両異方性材の接合無限板における集中力と転位の基本解*

陳 玳 珩^{*1}Fundamental Solutions Due to Point Force and Dislocation in a Plane
of Two Joined Anisotropic Semi-Infinite Plates

Dai-heng CHEN

The fundamental solutions are derived for the two-dimensional elastic fields of a point force and a dislocation acting at a point in a plane of two joined semi-infinite anisotropic plates. Lekhnitskii's complex potential approach is used, and a general expression of the solutions is obtained in a closed form. No symmetry is assumed for the elasticity of the anisotropic material in the investigated plane. Taking into consideration the case of an isotropic-anisotropic two-phase medium and the case of an isotropic-isotropic two-phase medium, solutions are given for all the possible combinations of the materials with either $s_1 \neq s_2$ or $s_1 = s_2$, where s_1 and s_2 are the roots of the characteristic equation of the material.

Key Words: Elasticity, Composite Material, Green's Function, Plane Problem, Anisotropic Material, Point Force, Dislocation

1. 緒 言

本研究は、材質が異なる二つの半無限板が接合された無限板中の一点に、集中力および転位が作用する場合の弾性場、いわゆる基本解、について検討を行うものである。このような問題の基本解は、両半無限板がともに等方性材の場合についてはすでに Frasier と Rongved⁽¹⁾ によって導かれている。しかし、半無限板が異方性材となる場合については、その基本解に関する研究には未解決の問題がまだ残っている。この問題についてこれまでは、笠野らが等方性材の半無限板と直交異方性材の半無限板との接合無限板中の刃状転位による応力の解を求め⁽²⁾⁽³⁾、また Wu と Chou が二つの直交異方性材の接合無限板中の集中力による変位・応力の解を求めた⁽⁴⁾との報告はある。しかし、これらの研究で取扱った異方性材料は、いずれも直交異方性で、しかもその直交異方性の弾性対称軸が接合面と平行なもののみである。このような接合無限板問題に関する基本解の研究現状を考え、著者はさきに行った研究⁽⁵⁾⁽⁶⁾で、等方性材の半無限板と異方性材(応力など

が検討されている面内の弾性主軸が接合面と平行でない直交異方性の場合も含まれている)の半無限板との接合無限板中に、集中力および転位が作用するときの弾性場の基本解を求めた。そこで、本研究では、さきの研究結果をさらに拡張して、両半無限板の弾性的性質がともに一般の異方性材の場合について、集中力および転位による弾性場の基本解を理論的に求めた。ここでは、二次元の問題として考えているので、材料の弾性的性質は $x-y$ 面に関して対称でなければならない。ただし、一般の異方性平面弾性問題では、材料の $x-y$ 面におけるひずみと応力の関係は、次のように六つの独立な弾性係数によって表される。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{16}\tau_{xy} \\ \varepsilon_y &= a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{26}\tau_{xy} \\ \gamma_{xy} &= a_{16}\sigma_x + a_{26}\sigma_y + a_{66}\tau_{xy} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

上式は平面応力状態の場合であるが、平面ひずみ状態の場合には、 a_{ij} は次式のように材料の弾性コンプライアンス b_{ij} から求まる。

$$a_{ij} = b_{ij} - b_{i3}b_{j3}/b_{33} \quad (i, j=1, 2, 6) \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 b_{13} 、 b_{23} と b_{33} は材料の $x-y$ 面に垂直な方向に関連する弾性コンプライアンスである。

本研究では、両半無限板の材質を異なるものとして、それぞれの弾性係数を $a_{ij}^{(1)}$ と $a_{ij}^{(2)}$ とする。ここで、上

* 原稿受付 平成 6 年 3 月 24 日。

^{*1} 正員、九州工業大学情報工学部 (〒820 飯塚市大字川津 680-4)。

添字(1)と(2)は両半無限板のそれぞれのものを意味する。以下同様である。ただし、両領域ともに成り立つ式を示す場合、上添字を省略する。

2. 基礎方程式

平面弾性問題における変位、応力などは、Airy の応力関数によって表される。Airy の応力関数は、二つの複素関数によって表すことができる。Lekhnitskii の理論⁷⁾によれば、複素関数による Airy 応力関数の表示式は、弾性係数の組合せによって異なる。すなわち、Airy の応力関数の一般式は、次の弾性係数による特性方程式

$$a_{11}s^4 - 2a_{16}s^3 + (2a_{12} + a_{66})s^2 - 2a_{26}s + a_{22} = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

