シェル構造の大変形弾塑性設計感度解析法と構造最適化への応用*

山崎 光悦^{*1}, 小林 徹^{*2}Sensitivity Analysis of Large Deformed Elastoplastic Shell Structures
and Its Application to Structural Optimization

Koetsu YAMAZAKI and Toru KOBAYASHI

An exact and direct sensitivity analysis technique of large deformation and buckling load for elastoplastic material governed by a bilinear constitutive law has been developed based on the implicit differentiation method. The sensitivity equation of the displacement increments has been derived from the Newton-Raphson iteration scheme, and a practical pseudo loading terms due to the sensitivities of the stiffness matrices and the internal load vector have been formulated by considering discontinuity of the displacement sensitivity at the yielding point. The validity of the formulation suggested here was confirmed by comparing the calculated results of several examples with those of the theory and the finite difference method. The sensitivity analysis technique suggested here was also applied to determine optimum shapes of minimum weight under the buckling load constraints.

Key Words: Optimum Design, Sensitivity Analysis, Finite Element Method, Plasticity, Large Deformation, Shell Structure, Buckling, Minimum Weight Design

1. 緒 言

板殻で構成される多くの構造物は、大きな変形の後に座屈崩壊して破壊に至る。その弾塑性大変形過程を知り、座屈強度の最大化などの構造最適設計を試みることは工学設計において今日極めて重要な課題の一つである。最近、衝撃問題や材料非線形問題への構造最適設計法の適用が関心を集め、それらの最適設計において重要な弾塑性体と動的応答の設計感度解析法が検討されている。非線形問題の設計感度解析法として、離散化した増分形構造方程式を設計変数で直接微分して得られる感度方程式を解く直接微分法や差分法に基づく解法^{(1)~(3)}、変分法に基礎をおく解法⁽⁴⁾が検討されており、著者らの一人も材料非線形問題における直線硬化形材料の設計感度の不連続性の取扱いと形状最適化への応用について検討を加えている⁽⁵⁾。

そこで本研究では、板殻構造の大変形弾塑性変形挙動を対象に、シェル要素を用いたニュートン・ラプソン形の剛性方程式を基礎とする直接微分法による弾塑性大変形問題の設計感度解析法の定式化を示し、特に

先に連続体について提案した等方直線硬化形の非線形材料の不連続量の取扱い法の適用性について検討する。次に設計感度解析問題に適用した数値例を示し、理論解あるいは差分法による設計感度との比較によりその有効性を検討する。また提案する設計感度解析法を具体的な最適設計問題に適用した数値例も合わせて示す。

2. 設計感度解析法

2・1 ニュートン・ラプソン形解法⁽⁶⁾ 大変形問題における増分形の剛性方程式に対するニュートン・ラプソンの解法は繰返し数を i として

$$([K] + [K_G])\{\Delta u^i\} = \{\Delta F\} - \{\Delta R^i\} = \{g\} \cdots (1)$$

ここで $\{\Delta F\}$ は増分荷重, $\{\Delta u^i\}$ は増分変位, $[K]$ は線形剛性マトリックス, $[K_G]$ は幾何剛性マトリックスと呼ばれ、要素内の発生応力によって評価されるマトリックス, $\{\Delta R^i\}$ は要素内応力増分ベクトル $\{\Delta \sigma^i\}$ から算出される内部節点力ベクトル増分で、それぞれ以下のように与えられる。

$$[K] = \sum_e \int_V [B]^T [D] [B] dV \cdots \cdots \cdots (2)$$

$$[K_G] = \sum_e \int_V [B_N]^T [\sigma] [B_N] dV \cdots \cdots \cdots (3)$$

* 原稿受付 平成 6 年 3 月 28 日。

*¹ 正員, 金沢大学工学部 (〒920 金沢市小立野 2-40-20)。*² 准員, (株)明電舎 (〒100 東京都千代田区大手町 2-2-1)。

$$\{\Delta R^i\} = \sum_e \int_V [B]^T \{\Delta \sigma^i\} dV + [K_G] \{\Delta u^i\} \cdots (4)$$

