多孔質材構成式の延性破壊解析への適用*

呉 屋 守 章^{*1}, Robert. SOWERBY^{*2}
宮 城 清 宏^{*1}, 糸 村 昌 祐^{*1}A Constitutive Law for Porous Material and Its Application
to Ductile Fracture AnalysisMoriaki GOYA, Robert SOWERBY,
Kiyohiro MIYAGI and Shosuke ITOMURA

A model for the onset of ductile fracture in porous media is proposed and applied to the onset of void coalescence in the neck of a tensile specimen. A constitutive law for a rigid-work hardening porous solid is developed, based on an anisotropic yield function introduced by the authors in a previous report. The constitutive law embodies the void evolution model suggested by Rice and Tracey⁽⁶⁾. The onset of void coalescence is based on a criterion of internal necking of the matrix ligaments between the voids. This model was developed by Thomason⁽¹⁾ for the plane strain case. The model is extended in the present study to include axial symmetry, and then it is shown that the extended model coincides qualitatively well with the fracture strain variation obtained experimentally by Edelson and Baldwin⁽⁴⁾ for sintered porous materials.

Key Words: Ductile Fracture, Porous Material, Constitutive Law, Plasticity, Anisotropy

1. 緒 言

延性材料の破壊が空孔の発生・成長・合体と言う三つの過程を経た最終的段階であり、そこでは一種の多孔質材の様相を帯びていることは広く知られている。そして、破断直前においてくびれ部の中央部では引張りの高静水圧状態が発生するので、空孔成長に対する静水圧成分の影響の取扱いは延性破壊メカニズムの解析における重要な問題であると思われる。

延性破壊に関する微視的観点、すなわち着目する構造のレベルとして空孔や空孔間のリガメント部の力学的・幾何学的条件に着目する観点からの理論としては、Thomason⁽¹⁾とMcClintock⁽²⁾によるものが代表的なものとしてあげられる。Thomasonは、多孔質材の平面ひずみ変形を前提として理論を展開し、空孔の成長に関連して、そのアスペクト比は多孔質体全体の巨視的ひずみ履歴に応じて変化するが、空孔率自体は変形中も一定で推移するとしている。しかしながら、上述のように空孔率が静水圧成分に著しく依存するもの

であることを多くの実験や理論が既に示していることを考えれば、この理論での空孔率一定という仮定は一つの改善されるべき点とみなされよう。また、McClintockはBergによる二次元的粘性変形場解析⁽³⁾を拡張し、だ円柱状空孔の成長に対するひずみ履歴の影響を調べ、静水圧成分の効果が重大なることを明らかにしている。

これら二つの理論は、空孔の合体条件に対しても異なった規準を与えている。Thomasonにより提案されたものは、空孔間のリガメント部への変形集中開始点を合体条件とし、力学的観点より定められている。他方、McClintockにより与えられたものは、2個の隣接する空孔が互いに接触するという純幾何学的条件として定められている。そして、これら二つの理論を焼結材に対するEdelsonとBaldwinによる実験結果⁽⁴⁾と比較するとき、Thomasonの理論のほうがよく一致する傾向を示すことが周知のこととなっている。

ところで、Goya, Nagaki および Sowerby は多孔質材の空孔のアスペクト比が変わることによって異方性が引き起こされ得ると仮定し、異方性多孔質材に対する降伏関数についての検討を行ってきた⁽⁵⁾。

本報においては、こうした多孔質材異方性構成式の適用性を示すため、Thomasonの理論の改善を念頭に

* 平成5年11月16日 材料力学部門講演会において講演、原稿受付 平成6年1月10日。

*¹ 正員、琉球大学工学部 (〒903-01 沖縄県中頭郡西原町千原1番地)。

*² McMaster 大学工学部 (Hamilton, Ontario, CANADA)。

置き、一軸引張下の多孔質丸棒の延性破壊解析を試みることを目的とする。なお、多孔質材に対する構成式の誘導を完結するためには空孔の成長に関する発展式が必要となるが、これについては空孔と母材のひずみ場に対する Rice と Tracey の研究⁽⁶⁾ において用いられた仮定を導入し発展式を得た。また、くびれ部の静水圧応力を Bridgman の近似式⁽⁷⁾ により評価し、塑性理論の上界法を軸対称単位セル問題に適用し、Thomason の平面ひずみ場に対するアプローチと同様に『拘束係数』を求めることにより臨界条件を提案した。

