スプリングヒンジ片持ばりの大たわみ変形解析*

大槻 敦 巳^{*1}, 安 井 強^{*2}Analysis of Large Deflections in Spring-Hinged Cantilever Beam
under Inclined Tip Load

Atsumi OHTSUKI and Tsuyoshi YASUI

A flexible cantilever beam subjected to a rotational load is commonly encountered in mechanical elements, for example, a flat spring under a spring limit test, a leaf spring in a vibrating conveyor or a paper machine, a jib (: boom) of a jib crane or a luffing crane, an arm of an industrial robot or a manipulator, and an aircraft wing. In such elastic elements, a large deflection is produced without exceeding the elastic limit of the materials. This property is of both analytical and technological interest. It is necessary to analyze the large deflection behavior to achieve high reliability of the structural components. The purpose of this report is to clarify the large deflection problem, namely elastica problem, of a cantilever beam. As an analytical example, an inclined concentrated load at the free end of a spring-hinged cantilever beam was solved in terms of elliptic integrals as well as by carrying out a large flexural-bending test. Experimental data agree very closely with the theoretical results.

Key Words: Elasticity, Bending, Nonlinear Problem, Geometrical Nonlinearity, Cantilever Beam, Large Deflection, Elastica Problem

1. は し が き

薄板ばねに関するばね限界値試験法(JIS H 3130)が片持ばりで実施されるように, 薄板ばねとしては一般に曲げ変形特性を利用することが多く, 支持方法も片持ちの形式が代表的である。また, 振動コンベアや抄紙機などの重量機械では板ばねが片持ばりとして用いられ, さらに引込みクレーンやタワークレーンに代表されるジブクレーンなどの大形構造物のブーム(ジブ)や産業用ロボットのアーム, マニプレータのアーム, 航空機の翼なども片持ばりとして負荷を受ける構造体になっている。

片持ばりの大たわみ変形については, 自由端に集中横荷重を受ける片持ばり^{(1)~(5)}や非線形計画法により片持ばり⁽⁶⁾などの例が解析され, そのほかにも, 最近では選点法を用いた車体サスペンションだ円リング⁽⁷⁾の解析やセル離散化法による軸, 横両荷重を受けるはり⁽⁸⁾の解析, さらにトラス構造体⁽⁹⁾に関する大変形の解析例がある。

ところで, 片持ばりに関しては, 通常固定端の剛性を無限大と仮定しているが, そのような理想的固定支持の実現はかなり難しく, はりをしっかりとクランプした状態を固定支持とみなしている。したがって実際には固定部位での局部的剛性低下が避けられず, 固定部位に傾斜(たわみ角)の存する弾性変形が生じることがある。一方, コンプライアント機構⁽¹⁰⁾などでは最初から構造的に低剛性弾性支持となっている場合もある。こうした構造形式の部材の大たわみ変形挙動の定性的, 定量的な解明は, 構造体の変形態様の把握や機器の精度向上を図るために必要であり, 工業的に重要な課題であると考えられる。

以上の観点から, 本論文は, 固定端をスプリングヒンジ支持した片持弾性ばりの自由端に斜め集中荷重を作用させた場合の大たわみ変形挙動について非線形解析するとともに大たわみ曲げ実験を行い, 理論計算と比較したものであり, 解析に際して理論の適用範囲を弾性領域と考え, はりは不伸長で Euler-Bernoulli の仮定が成り立つものとし, せん断変形については考慮しないこととした。

なお, すでに解析されている中心圧縮力を受ける真直ばりの大たわみ変形⁽¹¹⁾や座屈後変形⁽¹²⁾。さらに先端集中荷重を受ける片持ばりの大たわみ変形⁽³⁾につ

* 平成 5 年 11 月 20 日 九州・四国支部鹿児島地方講演会において講演, 原稿受付 平成 6 年 2 月 14 日。

*¹ 正員, 名城大学理工学部(〒468 名古屋市天白区塩釜口 1-501)。

*² 学生員, 名城大学大学院。

いての解析事例は、本解析理論の特別な場合に相当するものである。

2. 大たわみ変形の理論解析

図1に示すように、はり固定支持端をスプリングヒンジ支持(回転ばね定数 K)とした長さ L の片持ばりの支持端 A を座標原点とし、水平方向に距離 x 、鉛直方向にたわみ y をとり、たわみ角を θ で表す。

