回転熱源による不均質中空球の三次元非定常熱応力*

大多尾 義弘^{*1}, 谷 川 義 信^{*2}Three-Dimensional Transient Thermal Stress Analysis
of a Nonhomogeneous Hollow Sphere with Respect
to Rotating Heat Source

Yoshihiro OOTAO and Yoshinobu TANIGAWA

In this study, the theoretical analysis of a three-dimensional transient thermal stress problem is developed for a nonhomogeneous hollow sphere with respect to rotating heat source from the outer surface. We assume that the hollow sphere has nonhomogeneous thermal and mechanical material properties in the radial direction. The heat conduction problem and the associated thermoelastic behavior for such nonhomogeneous media are developed by introducing the theory of laminated composites as one theoretical approximation. The transient heat conduction problem is evaluated with the aid of the method of Laplace transformation. The associated thermoelastic field is analyzed by making use of the thermoelastic displacement potential and the complementary harmonic function. Some numerical results for the temperature change and the stress distributions are shown in figures.

Key Words: Elasticity, Thermoelasticity, Nonhomogeneity, Hollow Sphere, Three-Dimensional Problem, Transient State, Rotating Heat

1. 結 言

最近, 超高温環境耐熱材料として注目され, さらに積極的に研究・開発が展開されている傾斜機能材料のような熱応力緩和型不均質材料は, 材料設計段階において定常熱応力のみならず, 非定常熱応力の影響を考慮した設計が必要とされている。そのため一方向に不均質特性を有する材料を対象とした非定常熱応力問題の解析的研究が行われている^{(1)~(7)}。また, 著者らもこのような不均質体を, 仮想的な多層体に分割し, かつこの多層体の各層が均質であるという仮定を導入し, 数多くの非定常熱応力問題^{(8)~(14)}を解析してきた。しかし, これらの報告例は平板等の直角座標系の問題, 円板や円筒等の円柱座標系の問題に限られているようであり, 解析モデルとしてこれらと同等に重要であると考えられる球かく等の球座標系で記述される問題についての報告例は一次元問題⁽¹⁵⁾や著者らによる軸対称問題⁽¹⁶⁾を除いて皆無であるといえる。

また一方, 移動熱源による熱応力問題の解析的研究

は従来から数多くなされている。球座標系の問題を扱った報告例に限れば, 回転熱源による中空球⁽¹⁷⁾あるいは中空球⁽¹⁸⁾の三次元非定常問題などがあげられるが, 傾斜機能材料のような厚さ方向に任意の不均質特性を有する球かくの解析は行われていない。

そこで本研究は, 特性値が半径方向に関して任意に変化する不均質中空球を想定し, この球の外表面を局部的な熱源が一定角速度で回転する場合の三次元非定常熱応力問題を取扱ったものである。なお, 熱伝導問題ではラプラス変換法を用いて温度分布の解を求め, さらに熱弾性場については熱弾性変位ポテンシャルと調和関数を用いる手法を適用した。

2. 解 析

熱的および力学的材料特性, すなわち物性値が, 半径方向に関し任意に変化する不均質中空球を考え, この中空球を, 各層が均質等方性であり, かつ隣り合う各層の物性値がわずかながら変化する多層層状複合球により近似する。すなわち, 図1に示すように, N 層の異種材料からなる内半径 a , 外半径 b の層状複合中空球を考え, この複合球の各層を内側から順次 $i=1, 2, \dots, N$ と添字をつけて区別する。

2.1 温度分布 加熱条件として, 初期温度が零

* 平成6年3月30日 第71期通常総会講演会において講演, 原稿受付 平成6年2月23日。

^{*1} 正員, 大阪府立産業技術総合研究所 (〒550 大阪市西区江之子島2-1-53)。

^{*2} 正員, 大阪府立大学工学部 (〒593 堺市学園町1-1)。

度であり、時刻 $t=0$ の瞬間より、外側境界 ($r=b$) を局部熱源が一定角速度 ω_0 で $\phi=0$ を起点に ϕ の正方向に回転するものとする。さらに、球の内側境界および外側境界からは相対熱伝達率 h_a, h_b で熱放散があるものとする。ここで図1に示すように球に固定した球座標系 (r, θ, ϕ) および熱源の位置に追従する移動座標系 (r', θ', ϕ') を設定する。解析にあたりまず、移動座標系において、ある任意の時刻 $t_d (t_d \leq t)$ に、外側境界を $Q_0 F_b(\mu', \phi')$ の瞬間熱源が作用する場合の温度分布 T'_i を求める。このとき、三次元温度場に対する基礎式、初期条件式、温度境界条件式および界面の熱的連続条件式は、以下のように無次元表示される。