2. 直交異方性多孔質材に対する構成式

丸棒くびれ部の中心部において直交異方性状態、すなわち応力とだ円空孔の主軸が一致するとし、ただし、初期において空孔は球状で一様に分布しており、したがって、空孔の初期分布については等方的であると仮定する。よって、構成式を得るために導入された下記の降伏関数式(1)における空孔の分布モデルに関わる補正係数 q_1 と q_2 は、等方性に近い正四面体モデル⁽³⁾ に基づいて値が決定された。すなわち、等方性条件を課した降伏関数式(1)が正四面体モデルに対する純粋静水圧応力および純粋相当応力の二つの特別な場合の降伏条件を満足するように決定した $q_1=1.283$ また $q_2=0.788$ を用いることにする。

$$F(\sigma, Y, f) = (S_{eq}/Y)^2 + q_1 f R_0 \cdot E_X - 1 = 0 \quad (1)$$

ただし、

$$S_{eq}^2 \equiv (3/2) S_i S_i' \quad (2)$$

$$S \equiv (1/2)(\Phi \sigma + \sigma \Phi) \quad (3)$$

$$\sigma \equiv \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (4)$$

図1 半径比 $a_3/a_{mid}=0.5, 1$ および 2 のだ円体空孔に対する異方性降伏関数式(1)の変化の様子(空孔率 $f=6.5\%$ および 0.82%)

$$\Phi \equiv \begin{bmatrix} \Phi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_3 \end{bmatrix} \quad (5)$$

；村上-大野の損傷テンソル⁽⁸⁾

$$\Phi_i \equiv (1 - q_2 \Omega_i)^{-1} \quad (6)$$

$$\Omega_i \equiv \{\pi/(2\sqrt{3})\} \bar{a}^3 / \bar{L}^3 (L_i/a_i) \quad (7)$$

； i について総和規約を適用せず

$$S_i' \equiv S_i - (S_1 + S_2 + S_3)/3 \quad (8)$$

$$E_X \equiv \exp(3p/2Y) \quad (9)$$

$$p \equiv (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3 \quad (10)$$

$$f \equiv 0.779(\bar{a}^3/\bar{L}^3) \quad (11)$$

$$\bar{L} \equiv (L_1 L_2 L_3)^{1/3} \quad (12)$$

$$\bar{a} \equiv (a_1 a_2 a_3)^{1/3} \quad (13)$$

$$R_0 \equiv \Phi_{mid}/\Phi_{sph} \quad (14)$$

$$\Phi_{sph} \equiv (1 - q_2 \Omega_{sph})^{-1} = (1 - kf^{2/3})^{-1} \quad (15)$$

$$k \equiv q_2 \{\pi/(2\sqrt{3})\} (0.779)^{2/3} \quad (16)$$

$$\Omega_{sph} \equiv \{\pi/(2\sqrt{3})\} (\bar{a}^2/\bar{L}^2) \quad (17)$$

$$\Phi_{mid} \equiv (1 - q_2 \Omega_{mid})^{-1} \quad (18)$$

$$\Omega_{mid} \equiv \{\pi/(2\sqrt{3})\} (a_{mid}^2/\bar{L}^2) \quad (19)$$

a_{mid} ：だ円体の中間主軸半径

Y ：母材の降伏応力

降伏関数(1)の様子が図1に示されているが、純粋静水圧の場合に対して、空孔形状に基づく異方性の効果が比較的大きく現れるように、前報⁽⁶⁾で提案された降伏関数を改善したものである。