はりの弾性たわみ曲線に沿って円弧長さ s をとり、はりの曲率半径を R 、曲げモーメントを M で表せば、 R, M, s, x, y, θ の各量間に成り立つ厳密なたわみ関係式は、はりの縦弾性係数を E 、中立軸に関するはりの断面二次モーメントを I として

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R} = \frac{M}{EI} = -\frac{d\theta}{ds} \\ dy = ds \cdot \sin \theta, \quad dx = ds \cdot \cos \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

はり自由端 B に、鉛直方向傾斜角 α の斜め集中荷重 P を作用させたときの、支点 A における鉛直および水平方向反力 R_A, H_A 、すなわち

$$\left. \begin{aligned} R_A &= P \cdot \cos \alpha \\ H_A &= P \cdot \sin \alpha \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

より、任意水平距離 x に作用する曲げモーメント M は

$$\begin{aligned} M &= R_A \cdot x + H_A \cdot y - K \cdot \theta_A \\ &= P \cdot \cos \alpha \cdot x + P \cdot \sin \alpha \cdot y - K \cdot \theta_A \quad \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

大たわみ変形挙動の一般的特性の把握に便利のように、次のような無次元変数

$$\left. \begin{aligned} \zeta = \frac{s}{L}, \quad \xi = \frac{x}{L}, \quad \eta = \frac{y}{L}, \quad \rho = \frac{R}{L} \\ \lambda = \frac{PL^2}{EI}, \quad \gamma = \frac{KL}{EI} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

を導入すれば、たわみの基礎式は、式(1)、(3)、(4)より

$$\frac{d^2\theta}{d\zeta^2} + \lambda \cdot \cos(\theta - \alpha) = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

図1 斜め集中荷重を受けるスプリングヒンジ片持ばり

非線形微分方程式(5)について、自由端 B で曲げモーメントが零、言い換えれば曲率が零、すなわち $M|_{x=x_B}=0, (d\theta/d\zeta)|_{\theta=\theta_B}=0$ となる境界条件を考慮して積分すれば、最終的に次式(6)が導かれる。

$$\frac{d\theta}{d\zeta} = \pm \sqrt{2\lambda \cdot \{\sin(\theta_B - \alpha) - \sin(\theta - \alpha)\}} \quad \dots\dots\dots (6)$$

なお、式(6)右辺として、無次元円弧長さ ζ が増すにつれてたわみ角 θ が増加するため正符号を採用する。

微分方程式(6)の解析にあたり

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{1/\lambda} = \beta, \quad \sqrt{1 + \sin(\theta_B - \alpha)}/2 = k \\ 1 + \sin(\theta - \alpha) = 2k^2 \cdot \sin^2 \phi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

とおき、角度に関して変数変換を行えば

$$\frac{d\theta}{d\zeta} = \frac{2k}{\beta} \cos \phi \quad \dots\dots\dots (8)$$

さらに、微小量 $d\theta, d\zeta, d\xi, d\eta$ は

$$d\theta = \frac{2k \cdot \cos \phi}{\sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2 \phi}} d\phi \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$d\zeta = \frac{\beta}{\sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2 \phi}} d\phi \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\begin{aligned} d\xi = \beta \left[2k \cdot \cos \alpha \cdot \sin \phi + \sin \alpha \cdot \left\{ 2\sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2 \phi} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2 \phi}} \right\} \right] d\phi \quad \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\eta = \beta \left[2k \cdot \sin \alpha \cdot \sin \phi - \cos \alpha \cdot \left\{ 2\sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2 \phi} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2 \phi}} \right\} \right] d\phi \quad \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

