円形介在物を有する異方性材無限板における
弾性問題の基本解*陳 玳 珩^{*1}Fundamental Solutions of Plane Elasticity for Anisotropic Infinite Plate
Containing Circular Inclusion

Dai-heng CHEN

The plane elasticity problem of an infinite anisotropic plate containing a circular isotropic inclusion is considered, and Green's functions are derived for a point force and/or a dislocation acting at a point in the exterior of the inclusion. The complex potential approaches by Muskhelishvili and Lekhnitskii are used to express the elastic fields in the isotropic material and the anisotropic material, respectively. The general solutions are obtained in a closed form. A special case of two joined isotropic-anisotropic half-planes is deduced from the general solution.

Key Words: Elasticity, Composite Material, Green's Function, Plane Problem, Anisotropic Material, Point Force, Dislocation

1. 緒 言

体積力法や境界要素法などの数値解析の手法を用いて異方性材の応力解析を行う際、異方性材問題の基本解、すなわち無限に広がった異方性弾性体の任意点に集中力または転位が作用するときの変位・応力の解が、必要となる。異方性材の二次元弾性問題の基本解については、まず、均質の異方性無限板の一点に集中力が作用するときの変位・応力の解は、Hirth⁽¹⁾によって導出された。その後、接合無限板や介在物が存在する無限板などの問題に対して、特定の境界条件を満足するような基本解は多くの研究者によって求められている。例えば、介在物が存在する無限板の基本解問題に対しては、Snyder-Cruse⁽²⁾、Clements-Haselygrove⁽³⁾はき裂(直線の空孔)が存在する場合、Kamel-Liaw⁽⁴⁾は円形の空孔(空気介在物)が存在する場合、Ting-Yan⁽⁵⁾は円形の剛体介在物が存在する場合についてのそれぞれの基本解を導いた。これらの研究では、いずれも介在物を空気または剛体としている。そこで、本研究では、空気と剛体以外の介在物による影響を検討するため、図1に示すように、円形の等方性材介在

物を有する異方性材無限板の任意の一点に集中力または転位が作用するときの弾性場の基本解を求める。この種の基本解の問題については、介在物の材質を異方性、形状を円形とする場合はより一般的であるが、その解は無窮級数の形となる。本研究では、有限項の形で表される基本解を求めるため、介在物の材質を等方性、形状を円形とした。解が有限項の形であるので、異方性材における介在物の影響を検討するには都合がよいと思われる。

介在物は等方性材とし、その弾性性質は、二つの弾性係数、横弾性係数 G とポアソン比 ν 、で表されるも

図1 円形の等方性材介在物を有する異方性材無限板

* 原稿受付 平成6年3月9日。

^{*1} 正員、九州工業大学情報工学部 (〒820 飯塚大字川津 680-4)。

のとする。無限板は異方性材とし、その弾性性質は、無限板が所在する面、 x - y 面、に関して対称であり、その x - y 面におけるひずみと応力との関係は六つの係数によって次のように表されるものとする。

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{16}\tau_{xy} \\ \varepsilon_y &= a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{26}\tau_{xy} \\ \gamma_{xy} &= a_{16}\sigma_x + a_{26}\sigma_y + a_{66}\tau_{xy}\end{aligned}\quad \dots\dots\dots (1)$$

平面応力状態の場合、式(1)中の a_{ij} はそのまま材料の x, y 方向の弾性コンプライアンスに等しいが、平面ひずみ状態の場合、 a_{ij} は次式のように材料の弾性コンプライアンス b_{ij} から求まる。

$$a_{ij} = b_{ij} - b_{i3}b_{j3}/b_{33} \quad (i, j=1, 2, 6) \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 b_{13} 、 b_{23} と b_{33} は材料の x - y 面と垂直な方向に関連する弾性コンプライアンスである。

2. 基礎方程式

図1に示すように、異方性材が占める $|z| \geq a$ の領域と等方性材が占める $|z| \leq a$ の領域を、それぞれ領域1と2、 Ω_1 と Ω_2 とする。各領域における弾性場は、複素応力関数で表す。等方性材の領域 Ω_2 においては、その弾性場は、次のように二つの複素応力関数 $\phi(z)$ 、 $\psi(z)$ で表される。

$$\begin{aligned}-P_y - iP_x &= \bar{\phi}(\bar{z}) + z\phi'(z) + \psi(z) \\ 2G(u_x - iu_y) &= x\bar{\phi}(\bar{z}) - \bar{z}\phi'(z) - \psi(z) \\ \sigma_x + \sigma_y &= 4 \operatorname{Re}[\phi'(z)] \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2[\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)]\end{aligned}\quad \dots\dots\dots (3)$$