$$\frac{\partial T'_i}{\partial \tau} = \frac{1}{k_i^2} \bar{\Delta} T'_i \quad ; i=1 \sim N \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\tau=0; \quad T'_i=0 \quad ; i=1 \sim N \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\rho' = \bar{a} : \frac{\partial T'_i}{\partial \rho'} - H_a T'_i = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\rho' = R_i; \quad T'_i = T'_{i+1} \quad ; i=1 \sim (N-1) \quad \dots\dots\dots (4)$$

図1 不均質球の問題設定

$$\bar{\lambda}_i \frac{\partial T'_i}{\partial \rho'} = \bar{\lambda}_{i+1} \frac{\partial T'_{i+1}}{\partial \rho'} \quad ; i=1 \sim (N-1) \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\rho'=1; \quad \frac{\partial T'_N}{\partial \rho'} + H_b T'_N = F_b(\mu', \phi') \delta(\tau - \tau_d) / \bar{\lambda}_N \quad \dots\dots\dots (6)$$

ただし

$$\bar{\Delta} = \frac{1}{\rho'^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho'} \left(\rho'^2 \frac{\partial}{\partial \rho'} \right) + \frac{1}{\rho'^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \mu'} \left\{ (1 - \mu'^2) \frac{\partial}{\partial \mu'} \right\} + \frac{1}{\rho'^2 (1 - \mu'^2)} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \phi'^2} \quad \dots\dots\dots (7)$$

以上の各式において次の無次元量を導入した。

$$\left. \begin{aligned} T'_i &= \lambda_0 T'_i / (Q_0 b), (\tau, \tau_d) = x_0(t, t_d) / b^2, \rho' = r' / b, (\bar{a}, \bar{t}_i) = (a, t_i) / b, \mu' = \cos \theta' \\ \bar{x}_i &= x_i / x_0, \bar{\lambda}_i = \lambda_i / \lambda_0, k_i^2 = 1 / \bar{x}_i, (H_a, H_b) = b(h_a, h_b), R_i = \bar{a} + \sum_{k=1}^i \bar{t}_k \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (8)$$

ただし、 t は時間、 $T'_i, x_i, \lambda_i, t_i$ はそれぞれ各層の温度変化、温度伝導率、熱伝導率、厚さであり、 Q_0 は単位面積、単位時間当たりの発熱量である。また、 x_0, λ_0 はそれぞれ基準となる温度伝導率、熱伝導率を意味する。ここで、温度関数 $F_b(\mu', \phi')$ を次式の級数に展開する。

$$\left. \begin{aligned} F_b(\mu', \phi') &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n b_{nm} P_n^m(\mu') \cos m\phi' \\ b_{nm} &= \frac{(2n+1)(n-m)!}{2\pi \epsilon_m (n+m)!} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-1}^1 F_b(\mu', \phi') P_n^m(\mu') \cos m\phi' d\mu' d\phi' \\ \epsilon_m &= \begin{cases} 2; & m=0 \\ 1; & m \geq 1 \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (9)$$