図1に示すように式(1)の右辺ベクトル $\{g\}$ は誤差に相当し、この $\{g\}$ が零とみなせるまで繰返し解かれる。 $[B]$ はひずみ速度-節点速度マトリックス、 $[B_N]$ は速度こう配-節点速度マトリックス、 $[D]$ は応力-ひずみマトリックス、 $[\sigma]$ は応力マトリックスを表す。また $\sum_e$ は要素に関する和を表す。増分荷重 ΔF に対応する変位増分 ΔU はニュートン・ラプソンの繰返しにおける増分変位の和として次式で定まる。

$$\{\Delta U\} = \sum_i \{\Delta u^i\} \cdots (5)$$

非線形材料の材料特性として、ミーゼスの降伏条件と直線硬化形の応力-ひずみ関係を仮定した。降伏応力を σ_Y 、座標応力を $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ とすると、

$$\sigma_Y^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)$$

$$-(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x)$$

$$\sigma_Y = \sigma_{Y0} + H' \bar{\epsilon}_p, H' = EE_T / (E - E_T)$$

$$\cdots (6)$$

ここに、 σ_{Y0} を初期降伏応力、 $\bar{\epsilon}_p$ を相当塑性ひずみ、 E をヤング率、 E_T をひずみ硬化率とする。

2.2 設計感度解析法 直接微分法により変位感度を求めるために、式(1)を設計変数 b で微分すると次式を得る。

$$\begin{aligned} & ([K] + [K_G]) \frac{\partial \{\Delta u^i\}}{\partial b} \\ & = - \frac{\partial \{R^i\}}{\partial b} - \frac{\partial ([K] + [K_G])}{\partial b} \{\Delta u^i\} \cdots (7) \end{aligned}$$

ただし、増分荷重の設計変数による変化はないものと

図1 ニュートン・ラプソン収束解法

して零とおいた。式(7)は式(1)のニュートン・ラプソンの繰返し過程で毎回解く必要があり、変位感度増分を繰返しごとに足し込むことによって変位感度が求められる。式(7)は式(1)が LDL^T 分解法などによって解かれていれば、右辺の疑似荷重ベクトル項を計算し、代入過程のみの実施により効率よく解くことができる。疑似荷重ベクトルのうち剛性マトリックスおよび幾何剛性マトリックスの感度 $\partial([K] + [K_G]) / \partial b$ と、内部節点力ベクトルの感度 $\partial\{R^i\} / \partial b$ が計算できれば、式(1)を解いて得られた変位増分を用いて式(7)の右辺ベクトルの計算が可能となる。また構造解析と同時に感度解析を行うことができるので、かなりの同一計算を避けることができ効率的な計算が可能である。

式(2)～(4)より、式(7)右辺の疑似荷重ベクトルの評価に必要な諸量の具体的な微分式を表記すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial [K]}{\partial b} &= \sum_e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \left(\frac{\partial [B]}{\partial b} [D] [B] + [B]^T \frac{\partial [D]}{\partial b} [B] + [B]^T [D] \frac{\partial [B]}{\partial b} \right) |J| + [B]^T [D] [B] \frac{\partial |J|}{\partial b} \right\} d\xi d\eta d\zeta \\ &\cdots (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial [K_G]}{\partial b} &= \sum_e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \left(\frac{\partial [B_N]}{\partial b} [\sigma] [B_N] + [B_N]^T \frac{\partial [\sigma]}{\partial b} [B_N] + [B_N]^T [\sigma] \frac{\partial [B_N]}{\partial b} \right) |J| \right. \\ &\quad \left. + [B_N]^T [\sigma] [B_N] \frac{\partial |J|}{\partial b} \right\} d\xi d\eta d\zeta \cdots (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \{\Delta R^i\}}{\partial b} &= \sum_e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \left(\frac{\partial [B]}{\partial b} \{\Delta \sigma^i\} + [B]^T \frac{\partial \{\Delta \sigma^i\}}{\partial b} \right) |J| + ([B]^T \{\Delta \sigma^i\}) \frac{\partial |J|}{\partial b} \right\} d\xi d\eta d\zeta + \frac{\partial [K_G]}{\partial b} \{\Delta u^i\} \\ &\quad + [K_G] \frac{\partial \{\Delta u^i\}}{\partial b} \cdots (10) \end{aligned}$$