ここに、

$$\chi = \begin{cases} (3-\nu)/(1+\nu) & (\text{平面応力}) \\ 3-4\nu & (\text{平面ひずみ}) \end{cases}\quad \dots\dots\dots (4)$$

$$z = x + iy \quad \dots\dots\dots (5)$$

式中の i は $i = \sqrt{-1}$ である。

異方性材の領域 Ω_1 における弾性場は、Lekhnitskii の理論⁽⁶⁾に基づいて、二つの複素応力関数 $\phi_1(z_1)$ 、 $\phi_2(z_2)$ によって次のように与えられる。

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 2 \operatorname{Re}[s_1^2 \phi_1'(z_1) + s_2^2 \phi_2'(z_2)] \\ \sigma_y &= 2 \operatorname{Re}[\phi_1'(z_1) + \phi_2'(z_2)] \\ \tau_{xy} &= -2 \operatorname{Re}[s_1 \phi_1'(z_1) + s_2 \phi_2'(z_2)] \\ u_x &= 2 \operatorname{Re}[p_1 \phi_1(z_1) + p_2 \phi_2(z_2)] \\ u_y &= 2 \operatorname{Re}[q_1 \phi_1(z_1) + q_2 \phi_2(z_2)] \\ P_x &= 2 \operatorname{Re}[s_1 \phi_1(z_1) + s_2 \phi_2(z_2)] \\ P_y &= -2 \operatorname{Re}[\phi_1(z_1) + \phi_2(z_2)]\end{aligned}\quad \dots\dots\dots (6)$$

ここに、

$$\begin{aligned}p_1 &= a_{11}s_1^2 + a_{12} - a_{16}s_1, \quad p_2 = a_{11}s_2^2 + a_{12} - a_{16}s_2 \\ q_1 &= a_{12}s_1 - a_{26} + a_{22}/s_1, \quad q_2 = a_{12}s_2 - a_{26} + a_{22}/s_2\end{aligned}\quad \dots\dots\dots (7)$$

$$z_1 = x + s_1 y, \quad z_2 = x + s_2 y \quad \dots\dots\dots (8)$$

また s_1 と s_2 は、次の代数方程式：

$$a_{11}s^4 - 2a_{16}s^3 + (2a_{12} + a_{66})s^2 - a_{26}s + a_{22} = 0 \quad \dots\dots\dots (9)$$

の四つの根中の虚数部が正となる二つの根である。

3. 基本解

本問題の弾性場の解はまず、集中力と転位が作用している点 (x_0, y_0) において、次の二つの条件を満足しなければならない。

(1) 力の釣合い条件：点 (x_0, y_0) を囲む任意の閉じた経路に沿って、内側の部分が外側の部分に及ぼす応力の合力が (F_x, F_y) である。

(2) 変位の食い違い条件：点 (x_0, y_0) のまわりを時計方向一周するとき生じる x 方向と y 方向の食い違いがそれぞれ b_x と b_y である。

このような条件を満足させるため、領域 Ω_1 の弾性場に対応する複素関数 $\phi_1(z_1)$ と $\phi_2(z_2)$ を、次式のように、式 (x_0, y_0) に特異性を持つものと持たないものの二つの関数の和で表される。

$$\begin{aligned}\phi_1(z_1) &= \phi_1^s(z_1) + \phi_1^* (z_1) \\ \phi_2(z_2) &= \phi_2^s(z_2) + \phi_2^* (z_2)\end{aligned}\quad \dots\dots\dots (10)$$

$\phi_1^s(z_1)$ と $\phi_2^s(z_2)$ は、均質異方性無限板問題の基本解に対応するものであり、次式で与えられる⁽¹⁾。

$$\begin{aligned}\phi_1^s(z_1) &= A \log(z_1 - z_{01}), \\ \phi_2^s(z_2) &= B \log(z_2 - z_{02})\end{aligned}\quad \dots\dots\dots (11)$$

