境界輪体と遺伝的アルゴリズムによるラーメン構造の
トポロジー最適化*中西 康彦^{*1}, 中 桐 滋^{*2}Optimization of Frame Topology Using Boundary Cycle
and Genetic Algorithm

Yasuhiko NAKANISHI and Shigeru NAKAGIRI

This paper deals with topological optimization of elastic frames by means of the boundary cycle used in the algebraic topology and genetic algorithm. The optimum frame is so defined in this study that the deformation of an interesting point of the frame is minimal for a given limit of weight, and that any members with a tip not connected to other members, except loading points, are eliminated. The optimum topology is searched efficiently through the boundary cycle which yields the one-dimensional simplicial complex without any tip, satisfying the topological condition of no idle tip present. The boundary cycle is derived from the chain and boundary homomorphism which plays an important role of decoding of the genotype into the phenotype in the genetic algorithm, and is included in the string used in the genetic algorithm for the representation of frame topology. The numerical examples are concerned with minimization of the deformation of two-dimensional frames subject to bending, and three-dimensional frames subject to torsion or expansion.

Key Words: Optimum Design, Computational Mechanics, Topology, Boundary Cycle, Genetic Algorithm

1 緒 言

構造最適化は、一つの分類法として、幾何学的形状の最適化、寸法の最適化、およびトポロジーの最適化に分類することができる。トポロジーを含む最適化は、近年では多種多様の手法が提案されているが^{(1),(2)}、形状または寸法の最適化に比して後発であり、普遍性のある一般的な手法は確立されたとは未だ言い難い様である。

本報では境界輪体による 2 次元および 3 次元ラーメン構造のトポロジー最適化手法を提案する。本手法の特徴は、普遍性と拡張性を有することを目指として、代数的トポロジーに基づいた定式化を行なう点にある。ラーメン構造では、一端点(ただし、着力点を除く)が他の部材に連結されていない部材は荷重の伝達には寄与しない。部材端で他の部材に連結されていない点を以後端点と呼ぶ。端点を有する部材は重量軽減の観点から無駄であり、端点が存在しないことは重量を最小とするラーメン構造のトポロジーの必要条件となる。したがって、重量最小または変形最小の構造は端点のないトポロジーを有する候補構造から探索するのが合理的である。この

図1 2次元ラーメン構造の設計領域

候補構造の生成に境界輪体⁽³⁾を用いる。代数的トポロジーにおいて境界 1-輪体は端点を持たない 1 次元複体であり、前記の必要条件を満たしている。著者等は図形問題の例で境界輪体の有用性を確認した⁽⁴⁾。本報ではトポロジー最適化において、境界 1-輪体によりラーメン構造のトポロジーを整数の組合せで表現し、次いで最適な組合せを遺伝的アルゴリズム

* 原稿受付 平成 6 年 2 月 25 日。

^{*1} 正員, 東京大学大学院。^{*2} 正員, 東京大学生産技術研究所 (〒106 東京都港区六本木 7-22-1)。

図2 3次元ラーメン構造に対する立方体フレーム

ム (genetic algorithm, 以降 G A と呼ぶ) により探索する手法を提案する。数値計算例は 2 次元および 3 次元のラーメン構造である。微小変形・弾性理論の枠内でのラーメン構造解析は有限要素法により行なう。

2 問題の設定

2 次元および 3 次元ラーメン構造のトポロジー最適化を行なう。2 次元の場合は図 1 に示す左端の剛体壁から 1 m 離れた一点に作用する 98.1 N の荷重を支える重量一定の鋼製ラーメン構造の内、荷重作用点 A の変形が最小の構造を求める。部材配置は 1 m × 1 m 四方の領域内部の図示の実線から選ぶものとする。また、図中の格子点を節点と呼ぶ。

3 次元ラーメン構造の最適化では図 2 に示す鋼製立方体フレームの内部空間に総重量を一定とする部材を配置し、荷重作用点 A, B, C, D の変形の合計量が最小の構造を探索する。部材配置は図 3 に図示する立方体内部の実線から選ぶ。本研究での最適構造とは重量一定で変形最小の構造を指す。

各部材の断面積を一定としない設計もあるが、本報では問題を単純化して、2 次元と 3 次元のいずれの場合も全部材は同一直径で円形断面を有するものとする。すなわちトポロジー最適化のみを目指し、寸法最適化は取扱わない。さらに荷重作用点が枝状に伸びた部材の端点となる最適構造の得られる可能性もあるが、本報では荷重作用点を含めて端点を持たない構造のみを探索の対象とする。