ここで、 $|J|$ はヤコビ行列式、 ξ, η, ζ は数値積分のために要素内にとった正規座標 ($-1 \leq \xi, \eta, \zeta \leq 1$) とする。また $[D]$ の感度は塑性域にある積分点についてのみ加算するものとする。

なお、直接微分法による設計感度解析法は、増分解析を2回以上必要とする差分による解法と比べ、同一計算を避けることができ、極めて計算効率がよいが、その分プログラミングは複雑となる。

2.3 設計感度の不連続量の取扱い 本研究では材料特性をバイリニア形としたために降伏点において設計感度が不連続になり、構成式を直接微分する手法では設計感度を正確に評価することができない。そのため以下のような取扱いを弾性域から塑性域へ遷移する状態において考える⁽⁵⁾。そのときの応力増分を弾性応力増分 $\{\Delta \sigma_e\}$ と塑

性応力増分 $\{\Delta\sigma_p\}$ とに分離して表示すると内部節点力ベクトルは,

$$\begin{aligned}\{\Delta R^i\} &= \sum_e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 ([B]^T \{\Delta\sigma_e\} + [B]^T \{\Delta\sigma_p\}) |J| d\xi d\eta d\zeta + [K_c] \{\Delta u^i\} \\ &= \sum_e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 ([B]^T [D] [B] \mu \{\Delta U\} + [B]^T [D] [B] (1-\mu) \{\Delta U\}) |J| d\xi d\eta d\zeta + [K_c] \{\Delta u^i\} \quad \dots\dots\dots (11)\end{aligned}$$

ここに μ は変位増分 $\{\Delta U\}$ のうち弾性応力増分に寄与する変位増分の割合を示す。式(11)を設計変数で微分すると,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \{\Delta R^i\}}{\partial \mathbf{b}} &= \sum_e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \left(\frac{\partial [B]^T}{\partial \mathbf{b}} \{\Delta\sigma\} + [B]^T \frac{\partial \{\Delta\sigma\}}{\partial \mathbf{b}} + \mu^{-1} \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{b}} [B]^T \{\Delta\sigma_e\} - (1-\mu)^{-1} \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{b}} [B]^T \{\Delta\sigma_p\} \right) |J| \right. \\ &\quad \left. + ([B]^T \{\Delta\sigma_e\} + [B]^T \{\Delta\sigma_p\}) \frac{\partial |J|}{\partial \mathbf{b}} \right\} d\xi d\eta d\zeta + \frac{\partial [K_c]}{\partial \mathbf{b}} \{\Delta u^i\} + [K_c] \frac{\partial \{\Delta u^i\}}{\partial \mathbf{b}} \quad \dots\dots\dots (12)\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{b}} &= -\frac{\{c\}^T (\partial \{\sigma_M\} / \partial \mathbf{b})}{\{c\}^T \{\Delta\sigma\}}, \quad \{\sigma_M\} = \{\sigma_0\} + \mu [D] [B] \{\Delta U\}, \quad \{\Delta\sigma\} = [D] [B] \{\Delta U\} \\ \{c\} &= (2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z, 2\sigma_y - \sigma_z - \sigma_x, 2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y, 6\tau_{xy}, 6\tau_{yz}, 6\tau_{zx})^T / 2\sigma_Y \quad \dots\dots\dots (13)\end{aligned}$$

ただし、荷重増分前の弾性応力ベクトルを $\{\sigma_0\}$ 、降伏点での座標応力ベクトルを $\{\sigma_M\}$ とおいた。上記のような操作を初めて降伏した点についてのみ行うことによって降伏点における感度の不連続性を取扱うことが可能となり、設計感度を精度よく計算することができる。