条件式(2)～(6)を満足する式(1)の解は時刻 τ に関するラプラス変換法により求められる。

$$\bar{T}'_i = - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{j=1}^N \frac{2\omega_{nj} \exp\{-\omega_{nj}^2(\tau - \tau_d)\}}{\Delta'_n(\omega_{nj})} \{ \bar{A}_{inm} j_n(k_i \omega_{nj} \rho') + \bar{B}_{inm} y_n(k_i \omega_{nj} \rho') \} P_n^m(\mu') \cos m\phi' \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここで、 Δ_n を $2N \times 2N$ 行列 $[a_{ki}^{nm}]$ の行列式とすれば、 $\bar{A}_{inm}, \bar{B}_{inm}$ はそれぞれ係数行列 $[a_{ki}^{nm}]$ の $2i-1$ 列め、 $2i$ 列めを定数ベクトル $\{c_k^{nm}\}$ で置換した行列の行列式であり、 a_{ki}^{nm}, c_k^{nm} のうち、零でない成分は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} a_{1,1}^{nm} &= (n/\bar{a} - H_a) j_n(k_1 \omega \bar{a}) - k_1 \omega j_{n+1}(k_1 \omega \bar{a}), a_{1,2}^{nm} = (n/\bar{a} - H_a) y_n(k_1 \omega \bar{a}) - k_1 \omega y_{n+1}(k_1 \omega \bar{a}) \\ a_{2N,2N-1}^{nm} &= (n + H_b) j_n(k_N \omega) - k_N \omega j_{n+1}(k_N \omega), a_{2N,2N}^{nm} = (n + H_b) y_n(k_N \omega) - k_N \omega y_{n+1}(k_N \omega) \\ a_{2i+1,2i-1}^{nm} &= j_n(k_i \omega R_i), a_{2i+1,2i}^{nm} = y_n(k_i \omega R_i), a_{2i+1,2i+1}^{nm} = -j_n(k_{i+1} \omega R_i), a_{2i+1,2i+2}^{nm} = -y_n(k_{i+1} \omega R_i) \\ a_{2i+1,2i-1}^{nm} &= \bar{\lambda}_i \{ j_n(k_i \omega R_i) / R_i - k_i \omega j_{n+1}(k_i \omega R_i) \}, a_{2i+1,2i}^{nm} = \bar{\lambda}_i \{ y_n(k_i \omega R_i) / R_i - k_i \omega y_{n+1}(k_i \omega R_i) \} \\ a_{2i+1,2i+1}^{nm} &= -\bar{\lambda}_{i+1} \{ j_n(k_{i+1} \omega R_i) / R_i - k_{i+1} \omega j_{n+1}(k_{i+1} \omega R_i) \}, a_{2i+1,2i+2}^{nm} = -\bar{\lambda}_{i+1} \{ y_n(k_{i+1} \omega R_i) / R_i \\ &\quad - k_{i+1} \omega y_{n+1}(k_{i+1} \omega R_i) \}, c_{2N}^{nm} = b_{nm} / \bar{\lambda}_N \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (11)$$

ここで、式(10)中の $\Delta'_n(\omega_{nj})$ は

$$\Delta'_n(\omega_{nj}) = d\Delta_n/d\omega|_{\omega \rightarrow \omega_{nj}} \quad \dots\dots\dots (12)$$

である。また、固有値 ω_{nj} は

$$\Delta_n(\omega) = 0 \quad \dots\dots\dots (13)$$

を満足する j 番目の正根である。また、式(10)、(11)において $j_n(x)$, $y_n(x)$ は n 次の第一種および第二種球ベッセル関数であり、 $P_n^m(\mu)$ は第一種ルジャンドル陪関数を示す。さらに、求めた $\bar{T}_i$ において $\phi' = \phi - \bar{\omega}_0 \tau_d$, $\rho' = \rho$, $\mu' = \mu$ において、 τ_d について $0 \leq \tau_d \leq \tau$ で積分すれば、回転熱源による温度分布の解として、次式を得る。

$$\bar{T}_i = - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{j=1}^{\infty} \{ \bar{A}_{inm} j_n(k_i \omega_{nj} \rho) + \bar{B}_{inm} y_n(k_i \omega_{nj} \rho) \} \{ f(\omega_{nj}, m, \tau) \cos m\phi + g(\omega_{nj}, m, \tau) \sin m\phi \} P_n^m(\mu) \quad \dots\dots\dots (14)$$

ただし

$$f(\omega_{nj}, m, \tau) = \frac{2\omega_{mj}}{(\omega_{nj}^4 + m^2 \bar{\omega}_0^2) \Delta'_n(\omega_{nj})} \{ m \bar{\omega}_0 \sin m \bar{\omega}_0 \tau + \omega_{nj}^2 \cos m \bar{\omega}_0 \tau - \omega_{nj}^2 \exp(-\omega_{nj}^2 \tau) \} \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$g(\omega_{nj}, m, \tau) = \frac{2\omega_{nj}}{(\omega_{nj}^4 + m^2 \bar{\omega}_0^2) \Delta'_n(\omega_{nj})} \{ -m \bar{\omega}_0 \cos m \bar{\omega}_0 \tau + \omega_{nj}^2 \sin m \bar{\omega}_0 \tau + m \bar{\omega}_0 \exp(-\omega_{nj}^2 \tau) \} \quad \dots\dots\dots (16)$$