3 トポロジーの整数表現と G A による探索

3.1 境界輪体とトポロジーの表現 端点のある部材、すなわち荷重の伝達と剛性の維持に寄与しない部材、を有するラーメン構造を最適構造の探索対象から排除するために、候補構造の生成に境界輪体を利用する。境界輪体による 2 次

図3 立方体フレーム内部で部材の取り得る配置

元のトポロジー表現は既報⁽⁴⁾で記述したが、3 次元のトポロジー表現もあるので本節で境界輪体によるトポロジー表現⁽³⁾について略記する。端点を持たない 1 次元複体である境界輪体を用いるとラーメン構造のトポロジーが整数の組合せで以下のように表現される。

独立な点 a_i を頂点とする r -単体を

$$x^r = (a_0, a_1, \dots, a_r) \quad (1)$$

と表す。次の 3 条件を満たす単体の合体は単体的複体と呼ばれ、本報では K と表すこととする。

1. K の任意単体の任意面は K に属す。
2. K の 2 つの単体の交わりは各単体の面である。
3. K の各単体について、それを面とする K の単体個数は有限である (局所有限性)。

単体的複体 K に属する m 個の r -単体に整数係数 t^i を乗じて代数和を取ったものは r -鎖と呼ばれ、

$$c^r = t^1 x_1^r + t^2 x_2^r + \dots + t^m x_m^r \quad (2)$$

と表される。境界作用素 ∂_r を r -単体 x^r に作用させると、

$$\partial_r x^r = \sum_{i=0}^r (-1)^i (a_0, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_r) \quad (3)$$

となる。ここで、 $\hat{a}_i$ は a_i が欠如していることを示す。また、境界作用素 ∂_r を r -鎖に作用させると式 (4) で表される境界 $(r-1)$ -輪体

$$\partial_r c^r = t^1 \partial_r x_1^r + t^2 \partial_r x_2^r + \dots + t^m \partial_r x_m^r \quad (4)$$

が得られる。境界作用素は、「へりのへりは存在しない」ことを表す $\partial_{r-1} \circ \partial_r = \{0\}$ という性質を有し、境界 1-輪体は端点を持たない 1 次元複体であることを意味している。式 (4) より判るように、ある r 次元の単体的複体が与えられたとき、

図4 2次元ラーメンの最適構造 (制約方法 A)

境界 $(r-1)$ -輪体は整係数 t^i により決定される。これは、端点を持たないラーメン構造のトポロジーは整係数 t^i の指定により生成されることを意味する。したがって、ラーメン構造のトポロジー最適化は、整係数 t^i を設計変数とし、この設計変数空間の中で整係数の最適の組合せを探索することに帰着される。

2次元の場合では、図1に示すような三角形の2-単体からなる2次元複体を用いる。各2-単体に整係数を割り当て2-鎖を作り、さらに境界作用素 ∂_2 を作用させることにより、境界1-輪体を発生させる。図1の例では、荷重作用点が剛体壁に必ず連結されるように非零の整係数を図中の灰色の単体に割り当てる。

3次元の場合では、図2の立方体フレームの内部を四面体の3-単体で分割し、3次元複体を作る。2次元の場合と同様に各3-単体に整係数を割り当て、境界作用素 ∂_3 により境界2-輪体を得る。境界2-輪体の各2-単体に対応する整係数の絶対値を1に置換し、さらに境界作用素 ∂_2 を作用させて境界1-輪体を作る方法をとる。

3.2 Genetic Algorithm 整係数 t^i の張る設計変数空間は一般に非常に広いので、大規模な組合せ問題に有効な探索手法に依らなければ整係数の最適の組合せ(以後 最適解と呼ぶ)を探索し難いので、本報では最適解探索にGA⁽⁵⁾を用いる。また、最適解に対応する構造を最適構造と言う。

GAによる探索では整係数 t^i を遺伝子として染色体 $t^1 t^2 \dots t^m$ を形成する。GAの立場から見れば境界作用素は遺伝子型から表現型へのデコードの定義であると云える。 N 個の荷重作用点の x, y, z 方向変位 u_i, v_i, w_i から各染色体に対する評価値 F を

$$F = - \sum_{i=1}^N \sqrt{u_i^2 + v_i^2 + w_i^2} \quad (5)$$

として算出する。2次元の場合は $w_i = 0$ とする。剛性が高

図5 2次元ラーメンの最適構造 (制約方法 B, 20 %)

