frac{p_1}{E_1} \nu_1 &= \alpha_2 T - \frac{p_2}{E_2} \nu_2 \dots\dots\dots (52) \\ \alpha_1 T + \frac{p_1}{E_1} &= \alpha_2 T + \frac{p_2}{E_2} \end{aligned}$$

を満足するように決定すれば熱応力を消失させることができる。ここで温度 T は一樣であるとする。

また、帯板あるいは角柱が一端で接合され両端で一樣な引張り p を受ける場合一般に界面端で応力特異の生じることが知られている。この場合も両材料の一樣な温度上昇を T とすれば

$$\alpha_1 T - \frac{p}{E_1} \nu_1 = \alpha_2 T - \frac{p}{E_2} \nu_2 \dots\dots\dots (53)$$

を満足する T に対して特異性は消失する。

4. 結 論

接合膜をもつ半無限体表面が指定された温度で局部加熱されるとき熱応力問題を二次元熱弾性理論を用

いて解析し閉形解を得た。この解を用いて異材接合材の熱応力消失条件について考察した。主な結果は次のとおりである。

(1) 熱伝導率が異なるか否かにかかわらずその温度分布が直線的である場合には以下の(2), (3)に述べる条件を満足するときに熱応力は消失する。

(2) 平面応力および三次元応力状態の場合, 熱応力が消失するのは両材料の線膨張係数が等しいときのみに弾性定数には関係しない。

(3) 平面ひずみ状態のとき両材料の線膨張係数 α_i とポアソン比 ν_i の間に

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{1+\nu_1}{1+\nu_2}$$

なる関係があるとき熱応力は消失する。

(4) 以上の熱応力消失条件の物理的意味は界面におけるひずみの適合条件を表しており, この性質を用いると温度と外力負荷を組合せて熱応力あるいは界面端における応力特異性を消失させることができ, その方法を示しておいた。

文 献

- (1) 竹内, 熱応力, (1971), 57, 日新出版.
- (2) 山田・大石, 機論, **60**-573, A (1994), 1255.
- (3) Weeks, R., ほか2名, *Int. J. Eng. Sci.*, **6** (1968), 365.
- (4) Erdelyi, A., *Tables of Integral Transforms*, **1** (1954), p. 14, p. 72.
- (5) 阿部・ほか2名, 弾性力学, (1991), 180, 朝倉書店.