また、式(14)～(16)において次の無次元量を用いた。

$$\bar{T}_i = \lambda_0 T_i / (Q_0 b), \quad \bar{\omega}_0 = \omega_0 b^2 / \chi_0, \quad \rho = r/b, \quad \mu = \cos \theta \quad \dots\dots\dots (17)$$

2・2 熱弾性解析 球座標系での三次元問題に対し、調和関数 $\bar{\Psi}_i$, 熱弾性変位ポテンシャル型の関数 Φ_i を導入すれば、以下のように熱変位および熱応力成分を定式化することができる⁽¹⁸⁾。まず、 $\bar{\Psi}_i$, Φ_i に関する基礎方程式は

$$\Delta \bar{\Psi}_i = 0 \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$\Delta \Phi_i = \frac{1 + \nu_i}{1 - \nu_i} \left\{ \bar{T}_i - \frac{1}{1 - 2\nu_i} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \bar{\Psi}_i) - \frac{4(1 - \nu_i)}{1 - 2\nu_i} \bar{\Psi}_i \right\} \quad \dots\dots\dots (19)$$

ただし

$$\Delta = \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ (1 - \mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} \right\} + \frac{1}{\rho^2 (1 - \mu^2)} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad \dots\dots\dots (20)$$

このとき、各層における熱変位および熱応力成分の無次元表示は

$$\frac{\bar{U}_{ri}}{\bar{\alpha}_i} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial \rho} + \frac{2(1 + \nu_i)}{1 - 2\nu_i} \rho \bar{\Psi}_i, \quad \frac{\bar{U}_{\theta i}}{\bar{\alpha}_i} = -\frac{1}{\rho} (1 - \mu^2)^{1/2} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \mu}, \quad \frac{\bar{U}_{\phi i}}{\bar{\alpha}_i} = \frac{1}{\rho (1 - \mu^2)^{1/2}} \cdot \frac{\partial \Phi_i}{\partial \phi} \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$\frac{\bar{\sigma}_{rri}}{\bar{\alpha}_i \bar{E}_i} = \frac{1}{1 + \nu_i} \cdot \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial \rho^2} + \frac{2 - \nu_i}{(1 - \nu_i)(1 - 2\nu_i)} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \bar{\Psi}_i) - \frac{\bar{T}_i}{1 - \nu_i}$$

$$\frac{\bar{\sigma}_{\theta\theta i}}{\bar{\alpha}_i \bar{E}_i} = \frac{1}{1 + \nu_i} \left(\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \Phi_i}{\partial \rho} + \frac{1 - \mu^2}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial \mu^2} - \frac{\mu}{\rho^2} \cdot \frac{\partial \Phi_i}{\partial \mu} \right) + \frac{1}{(1 - \nu_i)(1 - 2\nu_i)} \left\{ \nu_i \rho \frac{\partial \bar{\Psi}_i}{\partial \rho} + (2 - \nu_i) \bar{\Psi}_i \right\} - \frac{\bar{T}_i}{1 - \nu_i}$$

$$\frac{\bar{\sigma}_{\phi\phi i}}{\bar{\alpha}_i \bar{E}_i} = \frac{1}{1 + \nu_i} \left(\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \Phi_i}{\partial \rho} - \frac{\mu}{\rho^2} \cdot \frac{\partial \Phi_i}{\partial \mu} + \frac{1}{\rho^2 (1 - \mu^2)} \cdot \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial \phi^2} \right) + \frac{1}{(1 - \nu_i)(1 - 2\nu_i)} \left\{ \nu_i \rho \frac{\partial \bar{\Psi}_i}{\partial \rho} + (2 - \nu_i) \bar{\Psi}_i \right\} - \frac{\bar{T}_i}{1 - \nu_i}$$

$$\frac{\bar{\sigma}_{r\theta i}}{\bar{\alpha}_i \bar{E}_i} = -(1 - \mu^2)^{1/2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ \frac{1}{1 + \nu_i} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\Phi_i}{\rho} \right) + \frac{1}{1 - 2\nu_i} \bar{\Psi}_i \right\}, \quad \frac{\bar{\sigma}_{\theta\phi i}}{\bar{\alpha}_i \bar{E}_i} = -\frac{1}{(1 + \nu_i) \rho^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left\{ \frac{\partial \Phi_i}{\partial \mu} + \frac{\mu}{1 - \mu^2} \Phi_i \right\}$$

$$\frac{\bar{\sigma}_{\phi r i}}{\bar{\alpha}_i \bar{E}_i} = \frac{1}{(1 - \mu^2)^{1/2}} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left\{ \frac{1}{1 + \nu_i} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\Phi_i}{\rho} \right) + \frac{1}{1 - 2\nu_i} \bar{\Psi}_i \right\} \quad \dots\dots\dots (22)$$