3. 座屈荷重制約下での最小重量設計

変位制御形の増分解析を対象に、座屈荷重制約下での最小重量設計問題を考える。 N を設計変数の数として、板殻構造の形状、寸法パラメータに関与する設計変数を,

$$\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_N)^T \quad \dots\dots\dots (14)$$

と表す。密度を ρ 、体積を $V(\mathbf{b})$ とすると、目的関数は次式で評価される。

$$f = \rho V(\mathbf{b}) \rightarrow \min \quad \dots\dots\dots (15)$$

座屈荷重を P 、許容座屈荷重を P_{cr} と表し、座屈荷重制約条件を次のように課す。

$$g = P/P_{cr} - 1 \geq 0 \quad (i=1, \dots, N) \quad \dots\dots\dots (16)$$

また、設計変数の上下限制約を次のように与える。

$$b_i^L \leq b_i \leq b_i^U \quad \dots\dots\dots (17)$$

ここに、上添字 U, L は設計変数 b_i の上下限値を表す。

以上の設計問題は通常、数値計画法を用いて直接解かれるが、本研究では効率的な最適化を実施するために2章の設計感度解析法を基礎として目的関数を設計変数の二次式、制約条件を設計変数の一次式にテラ

表 1 反力感度

Disp.	$\partial P / \partial b (\times 10 N/mm)$		$\partial P / \partial t (\times 10 N/mm)$	
	DDM	Theory	DDM	Theory
w	-0.14980	-0.14980	-0.44939	-0.44940
$2w$	-0.21974	-0.21974	-0.65923	-0.65925
$3w$	-0.22476	-0.22476	-0.67428	-0.67430
$4w$	-0.17981	-0.17983	-0.53942	-0.53944
$5w$	-0.09986	-0.09985	-0.29955	-0.29956
$6w$	-0.799×10^{-4}	-1.072×10^{-4}	-0.322×10^{-3}	-0.322×10^{-3}
$7w$	0.10502	0.10507	0.31521	0.31521
$8w$	0.19997	0.20003	0.60008	0.60010
$9w$	0.26991	0.26998	0.80995	0.80995
$10w$	0.29987	0.29995	0.89983	0.89985

Enforced displacement increment : $w = 0.3mm$
DDM : Direct Differentiation Method

図 2 解析モデル

図 3 荷重-変位関係

展開して、その近似問題を設計変数の移動制約のもとに二次計画法で解く解法を採用した。

4. 数値解析例

3章までに述べた定式化を従って直接微分法による設計感度解析プログラムを作成し、例題に適用して解析精度を差分法(中央差分)による値または理論値と比較した結果を示す。また以上の感度解析法を用いた最小重量設計問題への応用も行った。なお要素は9節点二次のアイソパラメトリック・シェル要素を用い、シェル板厚方向に5点、シェル面内に9点のガウス積分により計算を行った。

4・1 幾何学的非線形問題 図2に示すようなモデル($l=60\text{ mm}$, $z=1.8\text{ mm}$, $b=6.0\text{ mm}$, $t=2.0\text{ mm}$)の設計感度解析を行った例を示す。解析モデルとして3要素21節点に分割し、変位増分解析を行った。図3に解析によって得られた荷重-変位関係を示す。表1に板厚 t と板幅 b を設計変数として求めた強制変位点での反力感度を理論値と比較して示す。ただし理論値⁽⁶⁾は、

$$P = \frac{Ebt}{l^3} \left(z^2 w + \frac{3}{2} zw^2 + \frac{1}{2} w^3 \right)$$

表2 変位感度と応力感度(板幅設計変数)