さて、構成式を導く過程で式(1)の以後の取扱いが容易となるように次のように書き変える。

$$F(S_i, p, Y, f, \Phi_{mid}) = (3/2) S_i S_i' / Y^2 + q_1 (f - kf^{5/3}) \Phi_{mid} \cdot E_X - 1 = 0 \quad (20)$$

塑性負荷に対する consistency 条件を式(20)に適用して次式を得る。

$$\dot{F} = (\partial F / \partial S_i) \dot{S}_i + (\partial F / \partial p) \dot{p} + (\partial F / \partial Y) \dot{Y} + (\partial F / \partial f) \dot{f} + (\partial F / \partial \Phi_{mid}) \dot{\Phi}_{mid} \quad (21)$$

ところで、式(20)を各変数に関して微分することにより、次の偏導関数を得る。

$$\partial F / \partial S_i = 3 S_i' / Y^2 \quad (22 \cdot a)$$

$$\partial F / \partial p = q_1 (f - kf^{5/3}) \Phi_{mid} \times (3/2 Y) E_X \quad (22 \cdot b)$$

$$\partial F / \partial Y = -(2/Y) \{ S_{eq}^2 / Y^2 + (3p/4 Y) \times q_1 (f - kf^{5/3}) \Phi_{mid} \cdot E_X \} \quad (22 \cdot c)$$

$$\partial F / \partial f = q_1 \{ 1 - (5/3) kf^{2/3} \} \Phi_{mid} \cdot E_X \quad (22 \cdot d)$$

$$\partial F / \partial \Phi_{mid} = q_1 (f - kf^{5/3}) \Phi_{mid} \cdot E_X \quad (22 \cdot e)$$

さらに、母材の非圧縮性、微視的および巨視的塑性仕事量の等値性そして法線則が成立するものと仮定する

体に対する上界定理を適用する。同様な解析は過去に円筒の圧縮問題について Kudo⁽¹⁰⁾, Avitzur⁽¹¹⁾ そして小林⁽¹²⁾ によりなされているが、ここでは境界条件を適切に満足する速度場が次に示すように仮定された。

領域Ⅰにおいて(剛体場)：

$$\dot{u}_r=0, \quad \dot{u}_z=1 \quad \cdots \cdots \cdots (36)$$

領域Ⅱにおいて：

$$\dot{u}_r=(1-b^2)/(2ar), \quad \dot{u}_z=a \quad \cdots \cdots \cdots (37)$$

領域Ⅲにおいて：

$$\dot{u}_r=(1-r^2)/(2ar), \quad \dot{u}_z=z/a \quad \cdots \cdots \cdots (38)$$

不連続曲線 Γ_{15} は曲線に沿う垂直速度成分の連続条件より得られ、その結果は以下のとおりである。

$$Z_{15}=a(1-a)(1-r^2)/(1-b^2)+aa \quad \cdots \cdots \cdots (39)$$

各領域に対する散逸内部仕事率は仮定された速度場

(36)～(38)を用いて次のように得られる。

領域Ⅱに対して：

$$\begin{aligned} \dot{W}_{125} &= \iint Y \bar{\varepsilon} 2\pi r dr dz \\ &= \{\pi(1-a)/\sqrt{3}\} Y [\ln b^{-2} - (1-b^2)] \quad \cdots (40) \end{aligned}$$

ここで、

$$\bar{\varepsilon} = (1-b^{-2})/(\sqrt{3}ar^2)$$

領域Ⅲに対して：

$$\begin{aligned} \dot{W}_{2345} &= \iint Y \bar{\varepsilon} 2\pi r dr dz \\ &= (\pi a/\sqrt{3}) Y [2 - (3b^4+1)^{1/2} \\ &\quad + \ln b^2 - \ln \{(3b^4+1)^{1/2}-1\}] \quad \cdots \cdots \cdots (41) \end{aligned}$$

