異種接合材の界面端における弾性特異応力場と小規模降伏状態*

岸本 喜久雄^{*1}, 萩原 強^{*2}, 小泉 堯^{*1}

Elastic Singular Stress Field and Small-Scale Yielding at Bonding Edge of Dissimilar Materials

Kikuo KISHIMOTO, Tsuyoshi HAGIHARA, and Takashi KOIZUMI

The elastic stress field and small-scale yielding behavior of a bimaterial plate are studied for the case when surface traction is free in the vicinity of the bonding edge. It is shown that the elastic singular fields at the bonding edge can be classified into three types depending on the combination of elastic properties and bonding angles, i. e. the characteristic equation determining the strength of the singularity has (1) one real value, (2) two real values and (3) complex value. Suitable expressions of the singular stress field which are consistent with those of crack problems are presented. Finite-element analyses have been performed and features of the stress distribution and shape of plastic zone are discussed for each of the three cases.

Key Words: Fracture Mechanics, Dissimilar Material, Stress Singularity, Plastic Region, Finite-Element Method

1. 緒 言

材料の機能を向上させる目的から種々の材料の接合が活発に行われている。このような部材の接合端部には、一般に応力集中を生じ、このことが原因となって破壊を生じることがある。そこで、異種接合材に対して、弾性特異応力場に着目した強度評価が活発に試みられている⁽¹⁾。すなわち、実在の材料においては破壊に先立って塑性域が形成されるが、その寸法が十分小さな場合には、依然として、弾性特異応力場がき裂先端における応力・ひずみ場を支配していると考え、き裂問題における線形破壊力学の取り扱いと同様に弾性特異応力場による強度評価が試みられている。

このような弾性特異場に基づく取り扱いが可能となる小規模降伏状態は、厳密には塑性域寸法が無限小の場合に対して成立するものであるが、き裂問題の場合には、実際には比較的大きな塑性域が生じて成立することが知られており⁽²⁾、このことが線形破壊力学の実用性を高めている。しかしながら、異種接合材の問題においては、その接合端部に生じる塑性変形についての研究は少なく⁽³⁾、小規模降伏の成立条件をはじめとして、未解明の問題が多く残されている。また、塑性変形挙動を明らかにすることは、接合材の破壊のメカニズムを検討していく上でも重要と考えられる。そこで、本研究では、表面で応力が自由な接合端の場合について、弾性特異応力場をき裂問題を含めた形で分

類するとともに、弾性特異場から推定される塑性域形状と弾塑性有限解析結果とを比較することにより接合端に生じる塑性域の特徴を明らかにすることを目的とする。

2. 弾性特異場

2.1 界面端近傍の応力・変位場と特性方程式 図1に示すような異材接合端部を考える。ここで、界面をはさんで上側の材料を材料I、下側の材料を材料IIとし、それぞれの材料の横弾性係数を μ^j 、ポアソン比を ν^j ($j = I, II$)で表す。図に示すような接合端を原点とする極座標 (r, θ) を導入すると、2次元弾性体の変位場 u_r, u_θ および応力場 $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ は Goursat の応力関数 $\phi(z)^j, \psi(z)^j, z = re^{i\theta}$ を用いて次式のように表すことができる⁽⁴⁾。

$$2\mu^j(u_r + iu_\theta)^j = e^{-i\theta} \{ \kappa^j \phi^j - z(\overline{\phi^j})' - \overline{\psi^j} \} \quad (1)$$

$$(\sigma_\theta - i\tau_{r\theta})^j = (\overline{\phi^j})' + (\phi^j)' + e^{-2i\theta} \{ z(\overline{\phi^j})'' + (\overline{\psi^j})' \} \quad (2)$$

$$(\sigma_r + i\tau_{r\theta})^j = (\overline{\phi^j})' + (\phi^j)' - e^{-2i\theta} \{ z(\overline{\phi^j})'' + (\overline{\psi^j})' \} \quad (3)$$