Moment	$\partial w / \partial b$		$\partial \sigma_M / \partial b (\times 10 \text{ N/mm}^3)$		
	DDM	FDM	G_i	DDM	FDM
2M	0.0644	0.0645	1	-0.6472	-0.6478
			2	-0.3847	-0.3850
			3	-4.13×10^{-4}	-3.65×10^{-4}
			4	-0.3843	-0.3847
			5	-0.6469	-0.6475
3M	0.1688	0.1686	①	-0.4182	-0.4169
			2	-1.0193	-1.0165
			3	-1.51×10^{-2}	-1.88×10^{-2}
			4	-1.0493	-1.0537
			⑤	-0.4260	-0.4259
3.2M	0.1975	0.1983	①	-0.4880	-0.4843
			2	-1.1858	-1.1728
			3	-2.10×10^{-2}	-3.47×10^{-2}
			4	-1.2279	-1.2461
			⑤	-0.4992	-0.5011

$G_{(i=1-5)}$: Gauss Points
 $M = 238 \text{ Nmm}$

図4 曲げモーメントを受ける片持ばり

を設計変数で微分した次式より求めた。

$$\frac{\partial P}{\partial b} = \frac{P}{b} \cdot \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{P}{t}$$

表1より、理論値とのよい一致を示していることが了解されよう。

4・2 材料非線形問題 図4に示すような曲げモーメントを受ける片持ばりの設計感度解析を行った例を示す。各寸法は以下の値とした。

$$l=60\text{ mm}, b=1.0\text{ mm}, t=2.0\text{ mm}$$

材料定数はヤング率 $E=200\text{ GPa}$, ポアソン比 $\nu=0.3$, ひずみ硬化率 $E_T=50\text{ GPa}$, 初期降伏応力 $\sigma_{Y0}=90\text{ MPa}$ とし、解析モデルとして3要素21節点に分割し、荷重増分解析を行った。長手方向中央での板厚方

表3 変位感度と応力感度(板厚設計変数)

Moment	$\partial w / \partial t$		$\partial \sigma_M / \partial t (\times 10 \text{ N/mm}^3)$		
	DDM	FDM	G_i	DDM	FDM
2M	0.9511	0.9515	1	-6.4763	-6.4756
			2	-3.8491	-3.8488
			3	-3.34×10^{-3}	-3.00×10^{-3}
			4	-3.8456	-3.8445
			5	-6.4729	-6.4713
3M	2.1571	2.1491	①	-4.2655	-4.2704
			2	-10.529	-10.582
			3	-0.1811	-0.2416
			4	-10.171	-10.112
			⑤	-4.1735	-4.1556
3.2M	2.5748	2.5739	①	-5.0040	-5.0327
			2	-12.345	-12.510
			3	-0.2767	-0.4641
			4	-11.799	-11.607
			⑤	-4.8614	-4.8106

FDM : Finite Difference Method
 DDM : Direct Differentiation Method

図5 線荷重を受ける円筒

向の各積分点におけるミーゼスの応力感度と先端でのたわみ感度を、板幅 b を設計変数とする場合を表 2 に、板厚 t を設計変数とする場合を表 3 に、 $\Delta b/b = 0.005$ として求めた差分法による解と比較して示す (DDM は直接微分法による値、FDM は差分法による値を表す)。ただし、表中網掛けした積分点番号は降伏した積分点を表す。両者はよく一致しており、本研究

表 4 反力感度

Disp.	$\partial P / \partial R (\times 10 \text{ N/mm})$		$\partial P / \partial t (\times 10 \text{ N/mm})$	
	DDM	FDM	DDM	FDM
d	0.11207	0.11279	-2.7415	-2.7633
$2d$	0.14519	0.14653	-4.2898	-4.3432
$3d$	0.11657	0.11904	-4.3218	-4.4033
$4d$	0.10907	0.11306	-4.3996	-4.5266
$5d$	0.09336	0.09850	-4.2741	-4.4321
$6d$	0.08144	0.08871	-4.1170	-4.3324
$7d$	0.07549	0.08449	-4.0269	-4.2733
$8d$	0.07280	0.08367	-3.9679	-4.2566