ここで、

$$\bar{\varepsilon} = (3+r^{-4})^{1/2}/(\sqrt{3}a)$$

不連続面 Γ_{15} に対して：

$$\begin{aligned} \dot{W}_{r15} &= (1/\sqrt{3}) \int Y |\Delta \dot{u}| dS = (2\pi/\sqrt{3}) Y \int r |\Delta \dot{u}_{15}| dr / \cos \theta = (\pi Y/\sqrt{3}) [(4/3)(1+b+b^2) \\ &\quad * (1-a)^2 a/(1+b) + (1-b^2)(1+b)/a] \quad \cdots \cdots \cdots (42) \end{aligned}$$

ここで、 $|\Delta \dot{u}_{15}|$ ： Γ_{15} に沿う接線速度成分の不連続量。

$$|\Delta \dot{u}_{15}| = (1-a) \sin \theta, \quad \tan \theta = -a(1-a)r/(1-b^2)$$

不連続面 Γ_{25} に対して：

$$\dot{W}_{r25} = (1/\sqrt{3}) \int Y |\Delta \dot{u}_{25}| 2\pi r dr = (\pi Y/\sqrt{3}) [(1-b)(1+b-2b^2)/(3a)] \quad \cdots \cdots \cdots (43)$$

ここで、 $|\Delta \dot{u}_{25}|$ ： Γ_{25} に沿う接線速度成分の不連続量。

$$|\Delta \dot{u}_{25}| = (r^2-b^2)/(2ar)$$

結局、全内部散逸仕事率は次式となる。

$$\begin{aligned} \dot{E}_{int} &= \dot{W}_{125} + \dot{W}_{2345} + \dot{W}_{r15} + \dot{W}_{r25} = (\pi Y/\sqrt{3}) \{ (1-a) \{ \ln b^{-2} - (1-b^2) \} \\ &\quad + a [2 - (3b^4+1)^{1/2} + \ln b^2 - \ln \{(3b^4+1)^{1/2}-1\}] + \{(4/3)(1+b+b^2)(1-a)^2 a \\ &\quad \div (1+b) + (1-b^2)(1-b)/a\} + (1-b)(1+b-b^2)/(3a) \} \quad \cdots \cdots \cdots (44) \end{aligned}$$

$z=a$ に沿うリガメント部における平均軸応力を P_{ave} と記すとき、単位軸方向速度に対して外部散逸仕事率は次のようになる。

$$\dot{E}_{ext} = \pi(1-b^2) * 1 * P_{ave} \quad \cdots \cdots \cdots (45)$$

$\dot{E}_{ext}$ と $\dot{E}_{int}$ が等しいという条件から拘束係数 $C_n (= P_{ave}/Y)$ に関する次の結果を得る。

$$\begin{aligned} C_n &= (\pi/\sqrt{3}) \{ (1-a) \{ \ln b^{-2} - (1-b^2)/(1-b^2) - 1 \} + \{ a/(1-b^2) \} \\ &\quad * [2 - (3b^4+1)^{1/2} + \ln b^2 - \ln \{(3b^4+1)^{1/2}-1\}] + [(4/3)(1+b+b^2)(1-a)^2 a \\ &\quad \div \{(1+b)(1-b^2)\} + (1-b)/a] + (1+b-b^2)/\{(3a(1+b))\} \} \quad \cdots \cdots \cdots (46) \end{aligned}$$

α をパラメータとして式(36)～(38)で仮定された速度場の中で実際に実現され得る場の近似解は C_n を最小とするものである。ところで、式(46)は α に関する二次方程式で、 α^2 の係数は正であるから、したがって拘束係数を最小化する α を次のように唯一に決定することができる。

$$\alpha_s = 1 - 3(1+b) [3 - b^2 - (3b^4+1)^{1/2} + \ln b^4 - \ln \{(3b^4+1)^{1/2}-1\}] / [8a(1+b+b^2)] \quad \cdots \cdots \cdots (47)$$