図6 2次元ラーメンの最適構造 (制約方法 B, 40 %)

く、変形量が小さいと評価値は代数的に大きい。GAによる最適解探索では、有限要素解析から得られる評価値に基づいてエリート保存戦略の下でランキングによる淘汰を行なう。

重量一定の制約条件は以下の制約方法Aにより課す。一方、本問題では端点を有する部材を存在させず、また節点位置を固定しているので、図1から判るように様に部材全長は離散量である。そこで、参考のため2次元の場合において重量を所定値以下に抑える制約方法Bによる制約も検討する。

制約方法A: 所定の総重量 W および比重 ρ に対して部材の全長 L から部材の断面直径 $d = 2\sqrt{W/\pi\rho L}$ を定める。

制約方法B: 部材断面直径を定数 ($d = 30 \text{ mm}$) とする。重量を所定値以下にするために全長 L に所定の上限値 U を設ける。染色体により定められる構造の全長が上限値を越えると評価値を強制的に十分低い一定値 $-C$ から更に超過分を差し引いた値 $F = -C - (L - U)$ に変更する。

表 1 GA のパラメータの値と変形の合計量 (3 次元ラーメン構造)

figure	load ($\times 4$)	string	feature value	crossover	length of string	mutation	3- simplex	sum of displacements
Fig. 8	138.6 N	860	-2,-1,1,2	2-point	96	0.5 %	384	0.154×10^{-1} mm
Fig. 13	138.6 N	860	-1,1	2-point	96	0.5 %	384	0.116×10^{-2} mm
Fig. 14	169.7 N	280	-3,-2,-1,1,2,3	simple	24	1.0 %	48	0.334×10^{-2} mm

図 7 2 次元ラーメンの最適構造 (制約方法 B, 60 %)

図 8 立方体上面にねじりを受けるラーメン構造

4 数値計算例

本報の数値計算例は全て染色体の初期値を変えて 5, 6 回 GA を試行した中での最良の解を示すものであり, それが変形量を最小とする保証はない. しかし, 本報では GA の試行で得られた最良の解をあえて最適解と呼ぶ. 真の最適解であるか否かが保証されない GA の短所を少しでも補うため, エリートの評価値が 20 世代以上変化しない場合は最良優先探索⁽⁶⁾に切替える方法をとった. 材料のヤング率は 202 GPa, 比重は 7.83 とする.

4.1 2 次元ラーメン構造のトポロジー最適化 本例では, 2 単体数を 144, 染色体数 (人口サイズ) を 434, 交叉を 2 点交叉, 突然変異の確率を全遺伝子座に対して 1.0 %, 荷重を 98.1 N とした. また荷重作用点から剛体壁に下した垂線に関して対称な構造のみを探索対象とし, 染色体の長さを 72 (2-単体数の半分) に設定した.

図 4 は総重量 $W = 39.2$ kg のとき, 制約方法 A により得られた最適構造で, 荷重作用点の変形は 0.104×10^{-2} mm である. この例では断面直径は $d = 22.7$ mm となる.

図 5, 6, 7 は制約方法 B ($d = 30$ mm) により得られた最適構造を示す. 部材全長の上限値 U は図 1 の実線の全長 (31.0 m) に対する割合によりそれぞれ 20 % (重量では 34.3 kg), 40 % (68.6 kg), 60 % (102.9 kg) と設定する. 図 5, 6, 7 に示す

(unit; J/m³)
図 9 全ひずみエネルギー密度分布 (第 1 世代)

構造全長の計算結果は, 上限値 U 以下であり, 31.0 m に対する割合で示すとそれぞれ 19.6 %, 39.7 %, 59.9 % となっている. 荷重作用点の変形はそれぞれ 0.290×10^{-2} , 0.739×10^{-3} , 0.477×10^{-3} mm であった. また図 4 (制約方法 A) の部材全長は本例での割合で示すと 39.9 % に相当し, 図 6 の例とほぼ同じ長さであった. *

いずれの場合も, 剛体壁付近の中央部ならびに設計領域右端の上隅部と下隅部の 1- 単体は使用されない傾向にある.