が重根を持つかどうかによって異なる。

実際の材料の弾性係数 a_{11} と a_{22} は常に零でない有限な値である。この条件のもとで、特性方程式(3)の根が常に複素数または純虚数であること、すなわち根が常に $s_1, s_2, \bar{s}_1$ および $\bar{s}_2$ の形で得られることはすでに理論的に証明されている(“ $\bar{}$ ”は共役を表す)。ここに、 s_1 と s_2 は、方程式(3)の四つの根中の虚数部が正となる二つの根である。 s_1 が s_2 に等しいかどうかによって、Airy の応力関数 F の表示式は異なる。

$s_1 \neq s_2$ の場合、 F は次のように二つの複素関数 $F_1(z_1)$ と $F_2(z_2)$ によって表される。

$$F = 2 \operatorname{Re} [F_1(z_1) + F_2(z_2)] \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= x + s_1 y \\ z_2 &= x + s_2 y \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (5)$$

この場合、次のような関数：

$$\left. \begin{aligned} \phi_1(z_1) &= dF_1(z_1)/dz_1 \\ \phi_2(z_2) &= dF_2(z_2)/dz_2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (6)$$

を導入すれば、式(4)から、応力 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 、変位 u_x, u_y 、合力 P_x, P_y の式が次のように得られる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2 \operatorname{Re} [s_1^2 \phi_1'(z_1) + s_2^2 \phi_2'(z_2)] \\ \sigma_y &= 2 \operatorname{Re} [\phi_1'(z_1) + \phi_2'(z_2)] \\ \tau_{xy} &= -2 \operatorname{Re} [s_1 \phi_1'(z_1) + s_2 \phi_2'(z_2)] \\ u_x &= 2 \operatorname{Re} [p_1 \phi_1(z_1) + p_2 \phi_2(z_2)] \\ u_y &= 2 \operatorname{Re} [q_1 \phi_1(z_1) + q_2 \phi_2(z_2)] \\ P_x &= 2 \operatorname{Re} [s_1 \phi_1(z_1) + s_2 \phi_2(z_2)] \\ P_y &= -2 \operatorname{Re} [\phi_1(z_1) + \phi_2(z_2)] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= a_{11}s_1^2 + a_{12} - a_{16}s_1 \\ p_2 &= a_{11}s_2^2 + a_{12} - a_{16}s_2 \\ q_1 &= a_{12}s_1 - a_{26} + a_{22}/s_1 \\ q_2 &= a_{12}s_2 - a_{26} + a_{22}/s_2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (8)$$

一方、 $s_1 = s_2$ の場合、 F の一般式は次のようになる。

$$F = 2 \operatorname{Re} [F_1(z_1) + z_1 F_2(z_1)] \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここに、

$$z_1 = x + s_1 y \quad \dots\dots\dots (10)$$

この場合、次のような関数：

$$\left. \begin{aligned} \phi(z_1) &= 2F_2(z_1) \\ \chi(z_1) &= 2 \left[z_1 \frac{dF_2(z_1)}{dz_1} + \frac{dF_1(z_1)}{dz_1} \right] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (11)$$

を導入すれば、式(9)から、応力、変位および合力の式が次のように得られる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \operatorname{Re} [s_1(2\bar{s}_1 - s_1)\phi'(z_1) + s_1^2\{(\bar{z}_1 - z_1)\phi''(z_1) + \chi'(z_1)\}] \\ \sigma_y &= \operatorname{Re} [\phi'(z_1) + (\bar{z}_1 - z_1)\phi''(z_1) + \chi'(z_1)] \\ \tau_{xy} &= -\operatorname{Re} [\bar{s}_1\phi'(z_1) + s_1\{(\bar{z}_1 - z_1)\phi''(z_1) + \chi'(z_1)\}] \\ u_x &= \operatorname{Re} [c_1\phi(\bar{z}_1) + c_2\{(\bar{z}_1 - z_1)\phi'(z_1) + \chi(z_1)\}] \\ u_y &= \operatorname{Re} [s_1[c_1\phi(\bar{z}_1) + c_2\{(\bar{z}_1 - z_1)\phi'(z_1) + \chi(z_1)\}]] \\ P_x &= \operatorname{Re} [s_1[\phi(\bar{z}_1) + (\bar{z}_1 - z_1)\phi'(z_1) + \chi(z_1)]] \\ P_y &= -\operatorname{Re} [\phi(\bar{z}_1) + (\bar{z}_1 - z_1)\phi'(z_1) + \chi(z_1)] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (12)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= a_{12} - (s_1^2 + \bar{s}_1^2 - s_1\bar{s}_1)a_{11} \\ c_2 &= a_{12} - s_1\bar{s}_1a_{11} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (13)$$