したがって、式(10)を角度変数 $\phi_A \sim \phi$ (実角度 $\theta_A \sim \theta$ に対応)にわたって積分すれば、はりのたわみ曲線上任意点 x までの無次元円弧長さ ζ は次式(13)より求めることができる。

$$\zeta = \int_{\phi_A}^{\phi} d\zeta = \beta \{ F(k, \phi) - F(k, \phi_A) \} \quad \dots\dots\dots (13)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \phi &= \pm \text{Arcsin} \left\{ \sqrt{\frac{1 + \sin(\theta - \alpha)}{1 + \sin(\theta_B - \alpha)}} \right\}, \\ \left[\begin{aligned} +: & -\pi/2 \leq \theta - \alpha \leq \theta_B - \alpha, \quad 0 \leq \phi \leq \pi/2 \\ -: & -\pi - (\theta_B - \alpha) \leq \theta - \alpha \leq -\pi/2, \quad -\pi/2 \leq \phi \leq 0 \end{aligned} \right] \\ \phi_A &= \phi|_{\theta=\theta_A} \end{aligned}$$

同様に、たわみ曲線上任意点 x までの無次元水平距離 ξ は、式(11)より

$$\begin{aligned} \xi = \int_{\phi_A}^{\phi} d\xi = \beta \{ 2k \cdot \cos \alpha \cdot (\cos \phi_A - \cos \phi) \\ + \sin \alpha \cdot \Phi(\phi) \} \quad \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} \Phi(\phi) &= 2\{ E(k, \phi) - E(k, \phi_A) \} \\ &\quad - \{ F(k, \phi) - F(k, \phi_A) \} \end{aligned}$$

なお、式(13)、(14)における関数 $F(k, \phi)$ 、 $E(k, \phi)$ な

どは、それぞれ Legendre-Jacobi のだ円積分第一種、第二種を表す。

さらに、たわみ曲線上任意点 x における無次元たわみ η は、式(12)より

$$\eta = \int_{\phi_A}^{\phi} d\eta = \beta \{ 2k \cdot \sin \alpha \cdot (\cos \phi_A - \cos \phi) - \cos \alpha \cdot \Phi(\phi) \} \dots\dots\dots (15)$$

ところで、たわみ曲線の最大円弧長さ $s_{\max}$ は、はり全長 L に等しく、すなわち式(13)において $\phi = \phi_B$ ($\theta = \theta_B$ に対応)のとき、 $\xi_{\max} (= s_{\max}/L) = 1$ なることから、式(7)における無次元量 β は

$$\beta = \frac{1}{F(k, \phi_B) - F(k, \phi_A)} \quad [\phi_B = \pi/2] \dots\dots\dots (16)$$

さらに、荷重パラメータ $\lambda (= PL^2/EI)$ は、式(7)、(16)より

$$\lambda = 1/\beta^2 = \{F(k, \pi/2) - F(k, \phi_A)\}^2 \dots\dots\dots (17)$$

一方、任意水平距離 x (角度にして θ の位置に相当)に作用する曲げモーメント M は、つねに負値をとり、式(3)、(6)、(17)より

$$M = -PL \frac{\sqrt{2\{\sin(\theta_B - \alpha) - \sin(\theta - \alpha)\}}}{F(k, \pi/2) - F(k, \phi_A)} \dots\dots\dots (18)$$

したがって、モーメントの最大値 $M_{\max}$ (負値)は、はりの大たわみ変形状態によって異なり、 $\theta_A - \alpha \geq -\pi/2$ の場合には、 $\theta = \theta_A$ として

$$M_{\max} = -PL \frac{\sqrt{2\{\sin(\theta_B - \alpha) - \sin(\theta_A - \alpha)\}}}{F(k, \pi/2) - F(k, \phi_A)} \dots\dots\dots (19)$$

で表され、ヒンジ支点 A において最大となり、 $\theta_A - \alpha < -\pi/2$ の変形に対しては、 $\theta - \alpha = -\pi/2$ になるたわみ曲線上の位置で最大を示す。すなわち

$$M_{\max} = -PL \frac{\sqrt{2\{\sin(\theta_B - \alpha) + 1\}}}{F(k, \pi/2) - F(k, \phi_A)} \dots\dots\dots (20)$$