ここで、

$$\kappa^j = \begin{cases} (3 - \nu^j)/(1 + \nu^j) & \text{: 平面応力状態} \\ 3 - 4\nu^j & \text{: 平面ひずみ状態} \end{cases} \quad (4)$$

である。界面は完全接合であり、また、原点付近に外力は作用せず自由境界であるとする、境界条件は次の4式で与えられる。

$$(u_r + iu_\theta)_{\theta=0}^I = (u_r + iu_\theta)_{\theta=0}^{II} \quad (5)$$

$$(\sigma_\theta - i\tau_{r\theta})_{\theta=0}^I = (\sigma_\theta - i\tau_{r\theta})_{\theta=0}^{II} \quad (6)$$

* 原稿受付 平成6年3月14日。

^{*1} 正員, 東京工業大学工学部 (〒152 東京都目黒区大岡山2-12-1)。^{*2} 正員, 松下通信工業(株) (〒226 横浜市緑区佐江戸町600)。

図1 異種接合材の界面端モデル

$$(\sigma_\theta - i\tau_{r\theta})_{\theta=\theta'}^I = 0 \quad (7)$$

$$(\sigma_\theta - i\tau_{r\theta})_{\theta=\theta''}^{II} = 0 \quad (8)$$

界面端の特異場を求めるために、複素応力関数を次のように置く。

$$\phi^j = a_1^j z^p K + \overline{a_2^j} z^{\overline{p}} \overline{K}, \quad \psi^j = b_1^j z^p K + \overline{b_2^j} z^{\overline{p}} \overline{K} \quad (9)$$

ここで、 $a_1^j, a_2^j, b_1^j, b_2^j$ は複素係数であり、 $p = \Re p + i\Im p$ は特異性の大きさを表す複素指数である。また、 $\Im p \geq 0$ とする（このように仮定しても一般性は失われない）。また、 K は複素応力拡大係数であり、

$$K = (K_1 - iK_2)/\sqrt{2\pi} \quad (10)$$

で与えられる。ここで、均質材中のき裂問題において、 K_1, K_2 がそれぞれモードI、モードIIの応力拡大係数 K_I, K_{II} に対応するように K を定めている。

式(9)を式(1)～(3)に代入することにより、界面端近傍の応力・変位場は次式の様に表すことができる。

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\mu^j(u_r + iu_\theta)^j/r^{\Re p} \\ (\sigma_\theta - i\tau_{r\theta})^j/r^{\Re p-1} \\ (\sigma_r + i\tau_{r\theta})^j/r^{\Re p-1} \end{array} \right\} = \left([F_1^j(\theta; p)] \begin{bmatrix} a_1^j & 0 \\ a_2^j & 0 \\ b_1^j & 0 \\ b_2^j & 0 \end{bmatrix} + [F_2^j(\theta; p)] \begin{bmatrix} 0 & \overline{a_1^j} \\ 0 & \overline{a_2^j} \\ 0 & \overline{b_1^j} \\ 0 & \overline{b_2^j} \end{bmatrix} \right) \left\{ \begin{array}{l} K r^{i\Im p} \\ \overline{K} r^{-i\Im p} \end{array} \right\} \quad (11)$$

となる。ただし、

$$[F_1^j(\theta; p)] = \begin{bmatrix} \kappa^j e^{i\theta(p-1)} & -pe^{-i\theta(p-1)} & 0 & -e^{-i\theta(p+1)} \\ pe^{i\theta(p-1)} & p^2 e^{-i\theta(p-1)} & 0 & pe^{-i\theta(p+1)} \\ pe^{i\theta(p-1)} & -(p^2 - 2p)e^{-i\theta(p-1)} & 0 & -pe^{-i\theta(p+1)} \end{bmatrix}$$

$$[F_2^j(\theta; p)] = \begin{bmatrix} -\overline{p}e^{-i\theta(\overline{p}-1)} & \kappa^j e^{i\theta(\overline{p}-1)} & -e^{-i\theta(\overline{p}+1)} & 0 \\ \overline{p}^2 e^{-i\theta(\overline{p}-1)} & \overline{p}e^{i\theta(\overline{p}-1)} & \overline{p}e^{-i\theta(\overline{p}+1)} & 0 \\ -(\overline{p}^2 - 2\overline{p})e^{-i\theta(\overline{p}-1)} & \overline{p}e^{i\theta(\overline{p}-1)} & -\overline{p}e^{-i\theta(\overline{p}+1)} & 0 \end{bmatrix}$$