ここに、

$$z_{01} = x_0 + s_1 y_0, \quad z_{02} = x_0 + s_2 y_0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

また、 A と B は次の代数方程式の解である。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ s_1 & s_2 & -\bar{s}_1 & -\bar{s}_2 \\ p_1 & p_2 & -\bar{p}_1 & -\bar{p}_2 \\ q_1 & q_2 & -\bar{q}_1 & -\bar{q}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ \bar{A} \\ \bar{B} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\pi i} \begin{bmatrix} F_y \\ -F_x \\ b_x \\ b_y \end{bmatrix}\quad \dots\dots\dots (13)$$

未知の関数として式(10)に導入された関数 $\phi_1^*(z_1)$ と $\phi_2^*(z_2)$ は、領域 Ω_1 内の変数 z_1 と z_2 の解析関数である。

また、領域 Ω_2 の弾性場に対応する二つの複素関数をそれぞれ $\phi(z)$ と $\psi(z)$ とする。領域 Ω_2 内に特異点がないので、複素関数 $\phi(z)$ と $\psi(z)$ は領域 Ω_2 内の変数 z の解析関数である。

四つの未知の関数, $\phi^*(z_1)$, $\phi^*(z_2)$, $\phi(z)$ と $\psi(z)$ は, 接合界面 $|z|=a$ における応力と変位の連続条件:

$$\begin{aligned} P_y(|z|=a^+) &= P_y(|z|=a^-), P_x(|z|=a^+) = P_x(|z|=a^-) \\ u_y(|z|=a^+) &= u_y(|z|=a^-), u_x(|z|=a^+) = u_x(|z|=a^-) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (14)$$

から求められる。

等方性材と異方性材におけるそれぞれの合力と変位の式を式(14)に代入すれば, $\phi^*(z_1)$, $\phi^*(z_2)$, $\phi(z)$ と $\psi(z)$ に関する四つの方程式が得られる。Muskhelishvili の手法⁽⁷⁾を用いてこのような方程式から未知の関数を求める際, まずこれらの方程式を, 各変数の共役を含めないように変換しなければならない。この変換操作は次のように行われる。

領域 Ω_2 に対しては, 次の変換式:

$$z = a\zeta \quad \dots\dots\dots (15)$$

を用いて, 図2に示すように, z 面上の半径 $r=a$ の円の内部を ζ 面上の半径 $r=1$ の円の内部に変換する。このとき, 接合界面上の点 $z=ae^{i\theta}$ は ζ 面中の単位円上の点 $\zeta=e^{i\theta}$ に変換される。

そして, 異方性材が占めている領域 Ω_2 については, その領域が z 面(物理面)上の半径 $r=a$ の円の外部領域であるが, 解析に取扱っている変数 z_1 と z_2 は, 図3に示すように, それぞれ z_1 面と z_2 面中のあるだ円の外部領域となっているので, 次の変換式:

$$z_k = c_k \zeta_k + d_k / \zeta_k = c_k (\zeta_k + m_k / \zeta_k) \quad (k=1, 2) \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$c_k = a(1 - is_k)/2, d_k = a(1 + is_k)/2, m_k = d_k / c_k \quad \dots\dots\dots (17)$$

を用いて, これらの領域を, ζ_1 面と ζ_2 面上の半径 $r=1$ の円の外部に変換する。このとき, ζ_1 面上の点 $\zeta_1=e^{i\theta}$ と ζ_2 面上の点 $\zeta_2=e^{i\theta}$ は, いずれも z 面上の同一の接合界面にある点 $z=ae^{i\theta}$ から変換されて得たものである。