また、自由端 B までの無次元水平距離 $\xi_B (= \xi|_{\phi=\phi_B})$ は、式(14)、(16)より

$$\xi_B = \frac{2k \cdot \cos \alpha \cdot \cos \phi_A + \sin \alpha \cdot \Phi(\pi/2)}{F(k, \pi/2) - F(k, \phi_A)} \dots\dots\dots (21)$$

ただし、

$$\Phi(\pi/2) = 2\{E(k, \pi/2) - E(k, \phi_A)\} - \{F(k, \pi/2) - F(k, \phi_A)\}$$

さらに、自由端 B における無次元最大たわみ $\eta_B (= \eta|_{\phi=\phi_B})$ は、式(15)、(16)より

$$\eta_B = \frac{2k \cdot \sin \alpha \cdot \cos \phi_A - \cos \alpha \cdot \Phi(\pi/2)}{F(k, \pi/2) - F(k, \phi_A)} \dots\dots\dots (22)$$

一方、たわみ曲線上任意位置 x (θ の角度位置に対応)における無次元曲率 $1/\rho$ は、式(1)、(4)、(6)より

$$\frac{1}{\rho} = -\{F(k, \pi/2) - F(k, \phi_A)\}$$

$$\times \sqrt{2\{\sin(\theta_B - \alpha) - \sin(\theta - \alpha)\}} \dots\dots\dots (23)$$

また、任意位置 x におけるはり表面曲げ応力 σ は、はりの中立軸から最外面までの距離を e として

$$\sigma = -\left(\frac{Ee}{L}\right)\{F(k, \pi/2) - F(k, \phi_A)\} \times \sqrt{2\{\sin(\theta_B - \alpha) - \sin(\theta - \alpha)\}} \dots\dots\dots (24)$$

なお、角度変数 ϕ_A と $\phi_B (= \pi/2)$ の関係(言い換えれば実角度 θ_A と θ_B の関係)については、スプリングヒンジ支点 A における抵抗曲げモーメント M_A が $M_A = -K \cdot \theta_A$ 、すなわち $(d\theta/d\xi)|_{\theta=\theta_A} = \gamma \cdot \theta_A$ なる条件を考慮すれば、式(8)、(16)より次式(25)が導かれる。

$$2k \cdot \cos \phi_A \cdot \{F(k, \pi/2) - F(k, \phi_A)\} = \gamma \cdot \theta_A \dots\dots\dots (25)$$

ところで、以上の解析理論は後述の図4に例示した、状態①に相当する大たわみ変形状態を想定したものであるが、変形としては、荷重パラメータ (λ) に拠り、別種の大たわみ変形状態②、③などが出現することが考えられる。その場合には、新たな大たわみ変形理論式を誘導する必要があり、無次元円弧長さ ξ に関しては最終的に、次式(26)が導かれる。

$$\xi = -\beta\{F(k, \phi) - F(k, \phi_A)\} \dots\dots\dots (26)$$

ここで、

$$\phi = \pm \text{Arcsin} \left\{ \sqrt{\frac{1 + \sin(\theta - \alpha)}{1 + \sin(\theta_B - \alpha)}} \right\},$$

$$\left[\begin{array}{l} + : -\pi/2 \leq \theta - \alpha \leq -\pi - (\theta_B - \alpha), \quad 0 \leq \phi \leq \pi/2 \\ - : \theta_B - \alpha \leq \theta - \alpha \leq -\pi/2, \quad -\pi/2 \leq \phi \leq 0 \end{array} \right]$$

$$\phi_A = \phi|_{\theta=\theta_A}$$

また、無次元水平距離 ξ については

$$\xi = -\beta\{2k \cdot \cos \alpha \cdot (\cos \phi_A - \cos \phi) + \sin \alpha \cdot \Phi(\phi)\} \dots\dots\dots (27)$$