式(18)～(22)において導入した無次元量は次式で定義される。

$$\bar{\alpha}_i = \alpha_i / \alpha_0, \quad \bar{E}_i = E_i / E_0, \quad \bar{U}_{ki} = U_{ki} \lambda_0 / (\alpha_0 Q_0 b^2), \quad \bar{\sigma}_{kli} = \sigma_{kli} \lambda_0 / (\alpha_0 E_0 Q_0 b) \quad \dots\dots\dots (23)$$

ただし、 α_i , ν_i , E_i はそれぞれ各層の線膨張係数、ポアソン比、縦弾性係数であり、 α_0 , E_0 はそれぞれ基準となる線膨張係数、縦弾性係数を意味する。式(18)、(19)を解くと、関数 $\bar{\Psi}_i$, Φ_i は

$$\bar{\Psi}_i = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \{ \rho^n (C_{cnmi} \cos m\phi + C_{snmi} \sin m\phi) + \rho^{-n-1} (C'_{cnmi} \cos m\phi + C'_{snmi} \sin m\phi) \} P_n^m(\mu) \quad \dots\dots\dots (24)$$

$$\begin{aligned} \Phi_i = & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left\{ \rho^n (D_{cnmi} \cos m\phi + D_{snmi} \sin m\phi) + \rho^{-n-1} (D'_{cnmi} \cos m\phi + D'_{snmi} \sin m\phi) \right. \\ & - \frac{1 + \nu_i}{1 - \nu_i} \left[\frac{1}{1 - 2\nu_i} \left\{ \frac{n + 5 - 4\nu_i}{2(2n + 3)} \rho^{n+2} (C_{cnmi} \cos m\phi + C_{snmi} \sin m\phi) + \frac{n - 4 + 4\nu_i}{2(2n - 1)} \rho^{-n+1} (C'_{cnmi} \cos m\phi \right. \right. \\ & \left. \left. + C'_{snmi} \sin m\phi) \right\} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{k_i^2 \omega_{nj}^2} \{ \bar{A}_{inm} j_n(k_i \omega_{nj} \rho) + \bar{B}_{inm} y_n(k_i \omega_{nj} \rho) \} \{ f(\omega_{nj}, m, \tau) \cos m\phi \right. \end{aligned}$$

$$+g(\omega_{nj}, m, \tau) \sin m\phi) \Big] P_n^m(\mu) \dots \dots \dots (25)$$

となり、式(24)、(25)を式(21)、(22)に代入することにより熱変位および熱応力が得られる。ただし、関数 $\bar{\psi}_i$, $\bar{\phi}_i$ に含まれる未定定数 $C_{cni}, C_{sni}, C'_{cni}, C'_{sni}$, $D_{cni}, D_{sni}, D'_{cni}, D'_{sni}$ は力学的境界条件式より決定される未定定数である。内外両表面に外力が作用せず、かつ各層の界面が完全に接着されていると考えれば、力学的境界条件は次式で示される。

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \bar{a}; \bar{\sigma}_{rr1}=0, \bar{\sigma}_{r\theta1}=0, \bar{\sigma}_{\phi1}=0 \\ \rho &= R_i; \bar{U}_{ri}=\bar{U}_{ri+1}, \bar{U}_{\theta i}=\bar{U}_{\theta i+1}, \bar{U}_{\phi i}=\bar{U}_{\phi i+1} \\ \bar{\sigma}_{rr i} &= \bar{\sigma}_{rr i+1}, \bar{\sigma}_{r\theta i} = \bar{\sigma}_{r\theta i+1} \\ \bar{\sigma}_{\phi i} &= \bar{\sigma}_{\phi i+1}; i=1 \sim (N-1) \\ \rho &= 1; \bar{\sigma}_{rrN}=0, \bar{\sigma}_{r\theta N}=0, \bar{\sigma}_{\phi N}=0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (26)$$