円の内部と外部領域にそれぞれ変換式(15)と式(16)を適用すれば, 合力と変位の式を代入した後の連続条件式(14)は次のように書くことができる。

$$\begin{aligned} \phi(\sigma) + \bar{\phi}\left(\frac{1}{\sigma}\right) + \sigma \bar{\phi}'\left(\frac{1}{\sigma}\right) + \bar{\psi}\left(\frac{1}{\sigma}\right) + \frac{1}{\sigma} \phi'(\sigma) + \psi(\sigma) - 2 \left[\phi_1^s(\sigma) + \bar{\phi}_1^s\left(\frac{1}{\sigma}\right) + \phi_2^s(\sigma) + \bar{\phi}_2^s\left(\frac{1}{\sigma}\right) \right] \\ = 2 \left[A \log(\sigma - z_{01}) + \bar{A} \log\left(\frac{1}{\sigma} - \bar{z}_{01}\right) + B \log(\sigma - z_{02}) + \bar{B} \log\left(\frac{1}{\sigma} - \bar{z}_{02}\right) \right] \quad (\sigma = e^{i\theta}) \quad \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi(\sigma) - \bar{\phi}\left(\frac{1}{\sigma}\right) + \sigma \bar{\phi}'\left(\frac{1}{\sigma}\right) + \bar{\psi}\left(\frac{1}{\sigma}\right) - \frac{1}{\sigma} \phi'(\sigma) - \psi(\sigma) - 2i \left[s_1 \phi_1^s(\sigma) + \bar{s}_1 \bar{\phi}_1^s\left(\frac{1}{\sigma}\right) + s_2 \phi_2^s(\sigma) + \bar{s}_2 \bar{\phi}_2^s\left(\frac{1}{\sigma}\right) \right] \\ = 2i \left[s_1 A \log(\sigma - z_{01}) + \bar{s}_1 \bar{A} \log\left(\frac{1}{\sigma} - \bar{z}_{01}\right) + s_2 B \log(\sigma - z_{02}) + \bar{s}_2 \bar{B} \log\left(\frac{1}{\sigma} - \bar{z}_{02}\right) \right] \quad (\sigma = e^{i\theta}) \quad \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x\phi(\sigma) + x\bar{\phi}\left(\frac{1}{\sigma}\right) - \sigma \bar{\phi}'\left(\frac{1}{\sigma}\right) - \bar{\psi}\left(\frac{1}{\sigma}\right) - \frac{1}{\sigma} \phi'(\sigma) - \psi(\sigma) - 4G \left[p_1 \phi_1^s(\sigma) + \bar{p}_1 \bar{\phi}_1^s\left(\frac{1}{\sigma}\right) + p_2 \phi_2^s(\sigma) + \bar{p}_2 \bar{\phi}_2^s\left(\frac{1}{\sigma}\right) \right] \\ = 4G \left[p_1 A \log(\sigma - z_{01}) + \bar{p}_1 \bar{A} \log\left(\frac{1}{\sigma} - \bar{z}_{01}\right) + p_2 B \log(\sigma - z_{02}) + \bar{p}_2 \bar{B} \log\left(\frac{1}{\sigma} - \bar{z}_{02}\right) \right] \quad (\sigma = e^{i\theta}) \quad \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x\phi(\sigma) - x\bar{\phi}\left(\frac{1}{\sigma}\right) - \sigma \bar{\phi}'\left(\frac{1}{\sigma}\right) - \bar{\psi}\left(\frac{1}{\sigma}\right) + \frac{1}{\sigma} \phi'(\sigma) + \psi(\sigma) - 4Gi \left[q_1 \phi_1^s(\sigma) + \bar{q}_1 \bar{\phi}_1^s\left(\frac{1}{\sigma}\right) + q_2 \phi_2^s(\sigma) + \bar{q}_2 \bar{\phi}_2^s\left(\frac{1}{\sigma}\right) \right] \\ = 4Gi \left[q_1 A \log(\sigma - z_{01}) + \bar{q}_1 \bar{A} \log\left(\frac{1}{\sigma} - \bar{z}_{01}\right) + q_2 B \log(\sigma - z_{02}) + \bar{q}_2 \bar{B} \log\left(\frac{1}{\sigma} - \bar{z}_{02}\right) \right] \quad (\sigma = e^{i\theta}) \quad \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

方程式(18)~(21)に Muskhelishvili の手法⁽⁷⁾を適用すれば, $\phi^*(z_1)$, $\phi^*(z_2)$, $\phi(z)$ と $\psi(z)$ を求めることができる。その求め方は, 著者がさきに行った研究⁽⁸⁾に用いた方法と同様であるため, ここでは紙面の都合で求めた最終結果のみを示す。

得られた領域1と2におけるそれぞれの複素関数の解は次のようである。

領域1では,

$$\begin{aligned} \phi_1(\zeta_1) &= [I_3] \{f_1(\zeta_1)\} \\ &\quad - \frac{e_3 C}{D \zeta_1} + A \log(z_1 - z_{01}) \\ \phi_2(\zeta_2) &= [I_4] \{f_1(\zeta_2)\} \\ &\quad + \frac{e_1 C}{D \zeta_2} + B \log(z_2 - z_{02}) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (22)$$