得られた α_s を式(46)に代入して、内部くびれを引き起こす速度場が実現するのに必要な最小拘束係数を求めることができる。図4はここで得られた軸対称問題に対する拘束係数および Thomason による平面ひずみ問題に対する拘束係数の分布を示す。この結果より、拘束係数がリガメント部の形状に大きく依存するものであることがわかるが、軸対称の場合の拘束係数の値は平面ひずみの場合と異なり1に接近しない。

4. 内部くびれ開始規準

丸棒に生じたくびれ変形はその中心部において静水圧成分をもたらすが, Bridgman⁽⁷⁾ はくびれ断面においてひずみが一様に分布すると仮定し, 軸方向応力 σ_z と半径方向応力 σ_r によりくびれ部の応力状態が表現できるという結論を得た。それによると, 本研究において関心のもたれているくびれ部の中央部近傍の応力状態は次のように表せる。

$$\sigma_r/Y = \ln \{1 + 0.5(R/\rho)\} \quad \cdots \cdots \cdots (48)$$

$$\sigma_z/Y = 1 + \ln \{1 + 0.5(R/\rho)\} \quad \cdots \cdots \cdots (49)$$

ここで, R はくびれ部の半径で, また ρ はくびれ部表面の曲率半径である。

Bridgman は R/ρ とくびれ部における軸方向巨視的ひずみ $\int d\epsilon_z$ に対し次の近似式の成立を報告している。

$$R/\rho = \left(\int d\epsilon_z - \epsilon_{neck} \right)^{1/2} \quad \cdots \cdots \cdots (50)$$

ここで, ϵ_{neck} はくびれ開始時点の軸ひずみである。

さて, 図3のモデルの軸方向力の釣合いを考察することにより, Thomason の規準の直接的拡張である次の不等式を導入することができる。

$$S * \sigma_z > P_{ave}(S - S_v) \quad \cdots \cdots \cdots (51)$$

ここで, S と S_v は単位セルの公称および空孔の軸方向断面積である。

式(51)に式(49)を代入した後, 損傷テンソルと拘束係数を導入し, 軸対称問題に対する内部くびれ条件を次のように得る。

$$1 + \ln \{1 + 0.5(R/\rho)\} > C_n(1 - \Omega_z) \quad \cdots \cdots \cdots (52)$$

図4 平面ひずみ場(Thomason の仮定)および軸対称ひずみ場に対する拘束係数 C_n と空孔形状との関係

5. 解析結果と Edelson らの実験結果との比較

延性破壊解析モデルより得られたいくつかの結果が図5に示されている。これらの結果と比較されるべき実験値として, Edelson と Baldwin の研究⁽⁴⁾ で得られた種々の焼結材に対する延性破壊点が図中に○印で示されている。本研究で得られた理論曲線が実験値曲線と比較的よく一致していることがわかる。

理論計算においては, すべての材料は線形加工硬化の剛塑性体と仮定され解析が進められたが, 付録2中の解析手続きに示されるように, 加工硬化係数自体の値は本理論の結果に関係しないものとなっている。これは, Edelson と Baldwin の実験が種々の異なる材料に対してなされたにもかかわらず, 材料に依存せずある限られた範囲に分布する傾向を示していることと照らし合わせて考えると興味深いものがある。しかしながら, 材料の違いはくびれ変形を開始するひずみ ϵ_{neck} の値に基本的に影響するものであるから, 異なる値を用いて計算を行いその影響の程度を調べた。図5に示されているようにその結果は初期空孔率が小さい場合, 最終的破断ひずみに ϵ_{neck} の値はそれほど大きく影響しない傾向を示しているが, 初期空孔率が0.1より大きい領域では, ϵ_{neck} の値の違いによる差がかなり大きなものとなっている。これは, 次のようなことが原因として考えられる。まず, $\epsilon_{neck}=0.3$ としたときは, そのひずみ値に至るまで局所くびれが生ぜずに一様な伸び変形となるので, その間静水圧応力が十