ここで、

$$\Phi(\phi) = 2\{E(k, \phi) - E(k, \phi_A)\} - \{F(k, \phi) - F(k, \phi_A)\}$$

さらに、無次元たわみ η については

$$\eta = -\beta\{2k \cdot \sin \alpha \cdot (\cos \phi_A - \cos \phi) - \cos \alpha \cdot \Phi(\phi)\} \dots\dots\dots (28)$$

なお、最大円弧長さ $s_{\max}$ とはり全長 L が等しいことから、無次元量 β は

$$\beta = -\frac{1}{F(k, \phi_B) - F(k, \phi_A)} \quad [\phi_B = -\pi/2] \dots\dots\dots (29)$$

また、荷重パラメータ λ は

$$\lambda = \{F(k, -\pi/2) - F(k, \phi_A)\}^2 \dots\dots\dots (30)$$

任意水平距離 x (角度にして θ の位置)に作用する曲げモーメント M は、つねに正値を示し

$$M = -PL \frac{\sqrt{2\{\sin(\theta_B - \alpha) - \sin(\theta - \alpha)\}}}{F(k, -\pi/2) - F(k, \phi_A)} \quad \dots\dots\dots (31)$$

したがって、モーメントの最大値 $M_{\max}$ (正值) は、はりの大たわみ変形状態によって異なり、 $\theta_A - \alpha \leq -\pi/2$ の場合には、ヒンジ支点 A において最大となり

$$M_{\max} = -PL \frac{\sqrt{2\{\sin(\theta_B - \alpha) - \sin(\theta_A - \alpha)\}}}{F(k, -\pi/2) - F(k, \phi_A)} \quad \dots\dots\dots (32)$$

一方、 $\theta_A - \alpha > -\pi/2$ の変形に対しては、 $\theta - \alpha = -\pi/2$ となるたわみ曲線上の位置で最大、すなわち

$$M_{\max} = -PL \frac{\sqrt{2\{\sin(\theta_B - \alpha) + 1\}}}{F(k, -\pi/2) - F(k, \phi_A)} \quad \dots\dots (33)$$

自由端 B までの無次元水平距離 $\xi_B (= \xi|_{\phi=\phi_B})$ は

$$\xi_B = \frac{2k \cdot \cos \alpha \cdot \cos \phi_A + \sin \alpha \cdot \Phi(-\pi/2)}{F(k, -\pi/2) - F(k, \phi_A)} \quad \dots\dots\dots (34)$$

ただし、

$$\Phi(-\pi/2) = 2\{E(k, -\pi/2) - E(k, \phi_A)\} - \{F(k, -\pi/2) - F(k, \phi_A)\}$$

さらに、自由端 B における無次元最大たわみ $\eta_B (= \eta|_{\phi=\phi_B})$ は

$$\eta_B = \frac{2k \cdot \sin \alpha \cdot \cos \phi_A - \cos \alpha \cdot \Phi(-\pi/2)}{F(k, -\pi/2) - F(k, \phi_A)} \quad \dots\dots\dots (35)$$

一方、たわみ曲線上任意位置 x (θ の角度位置に対応) における無次元曲率 $1/\rho$ は

$$\frac{1}{\rho} = -\{F(k, -\pi/2) - F(k, \phi_A)\} \times \sqrt{2\{\sin(\theta_B - \alpha) - \sin(\theta - \alpha)\}} \quad \dots\dots\dots (36)$$

また、任意位置 x におけるはり表面曲げ応力 σ は

$$\sigma = -\left(\frac{Ee}{L}\right)\{F(k, -\pi/2) - F(k, \phi_A)\} \times \sqrt{2\{\sin(\theta_B - \alpha) - \sin(\theta - \alpha)\}} \quad \dots\dots\dots (37)$$

なお、角度変数 ϕ_A と $\phi_B (= -\pi/2)$ の関係(言い換えれば実角度 θ_A と θ_B の関係)は

$$2k \cdot \cos \phi_A \cdot \{F(k, -\pi/2) - F(k, \phi_A)\} = \gamma \cdot \theta_A \quad \dots\dots\dots (38)$$