領域2では,

$$\begin{aligned}\phi(\zeta) &= [\bar{l}_1] \left\{ \bar{f}_1 \left(\frac{1}{\zeta} \right) \right\} - \bar{N}_1 \bar{C} \zeta \\ \phi(\zeta) &= [\bar{l}_2] \left\{ \bar{f}_1 \left(\frac{1}{\zeta} \right) \right\} + [\bar{l}_1] \{ f_2(\zeta) \} - \bar{N}_2 \bar{C} \zeta\end{aligned}\quad \dots\dots\dots (23)$$

式(22), (23)中に,

$$\{f_1(\zeta)\} = \begin{Bmatrix} A \log \left(1 - \frac{m_1}{\zeta \zeta_{01}} \right) \\ \bar{A} \log \left(1 - \frac{1}{\zeta \bar{\zeta}_{01}} \right) \\ B \log \left(1 - \frac{m_2}{\zeta \zeta_{02}} \right) \\ \bar{B} \log \left(1 - \frac{1}{\zeta \bar{\zeta}_{02}} \right) \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (24)$$

$$\{f_2(\zeta)\} = \begin{Bmatrix} \frac{A(m_1/\zeta_{01})^2}{1 - m_1 \zeta/\zeta_{01}} \\ \frac{\bar{A}(1/\bar{\zeta}_{01})^2}{1 - \zeta/\bar{\zeta}_{01}} \\ \frac{B(m_2/\zeta_{02})^2}{1 - m_2 \zeta/\zeta_{02}} \\ \frac{\bar{B}(1/\bar{\zeta}_{02})^2}{1 - \zeta/\bar{\zeta}_{02}} \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (25)$$

また

$$C = \frac{\bar{N}_1 [l_1] \{f_3\} - [\bar{l}_1] \{ \bar{f}_3 \}}{1 - N_1 \bar{N}_1} \quad \dots\dots\dots (26)$$

図 2 等方性材領域に対する写像関数の変換

$$\{f_3\} = \begin{Bmatrix} Am_1/\zeta_{01} \\ \bar{A}/\bar{\zeta}_{01} \\ Bm_2/\zeta_{02} \\ \bar{B}/\bar{\zeta}_{02} \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (27)$$

また各式中に用いられる材料の弾性定数に関するパラメータは次のように定義されるものである。

$$\begin{aligned}[l_1] &= (1 - is_1)[l_3] + (1 - is_2)[l_4] + [l_5] \\ [l_2] &= (1 + is_1)[l_3] + (1 + is_2)[l_4] + [l_6]\end{aligned}\quad \dots\dots\dots (28)$$

$$\begin{aligned}[l_3] &= [-1, (e_3 h_2 - h_3 e_2)/D, 0, (e_3 h_4 - h_3 e_4)/D] \\ [l_4] &= [0, (h_1 e_2 - e_1 h_2)/D, -1, (h_1 e_4 - e_1 h_4)/D] \\ [l_5] &= [1 - is_1, 1 - i\bar{s}_1, 1 - is_2, 1 - i\bar{s}_2] \\ [l_6] &= [1 + is_1, 1 + i\bar{s}_1, 1 + is_2, 1 + i\bar{s}_2]\end{aligned}\quad \dots\dots\dots (29)$$

$$\begin{aligned}e_1 &= [(1 + is_1) + 2G(p_1 + iq_1)]/(\chi + 1) \\ e_2 &= [(1 + i\bar{s}_1) + 2G(\bar{p}_1 + i\bar{q}_1)]/(\chi + 1) \\ e_3 &= [(1 + is_2) + 2G(p_2 + iq_2)]/(\chi + 1) \\ e_4 &= [(1 + i\bar{s}_2) + 2G(\bar{p}_2 + i\bar{q}_2)]/(\chi + 1)\end{aligned}\quad \dots\dots\dots (30)$$