3. 数 値 計 算 例

2章で導いた解析解に対する数値計算結果を以下に示す。内外半径比が0.8であり、局部的な領域で θ' 方向および ϕ' 方向に放物線状に変化する温度関数で表される場合を取り上げた。すなわち、計算諸元の無次元量を次式のように与えた。

$$\left. \begin{aligned} \bar{a} &= 0.8, \bar{\omega}_0 = 0, 2\pi, 5\pi, 10\pi, H_a = H_b = 1.0 \\ F_b(\mu', \phi') &= f_b(\mu') g_b(\phi') \\ f_b(\mu') &= [1 - \{2 \cos^{-1} \mu' - (\alpha + \beta)\}^2 / (\alpha - \beta)^2] \\ &\quad \times H(\mu' - \cos \beta) H(\cos \alpha - \mu') \\ g_b(\phi') &= (1 - \phi'^2 / \phi_0^2) H(\phi_0 - |\phi'|) \\ \alpha &= 105^\circ, \beta = 75^\circ, \phi_0 = 15^\circ; \text{Case I} \\ \alpha &= 120^\circ, \beta = 60^\circ, \phi_0 = 30^\circ; \text{Case II} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (27)$$

一方、中空球の不均質特性として、表1に示すように加熱の作用を受ける中空球の外側境界上でアルミナ、内側境界上でアルミ合金の物性値をもつ不均質中空球を考えることとし、物性値 $\kappa_i, \lambda_i, \alpha_i, E_i, \nu_i$ が半径方向に関し直線的に変化する場合を取り上げた。また、不均質中空球の仮想的な層の数を不均等厚さの $N=14$

で数値計算を実行した。すなわち、温度および応力分布の急激な変化のある外側境界近傍の仮想的な層の厚さを次式のように小さくとった。

$$\left. \begin{aligned} \bar{t}_i &= (1 - \bar{a})/10; i=1 \sim 8 \\ \bar{t}_i &= (1 - \bar{a})/20; i=9 \sim 11 \\ \bar{t}_i &= (1 - \bar{a})/40; i=12 \\ \bar{t}_i &= (1 - \bar{a})/80; i=13, 14 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (28)$$

さらに、不均質中空球の数値計算結果と比較するため、加熱を受ける外側領域がアルミナ、内側領域がアルミ合金からなり、層の厚さが等しい二層複合球に対しても $\bar{\omega}_0 = 5\pi$ 、ケース I の計算諸元で数値計算を実行した。なお、無次元量の基準となる物性値 $\kappa_0, \lambda_0, \alpha_0, E_0$ についてはアルミ合金の物性値を用いた。

(a) 温度分布 $\bar{T}(\rho=1.0, \theta=90^\circ)$

(b) 熱応力 $\bar{\sigma}_{r\theta}(\rho=1.0, \theta=90^\circ)$

(c) 熱応力 $\bar{\sigma}_{\phi\phi}(\rho=1.0, \theta=90^\circ)$

図2 加熱表面上での分布 ($\bar{\omega}_0 = 5\pi$, ケース I)

表1 アルミナ、アルミ合金の物性値

property	Al ₂ O ₃	Al Alloy
κ_i [W/m ² /s]	11.9×10^{-6}	90.6×10^{-6}
λ_i [W/(mK)]	3.6×10	22.2×10
α_i [1/K]	8.0×10^{-6}	23.6×10^{-6}
E_i [GPa]	34.3×10	7.0×10
ν_i	0.22	0.33

まず熱源の無次元角速度が $\bar{\omega}_0 = 5\pi$, 加熱領域がケース I の場合についての数値計算結果を図 2, 3 に示す。図 2 は加熱表面 ($\rho = 1.0, \theta = 90^\circ$) における温度 $\bar{T}$, 熱応力 $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ および熱応力 $\bar{\sigma}_{\phi\phi}$ の ϕ 方向分布である。図 3 は $\phi = 0$ あるいは熱源の中心 ($\phi = \bar{\omega}_0\tau$) での温度 $\bar{T}$, 熱応力 $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ および熱応力 $\bar{\sigma}_{\phi\phi}$ の半径方向分布である。図 2 より, 熱源の移動の影響により, 温度および熱応力分布は熱源の中心に関して非対称となり, 最高温度の位置は後方にずれる。熱応力分布については, 加熱初期ではほぼ全域にわたり圧縮応力状態であったのが, 時間の経過とともに, 大きな引張応力が熱源の後方における冷却領域で発生することがわかる。そして,