なお、等方性材の場合、弾性係数は横弾性係数 G とポアソン比 ν の二つの係数によって表される。

$$\left. \begin{aligned} a_{11} = a_{22} &= \frac{\kappa + 1}{8G}, \quad a_{12} = \frac{\kappa - 3}{8G} \\ a_{66} &= 1/G, \quad a_{16} = a_{26} = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (14)$$

ここに、

$$\kappa = \begin{cases} (3 - \nu)/(1 + \nu) & (\text{平面応力}) \\ 3 - 4\nu & (\text{平面ひずみ}) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (15)$$

この場合、方程式(3)の根は

$$s_1 = s_2 = i \quad \dots\dots\dots (16)$$

であり、重根である。ただし、 i は $i = \sqrt{-1}$ である。 $s_1 = i$ であるため、式(10)の z_1 は通常の z ：

$$z = x + iy$$

となる。式(14)～(16)を $s_1 = s_2$ の場合の変位、応力などの式(12)に代入すれば、等方性材に適用されている式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 4 \operatorname{Re} [\phi'(z)] \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2[(\bar{z} - z)\phi''(z) - \phi'(z) + \chi'(z)] \\ 2G(u_x - iu_y) &= \kappa \overline{\phi(z)} + (z - \bar{z})\phi'(z) - \chi(z) \\ P_y + iP_x &= -\overline{\phi(z)} + (z - \bar{z})\phi'(z) - \chi(z) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (17)$$

3. 均質異方性無限板における基本解

本研究で求めた接合板問題の基本解に、均質無限板問題の基本解の式が常に含まれている。したがって、ここでもまず均質異方性無限板の問題における集中力と転位の基本解の式をまとめておく。その基本解は、次のように、異方性材パラメータ $s_1 \neq s_2$ の場合と $s_1 = s_2$ の場合に分けて整理される。

3.1 異方性材のパラメータ $s_1 \neq s_2$ の場合 $s_1 \neq s_2$ のような異方性無限板での集中力および転位による弾性場の解は、Hirth⁽⁸⁾ によって与えられている。

この場合、変位、応力などは、式(7)によって表される。無限板中の一点 (ξ, η) に集中力および転位が作用するときの、式(7)中の複素関数 $\phi_1(z_1)$ と $\phi_2(z_2)$ をそれぞれ $\phi_1^0(z_1)$ と $\phi_2^0(z_2)$ とすれば、 $\phi_1^0(z_1)$ と $\phi_2^0(z_2)$ は次式で与えられる⁽⁸⁾。

$$\left. \begin{aligned} \phi_1^0(z_1) &= A \log(z_1 - \zeta_1) \\ \phi_2^0(z_2) &= B \log(z_2 - \zeta_2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \zeta_1 &= \xi + s_1 \eta \\ \zeta_2 &= \xi + s_2 \eta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

また、 A と B は次の代数方程式の解である。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ s_1 & s_2 & -\bar{s}_1 & -\bar{s}_2 \\ p_1 & p_2 & -\bar{p}_1 & -\bar{p}_2 \\ q_1 & q_2 & -\bar{q}_1 & -\bar{q}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ \bar{A} \\ \bar{B} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\pi i} \begin{bmatrix} F_y \\ -F_x \\ b_x \\ b_y \end{bmatrix} \dots\dots\dots (20)$$

3.2 異方性材のパラメータ $s_1 = s_2$ の場合 この場合、変位、応力などの表示式は式(12)である。 $s_1 = s_2$ のような異方性無限板中の一点 (ξ, η) に集中力および転位が作用するときの、式(12)中の複素関数 $\phi(z_1)$ と $\chi(z_1)$ をそれぞれ $\phi^0(z_1)$ と $\chi^0(z_1)$ とすれば、 $\phi^0(z_1)$ と $\chi^0(z_1)$ は次式で与えられる^{**1}。

$$\left. \begin{aligned} \phi^0(z_1) &= M \log(z_1 - \zeta_1) \\ \chi^0(z_1) &= N \log(z_1 - \zeta_1) + M(z_1 - \bar{\zeta}_1)/(z_1 - \zeta_1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

ここに、

$$\zeta_1 = \xi + s_1 \eta \dots\dots\dots (22)$$

また

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{(a_{12}/a_{11} - s_1 \bar{s}_1)(F_x + s_1 F_y) - (s_1 b_x - b_y)/a_{11}}{i\pi(s_1 - \bar{s}_1)^3} \\ N &= \bar{M} - \frac{F_x + \bar{s}_1 F_y}{i\pi(s_1 - \bar{s}_1)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