$$\begin{aligned}h_1 &= [\chi(1 - is_1) - 2G(p_1 - iq_1)]/(\chi + 1) \\ h_2 &= [\chi(1 - i\bar{s}_1) - 2G(\bar{p}_1 - i\bar{q}_1)]/(\chi + 1) \\ h_3 &= [\chi(1 - is_2) - 2G(p_2 - iq_2)]/(\chi + 1) \\ h_4 &= [\chi(1 - i\bar{s}_2) - 2G(\bar{p}_2 - i\bar{q}_2)]/(\chi + 1)\end{aligned}\quad \dots\dots\dots (31)$$

$$D = e_1 h_3 - e_3 h_1 \quad \dots\dots\dots (32)$$

$$N_1 = \{(1 - is_1)e_3 - (1 - is_2)e_1\}/D + 1$$

$$N_2 = \{(1 + is_1)e_3 - (1 + is_2)e_1\}/D \quad \dots\dots\dots (33)$$

求めた領域 1 と 2 における複素関数の式をそれぞれ式(6)と(3)に代入すれば両領域における変位, 応力,

図 3 異方性材領域に対する写像関数の変換

合力の表示式が得られる。図4～6は、両材料の弾性定数を表1に示しているものとして、外側の異方性板の主軸 x_0 と x 軸との角度 $\psi=0^\circ, 15^\circ$ の場合について、 $x_0=2a, y_0=0$ の点に x 方向の集中力 F_x が作用するときの x 軸上における応力の分布を示すものである。両領域における応力 σ_x, τ_{xy} が接合界面(図中の $x=a$ の点)で連続であることは言うまでもない。

4. 本基本解の特別な場合

本研究で取扱っているのは、図1のような、円形の介在物を有する無限板の問題であるが、いくつかの他の問題の解も、図1の問題の特別な場合として、3章で求めた基本解の一般式から得られる。以下、このことを示す。

図4 点 $(2a, 0)$ に作用している x 方向の集中力 F_x による x 軸上での応力 σ_x の分布

図5 点 $(2a, 0)$ に作用している x 方向の集中力 F_x による x 軸上での応力 σ_y の分布

4.1 応力自由の円孔をもつ無限板の問題 介在物の横弾性定数 G を $G=0$ とすれば、図1の問題は応力自由の円孔をもつ無限板の問題となる。このとき、式(26)の C が $C=0$ となるので、異方性材の領域 Ω_1 における複素関数の解は次のようになる。

$$\begin{aligned}\phi_1(\zeta_1) &= [l_{30}]\{f_1(\zeta_1)\} + A \log(z_1 - z_{01}) \\ \phi_2(\zeta_2) &= [l_{40}]\{f_1(\zeta_2)\} + B \log(z_2 - z_{02})\end{aligned}\quad \dots\dots\dots (34)$$

ここに、 $\{f_1(\zeta)\}$ と A, B などの定義は3章のそれと同様であるが、 $[l_{30}]$ と $[l_{40}]$ は次式のように簡単な形で表される。

$$\begin{aligned}[l_{30}] &= [-1, (\bar{s}_1 - s_2)/\Delta_0, 0, (\bar{s}_2 - s_2)/\Delta_0] \\ [l_{40}] &= [0, (s_1 - \bar{s}_1)/\Delta_0, -1, (s_1 - \bar{s}_2)/\Delta_0]\end{aligned}\quad \dots\dots\dots (35)$$

$$\Delta_0 = s_2 - s_1 \quad \dots\dots\dots (36)$$

式(34)で表されている変位、応力の解は、Kamel-Liaw⁽⁴⁾ が求めた円孔を持つ無限板の解の、だ円が円となる場合のそれと一致している。

4.2 円形剛体介在物をもつ無限板の問題 介在物の横弾性定数 G を $G=\infty$ とすれば、図1は円形剛体介在物をもつ無限板となる。このとき、異方性材の

表1 図4～6に用いた材料弾性係数

A1	CF1
$G = 26.78 \text{ GPa}$ $\nu = 0.3$	$E_{x_0} = 400 \text{ GPa}$
	$E_{y_0} = 8.62 \text{ GPa}$
	$\nu_{x_0 y_0} = 0.35$
	$G_{x_0 y_0} = 2.8 \text{ GPa}$