冷却領域での引張応力は定常状態で最大となることからわかる。一方, 加熱領域での圧縮応力が最大となるのは, 熱応力 $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ では加熱初期 ($\tau = 0.01$) で, 熱応力 $\bar{\sigma}_{\phi\phi}$ では定常状態に至るまでの時刻 ($\tau = 0.2$) であることがわかる。また図 3 より, 温度および熱応力分布は半径方向に関しなめらかな分布形状を示している。図 3 (b), (c) より $\phi = 0$ の断面では外側境界近傍で時間の経過とともに応力が大きく変動していることがわかる。特に外側境界の一点に注目すれば両振りの応力が繰返し作用することを示している。

次に, 図 2, 3 で示した不均質中空球の結果と比較するために, アルミナ-アルミ合金から成る二層複合中空球の数値計算結果を図 4, 5 に示す。すなわち, 図 4 は加熱表面 ($\rho = 1.0, \theta = 90^\circ$) における温度 $\bar{T}$ および熱応力 $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ の ϕ 方向分布であり, 図 5 は $\phi = 0$ あるいは熱源の中心 ($\phi = \bar{\omega}_0\tau$) での温度 $\bar{T}$ および熱応力 $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ の半径方向分布である。図 5 (a) より二層複合中空球では物性値の違いにより異種材料間での界面 ($\rho = 0.9$) で温度こう配の不連続を示し, かつ熱源の中心 ($\phi = \bar{\omega}_0\tau$) の位置において加熱を受ける外側領域で大きな温度こう配を示す。図 5 (b) より異種材料間での界面で応力の不連続が現れ, かつ熱源の中心 ($\phi = \bar{\omega}_0\tau$) の位置において加熱を受けるアルミナ層の界面近傍に大きな引張応力が生じることがわかる。図 3 (b) と図 5 (b) を比較すれば, 球内部に発生する引張応力に関して二層複合中空球の場合よりも不均質中空

(a) 温度分布 $\bar{T}(\phi=0, \bar{\omega}_0\tau, \theta=90^\circ)$ (b) 熱応力 $\bar{\sigma}_{\theta\theta}(\phi=0, \bar{\omega}_0\tau, \theta=90^\circ)$ (c) 熱応力 $\bar{\sigma}_{\phi\phi}(\phi=0, \bar{\omega}_0\tau, \theta=90^\circ)$ 図 3 半径方向分布 ($\bar{\omega}_0 = 5\pi$, ケース I) (a) 温度分布 $\bar{T}(\rho=1.0, \theta=90^\circ)$ (b) 熱応力 $\bar{\sigma}_{\theta\theta}(\rho=1.0, \theta=90^\circ)$ 図 4 加熱表面上での分布 (二層, $\bar{\omega}_0 = 5\pi$, ケース I)

(a) 温度分布 $\bar{T}(\phi=0, \bar{\omega}_0\tau, \theta=90^\circ)$ (b) 熱応力 $\bar{\sigma}_{ee}(\phi=0, \bar{\omega}_0\tau, \theta=90^\circ)$ 図5 半径方向分布(二層, $\bar{\omega}_0=5\pi$, ケース I) (a) 温度分布 $\bar{T}(\rho'=1.0, \theta'=90^\circ)$ (b) 熱応力 $\bar{\sigma}_{ee}(\rho'=1.0, \theta'=90^\circ)$ 図6 加熱表面上での定常分布
($\bar{\omega}_0=0, 2\pi, 5\pi, 10\pi$, ケース I)

球のほうがかなり小さいことがわかる。また、図2(b)と図4(b)を比較すれば、加熱領域近傍での圧縮応力に関しては不均質中空球のほうが小さいが、熱源の後方における冷却領域に生じる引張応力に関しては逆に不均質中空球のほうが大きく現れていることがわかる。

次に熱源の移動速度の影響を調べるために、加熱領域がケース I で、熱源の無次元角速度が $\bar{\omega}_0=0, 2\pi, 5\pi, 10\pi$ と変化する場合の加熱表面 ($\rho'=1.0, \theta'=90^\circ$) での温度 $\bar{T}$ および熱応力 $\bar{\sigma}_{ee}$ の定常状態における移動座標系上の分布を図6に示す。図6(a)より、熱源の角速度が大きくなると、加熱領域での温度上昇は小さくなる。また図6(b)より、熱源の無次元角速度が零(静止状態)の場合は全域にわたり引張応力状態であったのが、熱源の角速度が大きくなると、加熱領域近傍で圧縮応力状態となり、熱源の後方および前方における冷却領域に生じる引張応力は小さくなることがわかる。また熱源の角速度が大きくなると、応力変動の幅に関しては小さくなることがわかる。