ところで、片持ばりの大たわみ変形としては、さらに複雑な、すなわちたわみ曲線の中途に変曲点を有するような大たわみ変形状態も思量できるが、ここでは省略することとする。また、付言するならば、中心圧縮力を受ける真直ばりの大たわみ変形⁽¹¹⁾ や座屈後変形⁽¹²⁾ についての既解析例は本解析理論の特別な場合、すなわち回転ばね定数 $K = \infty$ 、荷重傾斜角 $\alpha = \pi/2$ の解析に相当し、一方、先端集中荷重を受ける片持ばりの大たわみ変形⁽³⁾ の既解析例については、 $K = \infty$ 、 $\alpha = 0$ の解析に相当するといえる。

図 2 大たわみ曲げ実験装置、実験方法の概略

3. 理論計算および実験例

導出した片持ばり大たわみ理論の適用性確認のため、塩化ビニル(PVC)薄板はり(長さ 100 mm, 幅 5.7 mm, 厚さ 0.7 mm, 縦弾性係数 $E=2.78$ GPa)を用い、はり自由端に斜め集中荷重を作用させる大たわみ曲げ実験を行った。なお、スプリングヒンジ支持条件に該当するように、回転可能支点($\phi 4$ mm の細径円柱)に設置の滑車を介して引張コイルばねを取付けて回転剛性(すなわち、回転ばね定数 $K=157$ N・mm/rad)を付与することとした。また、斜め集中荷重 P を負荷するために、本実験では、水平位置に対して集中荷重傾斜角 α だけあらかじめ上方に傾けて保持したはりの自由端に荷重を吊下する方法を採用した。実験装置の概略を図 2 に示す。

実験では、荷重傾斜角 α とした所定の斜め集中荷重 P に対して、自由端 B の水平距離 x_B 、たわみ y_B および自由端 B におけるたわみ角 θ_B については実験装置側面に貼付した方眼紙(1 mm 間隔目盛)を利用し、また固定端 A(スプリングヒンジ支点)におけるたわみ角 θ_A については円分度器(1° 間隔目盛)を用いて測定した。なお、計測には数値的な読取りやすさを考慮して、実験装置の水平側面方向に配慮した読取望遠鏡を利用した。

図 3 は、荷重傾斜角 $\alpha=\pi/4$ の斜め集中荷重の例について、各種のばね定数パラメータ γ に対する荷重パラメータ λ と自由端たわみ角 θ_B の関係を図示したもので、 θ_B が正值の範囲においては、 λ が増すにつれ θ_B は急激な増加を示し、最終的には荷重 P が作用する α

図 3 荷重パラメータ λ と自由端たわみ角 θ_B の関係 ($\alpha=\pi/4$ の場合)

$+\pi/2$ [rad] ($=135^\circ$) の方向に漸近する傾向となる。この急激な増加傾向は γ が小、すなわち回転ばね定数 K が小なるほど顕著で、これは固定端 A の耐負荷モーメント能力が低下し、回転しやすくなることを示している。ところで、同一傾斜角 α の荷重負荷であるにもかかわらず特定の λ 以上 ($\gamma=34.69$ で $\alpha=\pi/4$ の場合には $\lambda=5.61$ 以上) になると、例えば変形状態 (d) -①に対して状態 (d) -②あるいは③のように、 θ_B を大きく異にする別種の変形状態(このとき θ_B は負値の範囲)がありうることは興味深いことで、 λ の増加とともに一方は $\lambda=10.67$, $\theta_B=-90^\circ$ を究極点(点 U)とし、他方は $\alpha-3\pi/2$ [rad] ($=-225^\circ$) に収束する、左方に凸なる変化傾向を示すことがわかる。なお、こうした異種変形は飛移り現象のように不安定に相互変移することはない。また、 $\gamma=34.69$ ($K=157$ N・mm/rad に相当) の場合について併記した大たわみ実験結果は解析理論とかなりよい一致を示しているが、変形状態 (f) 以降の変形については PVC 薄板はりに塑性変形のおそれが生じたため、大たわみ実験は状態 (f) までにとどめている。なお、直線の変化を示す従来の線形曲げ理論に基づく $\theta_B-\lambda$ の関係は

$$\theta_B = \lambda(1/2 + 1/\gamma) \cos \alpha \quad (\theta_B: \text{rad}) \quad \cdots \cdots (39)$$