である。

式(11)を式(5)～(8)の境界条件式に代入して整理すると、係数 $a_1^j, a_2^j, b_1^j, b_2^j$ についての関係式が得られる。そ

れらの式より $b_1^I \sim b_2^I$ を消去すると、 $a_1^I \sim a_2^I$ に対して次式のような方程式が得られる。

$$[C] \begin{Bmatrix} a_1^I \\ a_1^{II} \\ a_2^I \\ a_2^{II} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (12)$$

ここで、 $[C]$ は次のような4行4列のマトリクスである。

$$\begin{bmatrix} \kappa^I + e^{2i\theta^I p} & -(\kappa^{II} + e^{-2i\theta^{II} p})\mu^I/\mu^{II} & p(e^{2i\theta^I} - 1) & -p(e^{-2i\theta^{II}} - 1)\mu^I/\mu^{II} \\ (e^{2i\theta^I p} - 1) & -(e^{-2i\theta^{II} p} - 1) & p(e^{2i\theta^I} - 1) & -p(e^{-2i\theta^{II}} - 1) \\ p(e^{-2i\theta^I} - 1) & -p(e^{2i\theta^{II}} - 1)\mu^I/\mu^{II} & \kappa^I + e^{-2i\theta^I p} & -(\kappa^{II} + e^{2i\theta^{II} p})\mu^I/\mu^{II} \\ p(e^{-2i\theta^I} - 1) & -p(e^{2i\theta^{II}} - 1) & (e^{-2i\theta^I p} - 1) & -(e^{2i\theta^{II} p} - 1) \end{bmatrix} \quad (13)$$

a_1^j, a_2^j がゼロ以外の解を持つためには、 $\det[C] = 0$ である必要がある。すなわち、 $\det[C] = 0$ は p に対する特性方程式となっており、両材の横弾性係数の比、ポアソン比および界面端における両材の接合角に依存して根の性質が定まる⁽⁵⁾。

2.2 弾性特異応力場の分類 $\theta^I = \theta^{II} = \pi$ となるき裂問題の場合には、マトリックス $[C]$ は、

$$\begin{bmatrix} \kappa^I + e^{2i\pi p} & -\mu^I/\mu^{II}(\kappa^{II} + e^{-2i\pi p}) & 0 & 0 \\ (e^{2i\pi p} - 1) & -(e^{-2i\pi p} - 1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa^I + e^{-2i\pi p} & -\mu^I/\mu^{II}(\kappa^{II} + e^{2i\pi p}) \\ 0 & 0 & (e^{-2i\pi p} - 1) & -(e^{2i\pi p} - 1) \end{bmatrix} \quad (14)$$

となるので、左上および右下の非負の成分を持った2行2列の部分マトリックスをそれぞれ $[C_1], [C_2]$ で表すと式(12)は、

$$[C_1] \begin{Bmatrix} a_1^I \\ a_1^{II} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad [C_2] \begin{Bmatrix} a_2^I \\ a_2^{II} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (15)$$

と分離できる。したがって、 a_1^j, a_2^j が非ゼロとなるための条件は、 $\det[C_1] = 0$ または $\det[C_2] = 0$ となる。これより、応力が特異性を持つ、 $0 \leq \Re p \leq 1$ を満足する p の値は、

$$p = \frac{1}{2} - i\epsilon \quad (16)$$

と求められる。ここで、 ϵ は複合材料パラメータであり

$$\epsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\kappa^I/\mu^I + 1/\mu^{II}}{\kappa^{II}/\mu^{II} + 1/\mu^I} \quad (17)$$