図5 本研究で得られた理論延性破壊曲線と Edelson と Baldwin の焼結材に対する実験結果との比較(図中破線は空孔成長に対する静水圧効果は無視した場合の結果を示す)

分に発達しないことになる。これに対応して、空孔も半径方向に十分には成長せず、初期空孔率全域において延性破壊ひずみ値が大きくなるのである。そこで、さらに初期空孔率が0.1以上の場合、空孔径は初期において既に十分に大きく、したがって、くびれ開始後、延性破壊ひずみ値までいくらかも変形しないうちに臨界条件に到達してしまうので全ひずみ値に占める ϵ_{neck} の割合が結果的に大きなものになってしまうのである。

さらに同図中に、Thomason らの平面ひずみモデルによる結果が示されている。また、Thomason の設けた仮定の一つである、変形中一貫して一定空孔率であるとした場合の本解析モデルからの結果も示されている。それによると、一定空孔率の仮定下で得られた結果は、非現実的なかなり大きな限界値を与える結果となり、これは直感的に当然の帰結であり、ひいては解析法の妥当性を裏付けるものである。したがって、McClintock やその他の研究者らの報告にあるように、この種の問題に対しては負(引張り)の静水圧力が空孔の成長を加速する点で重大な役割を演ずるものであることがわかる。

6. ま と め

本研究において、微視的観点に基づく Thomason の延性破壊理論の拡張が多孔質材異方性構成式論を導入してなされた。拡張された解析は、いくつかの近似と簡単な仮定の基に展開されたものであるにもかかわらず、延性破壊に対する静水圧の影響を相応に評価できるものであり、焼結材に対する実験結果との比較も定性的にはよく一致しており、延性破壊に関する基本的メカニズムをおおむねよく説明するものと思われる。

実験と理論の明確な差をもたらす主たる要因としては、Rice らの仮定に基づく損傷変数の発展式の導入や Bridgman の応力評価式の多孔質材に対する導入がある。損傷変数の発展式は空孔の成長に直接関係し、そして Bridgman の仮定は内部くびれ規準に直接関係するものであるから、特にこれらの二つの要因は、それぞれ注意深く考察されるべきである。今後、Rice と Tracey の仮定自体の検討やそこで導入されている係数(付録1中の E)のひずみ径路依存性等についてより詳細に調べていく必要があろう。また、Bridgman の公式は非多孔質材の応力分布を推定するために得られたものであるから、公式の多孔質材への直接的適用については基本的に問題があり、多孔質材に対し妥当な評価式の導入の検討が不可欠である。

終わりに、本研究を遂行するにあたり、池谷科学技術振興財団(平成5年)よりの援助に対し深く感謝の意を表す。

付 録 1

式(26)が Rice らの仮定より得られる関係の拡張形であることが以下のように示される。

まず、式(26)は $i=1$ に対して次のようになる。

$$\dot{a}_1/a_1 - (1/3)\dot{a}_k/a_k = \dot{\epsilon}_1 - (1/3)\delta_k \dot{\epsilon}_k \cdots \cdots (53)$$

もし、無限領域母材中の一つの空孔を考えるものとする、母材の非圧縮性により $\delta_k \epsilon_k$ は零に漸近するから式(53)は次のようになる。

$$\dot{a}_1/a_1 = \dot{\epsilon}_1 + (1/3)\dot{a}_k/a_k \cdots \cdots (54)$$

ところで、Rice らの速度場に対する仮定より次の関係が得られる。

$$\dot{\epsilon}'_{\text{void}} = (1+E)\dot{\epsilon}_{\text{matrix}} \cdots \cdots (55)$$

ここで、 E は非圧縮速度場の空孔変形に及ぼす影響の程度を評価する係数である。

式(55)において一軸引張応力下の係数 E に対して Rice らは $E=1$ なる結果を得たが、Worswick らは変形が大きくなるにつれて $E=0$ に漸近することを示している⁽¹²⁾。本研究で導入された式(54)は $E=0$ と置いた関係にほかならない。