図6 点 $(2a, 0)$ に作用している x 方向の集中力 F_x による x 軸上での応力 τ_{xy} の分布

領域 Ω_1 における複素数の解は次のようになる。

$$\begin{aligned}\phi_1(\zeta_1) &= [l_{30}]\{f_1(\zeta_1)\} \\ &\quad - \frac{e_{30}C_0}{\Delta_0\zeta_1} + A \log(z_1 - z_{01}) \\ \phi_2(\zeta_2) &= [l_{40}]\{f_1(\zeta_2)\} \\ &\quad + \frac{e_{10}C_0}{\Delta_0\zeta_2} + B \log(z_2 - z_{02})\end{aligned}\quad \dots\dots\dots (37)$$

ここに、

$$\begin{aligned}[l_{30}] &= [-1, (p_2\bar{q}_1 - \bar{p}_1q_2)/\Delta, 0, (p_2\bar{q}_2 - \bar{p}_2q_2)/\Delta] \\ [l_{40}] &= [0, (\bar{p}_1q_1 - p_1\bar{q}_1)/\Delta, -1, (\bar{p}_2q_1 - p_1\bar{q}_2)/\Delta]\end{aligned}\quad \dots\dots\dots (38)$$

$$\begin{aligned}e_{10} &= p_1 + iq_1 \\ e_{30} &= p_2 + iq_2\end{aligned}\quad \dots\dots\dots (39)$$

$$\Delta_0 = p_1q_2 - p_2q_1 \quad \dots\dots\dots (40)$$

$$C_0 = \frac{[l_1]\{f_3\} - [\bar{l}_1]\{\bar{f}_3\}}{M_1 - M_1} \quad \dots\dots\dots (41)$$

$$M_1 = \{(1 - is_1)e_{30} - (1 - is_2)e_{10}\}/\Delta_0 \quad \dots\dots\dots (42)$$

式(37)～(42)中の $\{f_1(\zeta)\}$, $\{f_3\}$, $[l_1]$ および A, B などの定義は3章のそれと同様である。

式(41)からわかるように、 C_0 は常に実数である。 C_0 が実数である場合、複素関数

$$\phi_1^M(\zeta_1) = -\frac{e_{30}C_0}{\Delta_0\zeta_1}, \quad \phi_2^M(\zeta_2) = \frac{e_{10}C_0}{\Delta_0\zeta_2} \quad \dots\dots\dots (43)$$

で表される弾性場は、介在物の剛体回転によるものに対応している。Santare-Keer⁽⁹⁾が指摘したように、剛体介在物を持つ無限板の基本解問題には、介在物が剛体回転しない場合と剛体回転する場合との2種類異なる問題がある。前者の場合、介在物の界面に生じている応力による合モーメントは零ではない。これに対して後者の場合、介在物の回転によってその界面応力による合モーメントは零となる。式(37)の解は、介在物が剛体回転する場合に対応している。

4.3 接合無限板の問題 取扱っている弾性場を、接合界面にある一点 $T(z_T = ae^{i\theta})$ のごく近傍に限定すれば、図1の問題は、図7に示すように、異方性材

図7 本問題と接合無限板問題との関係

と等方性材との接合無限板の問題となる。したがって、図7の接合無限板における集中力と転位の基本解は、3章で求めた円形介在物を有する無限板問題の解から導出することができる。以下、このことを示す。

図7に用いられる座標系は、点Tを原点とする座標系 (x_s, y_s) である。座標軸の平行移動によって得られた新座標系 (x_s, y_s) における複素応力関数は、元の座標系におけるそれとの間に次の関係式が成り立つ。

異方性材では、

$$\phi_{s1}(z_{s1}) = \phi_1(z_1), \quad \phi_{s2}(z_{s2}) = \phi_2(z_2) \quad \dots\dots\dots (44)$$

等方性材では、

$$\begin{aligned}\phi_s(z_s) &= \phi(z) \\ \bar{z}_s\phi'_s(z_s) + \phi_s(z_s) &= \bar{z}\phi'(z) + \phi(z)\end{aligned}\quad \dots\dots\dots (45)$$

ここに、

$$z_{s1} = x_s + s_1y_s, \quad z_{s2} = x_s + s_2y_s, \quad z_s = x_s + iy_s \quad \dots\dots\dots (46)$$