で与えられる。なお、特性方程式の根としては、共役な値 $p = \frac{1}{2} + i\epsilon$ も存在するが、得られる特異応力場は同一なものとなる。また、均質材では $\epsilon = 0$ となるので p は実根（重根）となる。一方、 $\theta^I \neq \pi$ または $\theta^{II} \neq \pi$ のV字形切欠きの場合は、特性方程式 $\det[C] = 0$ が $0 \leq \Re p \leq 1$ の範囲に根を持つ場合に限定すると、1実根を持つ場合、2実根を持つ場合、複素根を持つ場合に分類することができる。

p が実根となる場合には、マトリックス $[C]$ の左上の2行2列と右下の2行2列の部分マトリックスおよび

右上の2行2列と左下の2行2列の部分マトリックスはそれぞれ互いに複素共役の関係となる。そのため、 K_1 と K_2 に対応する特異応力場は独立でなく、互いに相似形となることを示すことができる⁽⁷⁾。すなわち、V字形切欠きの場合にはき裂の場合とは異なり、1つの p の値に対しては一種類の特異応力場が対応し、開口型あるいは面内せん断型といった荷重形式に依存した特異場は存在しない。また、 p が複素根となる場合は、マトリックス $[C]$ に界面き裂の場合のような対称性は存在しないが、同様の形式の特異応力場が存在することを示すことができる。

上述のような式(11)より求められる特異応力場を列記すると以下ようになる。

(1) 均質材中のき裂の場合 ($\theta^I = \theta^{II} = \pi$)

$$\sigma_{ij}(\theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{Iij}(\theta) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} f_{IIij}(\theta) \quad (18)$$

ここで、 $K_I = K_1$ 、 $K_{II} = K_2$ である。

(2) 界面き裂の場合 ($\theta^I = \theta^{II} = \pi$)

$$\sigma_{ij}(\theta) = \Re \left\{ \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} r^{i\epsilon} F_{ij}^*(\theta) \right\} \quad (19)$$

ここで、

$$(\sigma_\theta + i\tau_\theta)_{\theta=0} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} r^{i\epsilon}, \quad K = K_1 + iK_2, \\ F_{ij}^*(\theta) = f_{ij}^*(\theta) + ig_{ij}^*(\theta)$$

である。上式は、Riceの表示式⁽⁶⁾に一致している。

(3) 特性方程式が1実根を持つ場合 (V字形切欠き)

$$\sigma_{ij}(\theta) = \frac{K}{\sqrt{2\pi r^\lambda}} f_{ij}^R(\theta) \quad (20)$$

ここで、

$$\sigma_\theta(0) = \frac{K}{\sqrt{2\pi r^\lambda}}, \quad \lambda = 1 - p$$

である。ただし、上述したように K_1 と K_2 に対応する特異応力場は独立でなくなるので、上式の K は式(10)で定義されたものとは異なっており、ここでは、あらためて特異性の大きさを表す実数のパラメータを K で表している。

(4) 特性方程式が2実根を持つ場合 (V字形切欠き)

$$\sigma_{ij}(\theta) = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r^{\lambda_1}}} f_{1ij}^R(\theta) + \frac{K_2}{\sqrt{2\pi r^{\lambda_2}}} f_{2ij}^R(\theta) \quad (21)$$

ただし、

$$\sigma_\theta(0) = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r^{\lambda_1}}} + \frac{K_2}{\sqrt{2\pi r^{\lambda_2}}}, \\ \lambda_1 = 1 - p_1, \quad \lambda_2 = 1 - p_2, \quad \lambda_1 > \lambda_2$$

である。なお、(3)の場合と同様の理由により、ここでは、 p のそれぞれの根に対する特異性の大きさを表すパラメータを、あらためて K_1, K_2 で表している。

(a) 条件1 (接合界面で引張力が支配的な場合)

(b) 条件2 (接合界面でせん断力が支配的な場合)

図2 異種接合材モデルと負荷条件

(5) 特性方程式が複素根を持つ場合 (V字形切欠き)

$$\sigma_{ij}(\theta) = \Re \left\{ \frac{K}{\sqrt{2\pi r^\lambda}} r^{-i3p} F_{ij}^C(\theta) \right\} \quad (22)$$