図10 全ひずみエネルギー密度分布 (第8世代)

図11 全ひずみエネルギー密度分布 (第151世代)

図12 評価値 F (上段), 構造全体の全ひずみエネルギー (中段) および曲げひずみエネルギーの占める割合 (下段) の変化

4.2 3次元ラーメン構造のトポロジー最適化 総重量 $W = 78.3 \text{ kg}$ の3次元ラーメン構造の最適化を制約方法 A により行う。GA に用いるパラメータと計算結果は表 1 に示す。

図8は、図中の矢印で示すねじり荷重を立方体上面に負荷した場合に得られた最適構造である。この例では立方体内部の

部材は除外されて、側面の斜材のみが残る。整係数は負荷と形状の対称性を考慮して図2の立方体領域の1/4部分の3-単体のみに割り当てた。図9は第1世代におけるエリートのラーメン構造とその内部の全ひずみエネルギー密度の分布を示す。立方体側面の斜材における全ひずみエネルギー密度が、立方体内部の部材に比較して非常に高いことから内部の部材が

図13 立方体上面に引張を受けるラーメン構造

構造の剛性に余り寄与していないことが判る。また、部材断面直径は 10.5 mm である。

図10は第8世代のエリートラーメン構造であり、部材断面直径は 12.4 mm である。図9に比べて、立方体内部の部材本数は減少し、全ひずみエネルギー密度の差も小さくなっている。図11は第151世代のエリートで、これが最適構造となる。部材断面直径は図9の約2倍の 19.2 mm である。立方体フレームを除く部材において、全ひずみエネルギー密度はほぼ一様となっている。

図12に評価値 F (上段)、構造全体の全ひずみエネルギー (中段) および曲げひずみエネルギーの占める割合 (下段) の世代数に対する変化を示す。図より評価値 F の絶対値は全ひずみエネルギーとほぼ対応して減少していること、曲げひずみエネルギーの占める割合は単調ではないが全体として減少の傾向にあり、その値は極めて小さいこと、最適構造は曲げよりも軸力で荷重を負担していることがわかる。

図13は、図中の矢印で示す引張荷重を立方体上面に等方的に作用させた場合の最適構造である。この例では、立方体上面のみに部材が配置されることになる。

図14は図13の荷重に Z 方向 (図中の上下方向) 成分も加えた場合の最適構造である。立方体底面を除く全側面に部材が配置されている。ただし、図14の例は、図8と13の例とは荷重の対称性が異なるので、立方体の $1/2$ 領域の単体に整係数を割り当てねばならない。したがって3-単体数を図8と13の例の 384 より少なく 48 に設定した。

5 結 論

境界 1- 輪体によりラーメン構造のトポロジーを整数の組合せとして表現し、GA により最適解を探索する手法を提案

図14 上下方向にも荷重を受けるラーメン構造

した。また2次元と3次元のラーメン構造のトポロジー最適化に適用し、二、三の荷重条件下での最適解を得た。

端点を持たない1次元複体というトポロジー制約を境界 1- 輪体を用いて常に満たすことにより、GA において不適切な構造、すなわち重量増加のみで荷重伝達に寄与しない部材を有する構造、の発生を防ぎ、探索を効率的に行なうことが可能となった。曲げを受ける2次元ラーメン構造のトポロジー最適化では部材は剛体壁側の中央部および荷重作用点近傍の隅部に少なく、上下端に多く配置される傾向が見られた。一方、3次元ラーメン構造では曲げよりも軸力で荷重を負担するように部材が配置されるとの結果が得られた。

境界 1- 輪体の各単体に割り当てられた整係数は符号と大きさを持つ。しかし、本報ではその大きさの零、非零の違いを部材の有無の表現に利用しているのみである。整係数に何らかの意味 (例えば内力の大きさまたは部材断面積) を付与すれば、境界輪体をトポロジー表現のみばかりではなく、整係数のその符号と大きさと部材寸法または位置等を表現できると考えられる。

文 献

- (1) 菊池 昇, 応用数理, **3**-1, (1993), 2-26.
- (2) G.I.N. Rozvany, *Optimization of Large Structural Systems*, Volume 1, (1993), Kluwer Academic Publishers, 103-120.
- (3) 加藤 十吉, 位相幾何学, (1988), 裳華房.
- (4) 中西 康彦・中桐 滋, 機論, **59**-567, A(1993), 2783.
- (5) D.E. Goldberg, *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*, (1989), Addison Wesley Publishing Company, Inc.
- (6) 白井 良明・辻井 潤一, 人工知能, (1982), 岩波.