図 4 荷重パラメータ λ の相違による大たわみの各変形状態例 ($\gamma=34.69$, $\alpha=\pi/4$ の場合) [変形状態 (a) ~ (f) の記号は図 3, 5, 6, 7 に標記の同記号に対応]

で表されるが、その適用は θ_B が正值を示す変形範囲に限られ、しかも 40° 程度に制限されることがわかる。

図4は、斜め集中荷重 P の各負荷段階における大たわみ変形の態様(表示例は、 $\gamma=34.69$, $\alpha=\pi/4$ の場合)について、そのいくつかを代表例示したもので、変形状態(a)~(f)の各記号は図3および図5, 6, 7に標記の同記号に対応する。特に、状態②あるいは③に示すような大たわみ変形について、負荷条件による生滅様子が視覚的にわかる。

図5は、 $\alpha=\pi/4$ の斜め集中荷重における各種 γ に対する荷重パラメータ λ と固定端たわみ角 θ_A の関係を表したもので、 θ_A が正值の範囲では、 $\gamma=\infty$ の場合たわみ角が存在しない(つねに $\theta_A=0$)が、有限の γ については γ が小さいほど θ_A が大きく、すなわち固定端が回転しやすくなること、しかも λ が増すにつれ θ_A が緩やかな増加傾向を示すことがわかる。また、固

図5 荷重パラメータ λ と固定支持端たわみ角 θ_A の関係($\alpha=\pi/4$ の場合)

図6 荷重パラメータ λ と無次元水平距離 ξ_B の関係($\alpha=\pi/4$ の場合)

定端がスプリングヒンジ支点であることの影響は、 θ_B より θ_A のほうが強く現れることがわかる。一方、 θ_A が負値となる変形範囲では図3と同様に、究極点 U ($\lambda=10.67$, $\theta_A=0$) を通る左方に凸の変化傾向を示す。なお、本図においても、併記した大たわみ実験結果と解析理論との一致性は良好である。ところで、直線的变化を示す従来の線形曲げ理論に基づく θ_A - λ の関係は

$$\theta_A = (\lambda/\gamma) \cos \alpha \quad (\theta_A: \text{rad}) \quad \cdots \cdots \cdots (40)$$

で表されるが、その適用範囲は θ_A が正值を示す、おおむね 10° 程度の変形に限定されることがわかる。

図6には、 $\alpha=\pi/4$ の斜め集中荷重について、各種 γ に対する荷重パラメータ λ と自由端Bの無次元水平距離 ξ_B (すなわち支点A, Bの接近度合) の関係を示した。この量は従来の線形曲げ理論では定義できず、大たわみ理論によってはじめて評価可能となり、したがって線形理論との直接比較はできないが、大略、 λ の増加に対して初期状態の1から急激に減少する傾向となる場合と究極点 U ($\lambda=10.67$, $\xi_B=0.60$) を通る左方に凸となる、異種変形に対応した変化傾向を示す場合とがあることがわかる。なお、本図においても、併記した大たわみ実験結果は解析理論によく一致している。

さらに図7は、 $\alpha=\pi/4$ の斜め集中荷重について、各種 γ に対する荷重パラメータ λ と自由端Bの無次元たわみ η_B の関係を図示したもので、線形理論の直線的变化に対して、 λ が増すに従い η_B が急激に増加しつつ最大値 $(\eta_B)_{\max}$ ($\gamma=\infty$ に対し $\lambda=7.32$ のとき $(\eta_B)_{\max}=0.84$, $\gamma=5.00$ に対し $\lambda=4.54$ のとき $(\eta_B)_{\max}=0.93$, $\gamma=34.69$ に対し $\lambda=6.85$ のとき $(\eta_B)_{\max}=0.86$) をとる。上方に凸の曲線状変化傾向と、異種変形に対応した、すなわち究極点 U ($\lambda=10.67$, $\eta_B=-0.60$) を