ただし、

$$\sigma_\theta(0) = \Re \left\{ \frac{K}{\sqrt{2\pi r^\lambda}} r^{-i3p} \right\}, \quad K = K_1 + iK_2, \\ F_{ij}^C(\theta) = f_{ij}^C(\theta) + ig_{ij}^C(\theta), \quad \lambda = 1 - \Re p$$

$f_{ij}^R(\theta)$ などの角度依存性を表す関数は、それぞれの p の値に対応して式(11)から求めることができる。本研究では、解析の途中で必要となるマトリックスの積や逆マトリックス演算を陽には行わずに数値計算により求めることとし、特異応力場の角度依存性を求める計算機プログラムを作成した。また、特異性の強さを表す K などのパラメータを一意的なものとするためには、角度依存性を表す関数を正規化する必要があるが、ここでは上記のように $\theta = 0$ で σ_θ に対する関数が1となるように正規化している。以下では、(3)～(5)のV字形切欠きの場合についてそれぞれ検討を行う。

3. 1 実根の場合

3.1 有限要素解析 前節で示したように、特性方程式 $\det[C] = 0$ が1実根を持つ場合の特異点近傍の弾性特異場は、ただ1つの応力拡大係数によって支配される。そこで、荷重形式の影響について調べるために、界面において引張荷重が支配的な場合とせん断荷重が支配的な場合について有限要素解析を行った。

図2(a)(b)に解析モデルを示す。界面端における両材の角度は共に 90° としている。それぞれのモデルにお

いて、界面では引張荷重あるいはせん断荷重が支配的となっている。両材とも $\nu = 0.333$ とし、縦弾性係数の比を $E^I/E^H = 10$ とした。また、弾塑性有限要素解析では、Mises 材を仮定し、応力-ひずみ関係として n 乗硬化則 ($n = 0.1$) を採用した。要素分割には 8 節点アイソパラメトリック要素を用い、最小要素長さは $4.0 \times 10^{-6} W$ とした。なお、平面ひずみ状態を仮定した。

3.2 弾性応力分布 界面上の円周方向応力 σ_θ の弾性解析結果を条件 1, 2 の場合について、それぞれ図 3, 4 に示す。縦軸は応力を降伏応力で無次元化し、横軸は特異点からの距離 r を K を用いて無次元化している。図中の $W/(K/\sigma_0)^{1/\lambda}$ は荷重パラメータで、試験片の高さ W を応力拡大係数 K で除していることから、荷重が高いほど小さな値となる。この値と図の横軸の値の比をとることによって、試験片高さに対する特異点からの距離 r の比が求められる。図 3 と図 4 では荷重パラメータの大きさが異なっているために横軸の目盛りに差があるが、試験片高さに対する特異点からの距離 r に関しては両図はほぼ同一となっている。

それぞれの図においてプロット点は有限要素解である。また、実線は弾性特異解であり、傾き 0.2168 は、本解析モデルに対する特異性の大きさを表す指数 λ の値である。条件 1 の場合 (図 3) には、広い範囲で有限要素解が弾性特異解の実線に一致していることが分かる。また、条件 2 の場合 (図 4) においても、有限要素解は弾性特異解の実線に一致しており、荷重形式に依存しない弾性特異場が存在することが分かる。しかし、両者の場合を比較すると、条件 2 の場合の特異場の存在する範囲は、特異点からの距離で約 1/10 の狭い領域に限られており、荷重形式の影響を受けることが分かる。

条件 1 の場合について、界面端近傍の各応力成分の周方向分布 $f_{ij}(\theta)$ を図 5 示す。実線の弾性特異解とプロット点の有限要素解が良く一致していることが分かる。なお、条件 2 の場合についても、接合点近傍では同様の結果が得られたが、接合端から離れた位置では条件 1 の場合と比較して弾性特異場からの逸脱が顕著となっている (図 6 参照)。