次に熱源の加熱領域の影響を調べるために、熱源の無次元角速度は $\bar{\omega}_0=5\pi$ で、加熱領域がケース II ($\alpha=120^\circ, \beta=60^\circ, \phi_0=30^\circ$) の場合の加熱表面 ($\rho=1.0, \theta=90^\circ$) での温度 $\bar{T}$ および熱応力 $\bar{\sigma}_{ee}$ の ϕ 方向分布を図7に示す。すなわち、ケース II はケース I に比べて加熱領域が4倍となる場合である。図2(a)と図7(a)

(a) 温度分布 $\bar{T}(\rho=1.0, \theta=90^\circ)$ (b) 熱応力 $\bar{\sigma}_{ee}(\rho=1.0, \theta=90^\circ)$ 図7 加熱表面上での分布 ($\bar{\omega}_0=5\pi$, ケース II)

および図2(b)と図7(b)との比較により, 加熱初期($\tau=0.01$)を除く時間において加熱領域が大きくなると, 加熱領域での温度上昇および熱源の後方における冷却領域に生じる引張応力は大きくなることがわかる。また, 加熱領域がケースIIの場合, 定常状態では全域で引張応力状態となり, 応力の分布形状がケースIの場合とは大きく異なることがわかる。

4. 結 言

本報では, 回転熱源による不均質中空球の三次元非定常熱応力問題を理論解析し, 数値計算結果を示した。不均質中空球に対する温度変化および応力分布の定性的挙動および定量的評価は3章で述べたとおりである。

得られた数値計算結果より次のことがいえる。

(1) 異種材料からなる二層複合中空球の場合, その界面近傍に大きな引張熱応力の発生が予測されるのに対し, 不均質中空球では, 界面をなくすことによりこの引張熱応力を緩和することができる。

(2) 二層複合中空球に対する結果と比べると, 加熱表面において移動熱源近傍に生じる圧縮熱応力は緩和されるが, 逆に移動熱源後方の冷却領域での引張熱応力は大きい。

(3) 加熱表面上の温度および熱応力は熱源の角速度および加熱領域に大きく影響を受ける。

文 献

- (1) Sugano, Y., *Theoretical Appl. Mech.*, **34** (1986), 183.
- (2) Sugano, Y., *Ing-Arch*, **57-2** (1987), 147.
- (3) 菅野, 機論, **54-501**, A (1988), 1015.
- (4) 菅野・明石, 機論, **55-509**, A (1989), 89.
- (5) 菅野・木元・大坪, 機論, **56-530**, A (1990), 2145.
- (6) 谷川・赤井, 機論, No. 920-78 (1992-9), 262.
- (7) 小畑・野田, 機論, **59-560**, A (1993), 1090.
- (8) Ootao, Y., Tanigawa, Y. and Murakami, H., *J. Thermal Stresses*, **13** (1990), 193.
- (9) 大多尾・谷川, 機論, **56-531**, A (1990), 2275.
- (10) Tanigawa, Y., Ootao, Y. and Kawamura, R., *J. Thermal Stresses*, **14** (1991), 285.
- (11) Ootao, Y., Fukuda, T. and Tanigawa, Y., *Theoretical Appl. Mech.*, **38** (1989), 177.
- (12) Ootao, Y., Tanigawa, Y. and Fukuda, T., *J. Thermal Stresses*, **14** (1991), 201.
- (13) 大多尾・赤井・谷川, 機論, **59-563**, A (1993), 1684.
- (14) 大多尾・赤井・谷川, 機論, **59-568**, A (1993), 2953.
- (15) Parida, J. and Das, A. K., *Bull. de L' Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Tech.*, **18-1** (1970), 1.
- (16) 大多尾・谷川・中西, 機論, **57-539**, A (1991), 1581.
- (17) Tanigawa, Y. and Takeuti, Y., *ZAMM*, **63** (1983), 317.
- (18) Takeuti, Y. and Tanigawa, Y., *J. Thermal Stresses*, **5** (1982), 283.