また、点Tのごく近傍については、3章の基本解の式(22), (23)に用いられる変数 ζ_1, ζ_2 と ζ は、次のように、点Tにおける局所座標で表される。

異方性材領域での変数 ζ_1 と ζ_2 は

$$\zeta_k = \zeta_T + \frac{2z_{sk}}{aH_k} \quad (k=1, 2) \quad \dots\dots\dots (47)$$

ここに、

$$H_k = (1 - is_k) - (1 + is_k)e^{-2i\theta}, \quad \zeta_T = e^{i\theta} \quad \dots\dots (48)$$

等方性材領域での変数 ζ は

$$\zeta = \zeta_T + z_s/a \quad \dots\dots\dots (49)$$

式(47)～(49)を基本解の式(22), (23)に代入して、 $a \rightarrow \infty$ の極限操作を行えば、関係式(44), (45)から図7の接合無限板の問題に対応する複素応力関数の解が得られる。その結果、

領域1では、

$$\begin{aligned}\phi_{s1}(z_{s1}) &= [l_3]\{g_1(z_{s1})\} + A \log(z_{s1} - z_{s01}) \\ \phi_{s2}(z_{s2}) &= [l_4]\{g_1(z_{s2})\} + B \log(z_{s2} - z_{s02})\end{aligned}\quad \dots\dots\dots (50)$$

領域2では、

$$\begin{aligned}\phi_s(z_s) &= [\bar{l}_1]\{g_2(z_s)\} \\ \psi_s(z_s) &= [\bar{l}_2]\{g_2(z_s)\} + [\bar{l}_1]\{g_3(z_s)\}\end{aligned}\quad \dots\dots\dots (51)$$

ここに、

$$g_1(z_{sk}) = \begin{cases} 0 \\ \bar{A} \log\left(\frac{z_{sk}}{H_k} + e^{2i\theta} \frac{\bar{z}_{s01}}{\bar{H}_1}\right) \\ 0 \\ \bar{B} \log\left(\frac{z_{sk}}{H_k} + e^{2i\theta} \frac{\bar{z}_{s02}}{\bar{H}_2}\right) \end{cases} \quad \dots\dots (52)$$

$$\{g_2(z_s)\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ A \log(z_s - 2z_{s01}/H_1) \\ 0 \\ B \log(z_s - 2z_{s02}/H_2) \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (53)$$

$$\{g_3(z_s)\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{Az_s e^{-2i\theta}}{z_s - 2z_{s01}/H_1} \\ 0 \\ \frac{Bz_s e^{-2i\theta}}{z_s - 2z_{s02}/H_2} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (54)$$

$$z_{s01} = x_{s0} + S_1 y_{s0}, z_{s02} = x_{s0} + S_2 y_{s0} \dots\dots\dots (55)$$

式(50)～(54)中に用いられる材料の弾性定数に関するパラメータ $[l_1], [l_2], [l_3]$ と $[l_4]$ などの定義は3章のそれと同様である。

5. 結 論

本論文では、円形の等方性介在物を有する異方性材無限板の問題について、集中力および転位が異方性材の任意の一点に作用する場合の変位・応力・合力の基本解を導いた。両材料における変位、応力、合力の式

は、いずれも複素関数を用いて表される。また、応力自由の円孔を持つ無限板、円形剛体介在物を持つ無限板、異方性材の半無限板と等方性材の半無限板との接合無限板などの問題における基本解は、本研究で扱っている問題の特別な場合として、得られた解の一般式から導出される。

文 献

- (1) Hirth, J. P., *Scripta Met.*, **6**(1972), 535.
- (2) Snyder, M. D. and Cruse, T. A., *Int. J. Fract.*, **11**(1975), 315.
- (3) Clements, D. L. and Haselgrove, M. A., *Int. J. Comp. Math.*, **12**(1983), 267.
- (4) Kamel, M. and Liaw, B. M., *Mech. Res. Comm.*, **16**(1989), 311.
- (5) Ting, T. C. and Yan, G., *Int. J. Solids Struct.*, **27**(1991), 1879.
- (6) Lekhnitskii, S. G., *Anisotropic Plates*, (1968), 19, Gordon and Breach.
- (7) Muskhelishvili, N. I., *Singular Integral Equations*, (1946), Moscow.
- (8) Chen, D. H., *Eng. Fract. Mech.*, 掲載予定.
- (9) Santare, M. H. and Keer, L. M., *J. Appl. Mech.*, **53**(1986), 382.