3.3 塑性域形状 特異点近傍の相当応力の弾性特異解は、他の応力成分と同様に次式で表すことが出来る。

$$\sigma_{eq} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}^\lambda} f_{eq}(\theta) \quad (23)$$

そこで、相当応力を降伏応力 σ_{ys} に等値し、塑性域寸法 r_p を推定すると、次式のようになる。

$$r_p / (K/\sigma_{ys})^{1/\lambda} = \left(\frac{f_{eq}(\theta)}{\sqrt{2\pi}} \right)^{1/\lambda} \quad (24)$$

図3 接合界面上の σ_θ の分布 (条件 1)

図4 接合界面上の σ_θ の分布 (条件 2)

図5 周方向応力分布 (条件 1)

図6 周方向応力分布 (条件 2)

図7 塑性域形状 (条件1: $\sigma_{ys}^I = \sigma_{ys}^{II} = \sigma_0$)

図8 塑性域形状 (条件1: $\sigma_{ys}^I = 2\sigma_{ys}^{II} = \sigma_0$)

図9 塑性域形状 (条件2: $\sigma_{ys}^I = \sigma_{ys}^{II} = \sigma_0$)

塑性域寸法 r_p は、 $(K/\sigma_{ys})^{1/\lambda}$ に比例して大きくなること
が分かる。したがって、荷重パラメータ $W/(K/\sigma_0)^{1/\lambda}$ は、
試験片幅 W と塑性域寸法の比を表すパラメータとなっ
ている。

界面で引張荷重が支配的な場合について塑性域形状
の有限解析結果を、式(24)から推定される形状ととも
に図7,8に示す。両図はそれぞれ、 $\sigma_{ys}^I = \sigma_{ys}^{II} = \sigma_0$ および
 $\sigma_{ys}^I = 2\sigma_{ys}^{II} = 2\sigma_0$ とした場合に対する結果である。実線
が式(24)から推定される塑性域形状、プロット点が有
限要素解である。両者の結果は良く一致しており、小
規模降伏状態が成立していることが分かる。

図9に界面でせん断荷重が支配的な場合についての
結果を示す。塑性域寸法が試験片幅に対してかなり小
さい段階から、弾性特異解から推定した塑性域形状と
有限要素解に差が生じており、小規模降伏状態の成立
条件が荷重形式の影響を受けることを示唆している。

4. 2 実根の場合

4.1 有限要素解析 異種接合材のモデルとして界面端
における両材の角度が共に 160° の接合材を想定し、境界
条件としては、接合材上端に縦方向の強制変位を与え、
平面ひずみ状態を仮定した。8 接点アイソパラメトリッ
ク要素により要素分割し、最小要素長さは $2.0 \times 10^{-6}W$ と
した。前節と同様に n 乗硬化則に従う Mises 材を仮定し
た ($n = 0.1$)。解析は、縦弾性係数の比を $E^I/E^{II} = 1.5$ と
した条件3 ($p_1 = 0.5064, p_2 = 0.6350$) および $E^I/E^{II} = 5$
とした条件4 ($p_1 = 0.5599, p_2 = 0.5788$) の場合につい
て行った。なお、 $\nu = 0.333$ とした。

4.2 弾性応力分布 界面上の円周方向応力 σ_θ の弾性解
析結果を、 p_1 と p_2 の値が離れている条件3の場合につ
いて図10に示す。図中の実線は式(22)の第1項目に対
する弾性特異解を表しており、有限要素解は広い範囲
でこれと一致していることが分かる。

接合端から異なる位置における各応力成分の周方向
分布 $f_{ij}(\theta)$ を図11,12に示す。図中の曲線は弾性特異解

図10 接合界面上の σ_θ の分布 (条件3)

図11 周方向応力分布 ($r/W = 8.083 \times 10^{-6}$, 条件3)

図12 周方向応力分布 ($r/W = 1.330 \times 10^{-2}$, 条件3)

図13 接合界面上の σ_θ の分布(条件4) 図14 周方向応力分布 ($r/W = 8.083 \times 10^{-6}$, 条件4) 図15 周方向応力分布 ($r/W = 1.330 \times 10^{-2}$, 条件4)