付 録 2

[解析手続き]

①初期条件の設定：初期状態に対して、球状空孔の等方分布を仮定し、初期空孔率 f_0 を与え、初期単位セルの大きさを無次元寸法を導入して $L_0=1$ とする。

②増分 ϵ_z を与え、 $\epsilon_z(t+dt) = \epsilon_z(t) + \dot{\epsilon}_z$ を求める。式(48)～(50)に $\epsilon_z(t+dt)$ を用いて、 $\sigma_z(t+dt)$ と $\sigma_r(t+dt)$ を求める。ただし、 $\epsilon_{neck} > \epsilon_z(t+dt)$ の場合は $\rho=\infty$ として応力を求める。

③増分ひずみ比 $R_v = \{\dot{\epsilon}_v/\dot{\epsilon}_z\}$ に式(29)を代入して得られた次式から求める。

$$R_v = 1 + 2 * (m_r/m_z) \cdots \cdots (56)$$

この段階で構成式中に含まれていた加工硬化係数が消去されていることに着目すべきで、その結果として硬化係数は本解析に影響しないことになっている。

④ $\dot{\epsilon}_v (= R_v * \dot{\epsilon}_z)$ を用いて、次の増分量を計算する。

$$\dot{\Omega}_z = (2/3)\Omega_z(f^{-1}-1)\dot{\epsilon}_v \cdots \cdots (57)$$

$$\dot{\Omega}_r = (2/3)\Omega_r(f^{-1}-1)\dot{\epsilon}_v \cdots \cdots (58)$$

$$\dot{a}_z = \{1 + R_v(1-f)/(3f)\}\dot{\epsilon}_z \cdots \cdots (59)$$

$$\dot{a}_r = \{0.5 + (R_v-1) + R_v(1-f)/(3f)\}\dot{\epsilon}_z \cdots \cdots (60)$$

$$\dot{f} = (1-f)R_v\dot{\epsilon}_z \cdots \cdots (61)$$

⑤ $a_z, a_r, L_z, L_r, \Omega_z, \Omega_r$ と f を簡単な数値積分により $t+dt$ 時刻量へアップデートする。

⑥ a_z, a_r と L_r を用いて、式(46)と式(47)より拘束係数 C_n を求める。

⑦ アプデイトされた Ω_z と Ω_r と C_n を内部くびれ規準式(52)に代入する。もし、規準が満足されたならば、臨界ひずみとして $\varepsilon_z(t+dt)$ を出力する。満足されない場合は、②へ戻る。

文 献

- (1) Thomason, P. F., *J. Inst. Met.*, **96**(1968), 360.
- (2) McLintock, F. A., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **35**-2 (1968), 363.
- (3) Berg, C. A., *Proc. 4th US Natl. Congr. Appl. Mech.*, **2** (1962), 885.
- (4) Edelson, B. I. and Baldwin, W. M. Jr., *Trans. Am. Soc. Met.*, **55**(1962), 231.
- (5) Goya, M., Nagaki, S. and Sowerby, R., *JSME Int. J., Ser. I*, **35**-3(1992), 310.
- (6) Rice, J. R. and Tracey, D. M., *J. Mech. Phys. Solids*, **17** (1969), 201.
- (7) Bridgman, P. W., *Trans. Am. Soc. Met.*, **32**(1943), 553.
- (8) 村上・大野, 機論, **46**-409, A(1980), 940.
- (9) Nagaki, S., Goya, M. and Sowerby, R., *Int. J. Plasticity*, **9**(1993), 199.
- (10) Kudo, H., *Int. J. Mech. Sci.*, **2**(1960), 102.
- (11) Avitzur, B., *Trans. ASME, J. Eng. Ind.*, **95**(1973), 827.
- (12) Kobayashi, S., *loc. cit.*, **86**(1964), 122.
- (13) Worswick, M. J. and Pick, R. J., *J. Mech. Phys. Solids*, **38**-5(1990), 601.