Enforced displacement increment : $d = 1.0 \text{ mm}$

図 6 荷重-変位関係

図 7 集中荷重を受ける部分円筒殻

で採用した方法によって、降伏点での設計感度の不連続性を精度よく計算できることを確認した。

4.3 大変形弾塑性問題 図 5 に示すような線荷重を受ける円筒 ($R=73.5 \text{ mm}$, $W=10 \text{ mm}$, $t=3.0 \text{ mm}$) の設計感度解析を行った例を示す。材料定数は以下のような値とした。

$$E=71.5 \text{ GPa}, \nu=0.3,$$

$$E_T=0.0 \text{ GPa}, \sigma_{Y0}=100 \text{ MPa}$$

解析モデルとして 1/4 領域を円周方向に 10、軸方向に 1 の 10 要素 63 節点に分割し、変位増分解析を行った。図 6 に解析によって得られた荷重-変位関係を示す。表 4 に板厚 t と半径 R を設計変数として求めた強制変位点での反力感度を、 $\Delta b/b = 0.005$ として求めた差分法による解と比較して示す。変形が進むにつれて若干の差がみられるが、良好な結果が得られた。

4.4 集中荷重を受ける部分円筒殻の最小重量設計 次に図 7 に示すように、板殻中央に集中荷重を受ける

表 5 目的関数, 設計変数, 制約条件の比較

	Objective f/f_0	Design variables r/r_0 t/t_0	Constraint g
Initial	1.000	1.000 1.000	0.2779
Optimal	0.665	0.787 0.845	8.4×10^{-4}

図 8 荷重-変位関係

図 9 目的関数と制約条件の変化

部分円筒殻の座屈荷重制約下での最小重量設計を考える。初期寸法および材料定数は以下の値とした。

$$r_0 = 2\,540 \text{ mm}, L = 254 \text{ mm}, t_0 = 4.0 \text{ mm},$$

$$\theta = 0.1 \text{ rad}, E = 3.1 \text{ GPa}, \nu = 0.3$$

解析モデルとして、モデルの対象性を考慮して 1/4 領域を 9 要素 49 節点に分割し、変位増分解析を行った。解析によって得られた荷重-変位関係を図 8 (図中 Initial) に示す。図 8 からわかるように、変形量を 17.5 mm 与えたとき円筒殻は座屈する。このときの座屈荷重を許容座屈荷重以上とすることを制約条件として、重量を最小にするような形状寸法を求める。よって 3 章の定式化に従い、設計変数に半径 r と板厚 t をとり、許容座屈荷重を $P_{cr} = 80 \text{ N}$ とした。また設計変数の上下限制約を以下のように設けて近似問題を構成し、最適化を行った。

$$2\,000 \leq r \leq 3\,000, 2 \leq t \leq 5$$

近似最適化問題の繰返しは 7 回で収束した。表 5 に目的関数、制約条件、設計変数の値を初期形状と最適形状について比較して示す。また図 9 に最適化の繰返し過程での目的関数と制約条件の変化を示す。図 8 に最適形状 (図中 Optimal) の荷重-変位関係も示した。

これらの結果より、必要な座屈強度を有する部分円

筒殻の最小重量寸法が求められたことが確認できる。

5. 結 言

本報では、板殻構造のニュートン・ラブソン形の大変形弾塑性有限要素解析を対象とした設計感度解析法の定式化を直接微分法に基づいて示した。特に、直線硬化形の非線形材料における降伏点を境とした設計感度の不連続性を、構成式の設計感度を考慮することにより精度よく解析できることを、数値例を通して確認した。さらに、提案した設計感度解析法を用いて座屈荷重制約下での最小重量設計を実施し、最適設計への適用性も確認した。

文 献

- (1) 久田, 機論, **56**-524, A (1990), 966.
- (2) Mucherjee, S. and Chandra, A., *Acta Mech.*, **78** (1989), 243.
- (3) Lee, T. H. and Arora, J. S., *The 34th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC SDM Conference*, (1993), 1941.
- (4) Santos, J. L. T. and Choi, K. K., *Structural Optimization*, **4**-1 (1992), 23.
- (5) 山崎・渋谷, 機論, **60**-576, A (1994), 1892.
- (6) Crisfield, M. A., *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, **1** (1991), 6, John Wiley and Sons, Chichester.