を表す。接合端からの距離に差があるものの、ほぼ同一の周方向分布となっており、これらの結果からも条件3の場合には、特異場の第1項目が支配的であることが分かる。

つぎに、 p_1 と p_2 の値が近い条件4の場合についての界面上の円周方向応力分布を図13に示す。式(22)の第1項を表す実線と有限要素解に差が生じており、第2項目の影響があらわれていることが分かる。また、接合端から異なる位置における各応力成分の周方向分布 $f_{ij}(\theta)$ を図14,15に示す。図中の曲線は弾性特異解を表す。接合端からの距離に差があると周方向分布にも相違が生じることが分かる。

4.3 塑性域形状 p_1 と p_2 の値が離れている条件3の場

合の塑性域形状を図16に示す。実線は弾性特異応力解より相当応力 σ_{eq} を求め、 σ_{eq} が降伏応力 σ_{ys} になる塑性域寸法 $r_p(\theta)$ を数値計算により求めたものである。図より弾性特異解から推定した塑性域形状は有限要素解とほぼ一致しており、また、荷重の大きさによらず、ほぼ一定の形状をしていることが分かる。

一方、 p_1 と p_2 の値が近い条件4の場合の塑性域形状を図17に示す。塑性域は荷重が増加するにつれて、反時計回りに回転しており、塑性域の形状に関しても、 p_2 に対応した特異項の影響が無視できないことを示している。

5. 複素根の場合

5.1 有限要素解析 前節の場合と同様に界面端における接合角度が共に 160° の場合について弾塑性有限要素解析を行った。ただし、 $E^I/E^{II} = 10$ 、 $\nu = 0.333$ 、 $\sigma_{ys}^I = \sigma_{ys}^{II} = \sigma_0$ 、 $n = 0.1$ とした。このとき、 $p = 0.5686 + 0.047i$ である(条件5)。

5.2 弾性応力分布 界面上の円周方向応力の弾性解析結果を図18に示す。図中の実線は p の実部に対する弾性特異解を表している。接合端から離れると有限要素解と実線がやや離れており、 p の虚部の影響が表れていることが分かる。なお、図中の $\|K\|$ は K の絶対値を表す。

接合端から異なる位置における各応力成分の周方向分布 $f_{ij}(\theta)$ を図19,20に示す。図中の曲線は弾性特異解を表す。前節の場合と同様に接合端からの距離に差があると周方向分布にも相違が生じている。

5.3 塑性域形状 式(22)は、次のように書くことができる。

$$\sigma_{ij}(\theta) = \frac{\|K\| \|F_{ij}^c(\theta)\| \cos(\phi - \Im p \ln r + \psi_{ij}(\theta))}{\sqrt{2\pi r^\lambda}} \quad (25)$$

ただし、 ϕ および $\psi_{ij}(\theta)$ はそれぞれ K および $F_{ij}^c(\theta)$ の偏角である。ここで、 $\xi = \phi - \Im p \ln r$ と置くと、上式は次式のように書き換えることができる。

$$\sigma_{ij}(\theta) = \frac{\|K\| \|F_{ij}^c(\theta)\| \cos(\xi + \psi_{ij}(\theta))}{\sqrt{2\pi r^\lambda}} \quad (26)$$

上式より、相当応力 σ_{eq} は、次式のように書き表すことができる。

$$\sigma_{eq}(\theta) = \frac{\|K\| H(\theta, \xi)}{\sqrt{2\pi r^\lambda}} \quad (27)$$

ここで、角度依存性を表す関数 $H(\theta, \xi)$ は、式(26)より、 ξ の周期 π で変化することが分かる。

σ_{eq} を降伏応力 σ_{ys} に等置し、塑性域寸法 $r_p(\theta)$ を推定すると、

$$r_p(\theta) = \left\{ \frac{\|K\| H(\theta, \xi_p(\theta))}{\sqrt{2\pi \sigma_{ys}}} \right\}^{1/\lambda} \quad (28)$$