図7 荷重パラメータ λ と無次元たわみ η_B の関係($\alpha=\pi/4$ の場合)

通る左方に凸の変化傾向を示す場合とがあることがわかる。ところで、本図においても、併記した大たわみ実験結果と解析理論の一致性は良好である。なお、直線的变化を示す従来の線形曲げ理論に基づく η_B - λ の関係は

$$\eta_B = \lambda(1/3 + 1/\gamma) \cos \alpha \cdots \cdots (41)$$

で表されるが、その適用は η_B が正值を示す。おおむね 0.8 程度の変形範囲に限られることがわかる。

4. む す び

各種の機械要素や機械構造物において、負荷の形態が片持ばりとなることが多い。こうした片持ばりにおける曲げ変形の解析は工業的にも重要であると考え、本論文では、スプリングヒンジ支持の片持弾性ばりの自由端に斜め集中荷重が作用する場合の大たわみ曲げ変形挙動について非線形解析したもので、円弧長さやたわみ、水平距離、曲率、曲げモーメント、曲げ応力など代表的な変形諸量に対してだ円積分を用いた解析解を与えた。さらに、解析理論の適用性確認のため PVC 薄板ばりを用いた大たわみ曲げ実験を行い、理論計算と比較した。

以上の理論的、実験的解析の結果、次の諸点が明らかになった。

(1) 同一の斜め荷重 P に対して、特定の荷重を超えた場合には質的、量的(水平距離 x_B については当てはまらない場合があるが)に大きく異なる、別種の大たわみ変形状態がありうる。すなわち変形量に多値性が存在する。こうした変形挙動は従来の微小変形線形曲げ理論では予測できないものである。

(2) 自由端たわみ角 θ_B は、荷重 P が大きくなるとともに一定値に収斂する。

(3) スプリングヒンジ支点たわみ角 θ_A 、自由端たわみ角 θ_B 、自由端水平距離 x_B 、自由端たわみ y_B などの実験結果は理論解析とかなりよい一致を示した。

(4) 固定端の剛性の影響について、たわみ角に関していえば、固定端たわみ角 θ_A のほうが自由端たわみ角 θ_B より強く現れる。

(5) 従来の線形曲げ理論の適用は、水平距離 x_B の変化を無視した、特定のたわみ変形状態におけるたわみ角 θ_A や θ_B 、たわみ y_B などの推定(いずれも正值の範囲)に限定されるもので、特に、自由端水平距離 x_B の量的変化については大たわみ理論によって初めて評価が可能となる。

文 献

- (1) 梶原, 機誌, 41-255(1938), 585.
- (2) Barten, H. J., *Q. Appl. Math.*, 2-2(1944), 168.
- (3) Bisshopp, K. E. and Drucker, D. C., *Q. Appl. Math.*, 3-3(1945), 272.
- (4) Tada, Y. and Lee, G. C., *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 2-2(1970), 229.
- (5) 小林, 機論, 29-197(1963), 96.
- (6) 大滝・岸田, 機講論, No. 710-91, B(1991-11), 404.
- (7) 赤坂・ほか2名, 機講論, No. 910-62, A(1991-10), 182.
- (8) Auciello, N. M. and Ercolano, A., *Comput. & Struct.*, 44-4(1992), 863.
- (9) 安藤・平岡, 機講論, No. 920-72(1992-9), 201.
- (10) Kinzel, G. L., 編, *Flexible Mechanism, Dynamics, and Analysis*, DE-47(ASME) (1992), 243.
- (11) 原田, 工学における応力と変形の解析的方法, (1971), 330, 産報.
- (12) Timoshenko, S. P. and Gere, J. M., *Theory of Elastic Stability*, (1961), 76, McGRAW-HILL.