図16 塑性域形状 (条件3)

図17 塑性域形状 (条件4)

となる。ただし、

$$\xi_p(\theta) = \phi - 3p \ln r_p(\theta) \quad (29)$$

である。ここで、界面き裂の場合⁽⁸⁾と同様に次式のような位相パラメータ ξ_o を定義する。

$$\xi_o \equiv \phi - \frac{3p}{\lambda} \ln \left\{ \frac{\|K\|}{\sigma_{ys}} \right\} \quad (30)$$

式(28)および式(29)より

$$\xi_p(\theta) = \xi_o - \frac{3p}{\lambda} \ln \left\{ \frac{H(\theta, \xi_p(\theta))}{\sqrt{2\pi}} \right\} \quad (31)$$

$$\simeq \xi_o + \frac{3p}{\lambda} \ln \sqrt{2\pi} \quad (32)$$

となるので、結局、式(28)は次式のように書くことができる。

$$r_p(\theta) = \left\{ \frac{\|K\| H(\theta, \xi_o)}{\sqrt{2\pi} \sigma_{ys}} \right\}^{1/\lambda} \quad (33)$$

こうして得られる塑性域形状は、位相パラメータ ξ_o の周期 π で変化することが分かる。

有限要素解析によって得られた塑性域形状を図21に示す。実線は、式(28)より求めた弾性特異解から推定される塑性域形状である。弾性特異解から推定される塑性域形状と有限要素解は良く一致しており、位相パラメータ ξ_o の増加とともに回転していることが確認さ

図18 接合界面上の σ_θ の分布 (条件5) 図19 周方向応力分布 ($r/W = 8.083 \times 10^{-6}$, 条件5)

れる。また、塑性域形状は、荷重が小さい場合には混合モード荷重下のき裂の場合⁽⁹⁾に、荷重が大きい場合には開口型き裂の場合に類似している。

5.4 接合端近傍の変形 図22に接合端近傍の変形図を示す。荷重が小さい場合には上側の材料の変形が大きく混合モード荷重下の均質材中のき裂先端⁽⁹⁾と類似の形状となっている。それに対して、荷重が大きくなると変形はほぼ上下対称となり開口型のき裂先端の形状に近づいており、塑性域の形状変化と対応する結果となっている。

図20 周方向応力分布 ($r/W = 1.330 \times 10^{-2}$, 条件5)

図21 塑性域形状 (条件5)

図22 接合端近傍の変形図 (条件5)

6. 結 言

本研究では、異材接合端部に生じる応力の特異性の指数に関する特性方程式が、(1) 1・実根を持つ場合、(2) 2実根を持つ場合、(3) 複素根を持つ場合の3通りについて、弾性特異応力場の円周方向分布を求め、弾性有限要素解析結果と比較することにより、それぞれの特異場の相違を明らかにするとともに、弾性特異応力場から推定される塑性域形状と弾塑性有限解析結果を比較することにより、それぞれの場合における塑性変形挙動の特徴を明らかにした。

文 献

- (1) 例えば、結城編著「界面の力学」(1993) 培風館。
- (2) 例えば、K.Kazawa, K.Kishimoto, S.Aoki, *Int.J.Fracture*, **43** (1990), 287.
- (3) 例えば、岸本, 杉田, 納富, 小泉, **58-550,A**(1992), 887.
- (4) Carpenter, W.C. and Byers, C., *Int.J.Fracture*, **35** (1987), 245.
- (5) Bogy, D.B., *Trans.ASME, J.Appl.Mech.*, **38** (1971), 377.
- (6) Rice, J.R., *Trans.ASME, J.Appl.Mech.*, **55** (1988), 98.
- (7) 陳, 西谷, 機論, **58-547,A**, (1992), 457.
- (8) Zywickz, E. and Parks, D.M., *Trans.ASME, J.Appl.Mech.*, **56** (1989), 577.
- (9) 青木, 岸本, 吉田, 坂田, 機論, **52-481,A**, (1986), 2249.