^{**1} $s_1 = s_2$ のような異方性材における弾性場の解析例はほとんど見当たらないようである。ここで示した無限板問題の基本解は、著者が求めたものである。

4. 接合異方性無限板における基本解

4.1 基本解の解析 2章に述べたことからわかるように、異方性材のパラメータ s_1 が s_2 に等しいかどうかによってその変位、応力の表示式が異なる。したがって、材質の異なる二つの半無限板が接合された無限板での集中力と転位による基本解の問題を検討する際、図1に示すように、四つの場合に分けて、基本解を求める必要がある。本研究では、集中力と転位が作用する点の所在領域を常に領域1とする。

図1に示すような四つの場合における基本解を求めるための一つの方法としては、まず図1(a)の場合における基本解を求め、そして、求めた解に、図1(b), (c), (d)の各場合の、異方性材のパラメータ s_1 と s_2 が $s_1 = s_2$ となる領域について、 $s_1 = s_2$ となるための弾性係数の条件式：

$$\left. \begin{aligned} a_{26}\sqrt{a_{11}} &= a_{16}\sqrt{a_{22}} \\ \frac{2a_{21} + a_{66}}{a_{11}} &= \left(\frac{a_{16}}{a_{11}}\right)^2 + 2\sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

を代入して極限操作によって図1(b), (c), (d)の各場合の基本解の式を導くことができる。しかし、このような極限操作を行う際の式の演算は相当困難である。このことを考慮して、本研究では、図1(a), (b), (c), (d)の各場合についてそれぞれの基本解を導くことにした。

接合板における基本解の解析とは、集中力と転位が作用している点における境界条件(その点のまわりを

図1 二つの異方性材の接合無限板

一周するときの合力と変位の条件)および接合界面における面間力と変位の連続条件

$$\left. \begin{aligned} u_x(x, 0^+) &= u_x(x, 0^-) \\ u_y(x, 0^+) &= u_y(x, 0^-) \\ P_x(x, 0^+) &= P_x(x, 0^-) \\ P_y(x, 0^+) &= P_y(x, 0^-) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

を満足できる弾性場を求めることである。その解析方法は、著者がさきに行った研究⁽⁵⁾⁽⁶⁾に用いた手法と同様であるため、ここでは省略する。

図1(a), (b), (c)と(d)の各場合について解析を行って、求めた基本解の式はそれぞれ異なっているが、本研究では、それらの解を統一された形で表示するため、まず次式で定義された記号を導入する。

$s_1 \neq s_2$ の場合に対して、

$$\left. \begin{aligned} \theta_1(z) &= \phi_1(z), \quad \theta_2(z) = \phi_2(z) \\ S_1 &= s_1, \quad S_2 = s_2 \\ P_1 &= p_1, \quad P_2 = p_2 \\ Q_1 &= q_1, \quad Q_2 = q_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

$s_1 = s_2$ の場合に対して、

$$\left. \begin{aligned} \theta_1(z) &= \phi(z)/2, \quad \theta_2(z) = \chi(z)/2 \\ S_1 &= \bar{s}_1, \quad S_2 = s_1 \\ P_1 &= c_1, \quad P_2 = c_2 \\ Q_1 &= \bar{s}_1 c_1, \quad Q_2 = s_1 c_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

式(26)と式(27)で定義されたものを用いれば、図1(a), (b), (c)と(d)の各場合における基本解の式はともに次のように与えられる。

領域1では、

$$\left. \begin{aligned} \theta_1^{(1)}(z) &= D_1^{(1)}(z)/\bar{D} + \theta_1^0(z) \\ \theta_2^{(1)}(z) &= D_2^{(1)}(z)/\bar{D} + \theta_2^0(z) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

ここに、

$$D_1^{(1)}(z) = - \begin{vmatrix} \bar{f}_1(z) & 1 & 1 & 1 \\ \bar{f}_2(z) & S_2^{(1)} & \bar{S}_1^{(2)} & \bar{S}_2^{(2)} \\ \bar{f}_3(z) & P_2^{(1)} & \bar{P}_1^{(2)} & \bar{P}_2^{(2)} \\ \bar{f}_4(z) & Q_2^{(1)} & \bar{Q}_1^{(2)} & \bar{Q}_2^{(2)} \end{vmatrix} \dots\dots (29)$$

$$D_2^{(1)}(z) = \begin{vmatrix} \bar{f}_1(z) & 1 & 1 & 1 \\ \bar{f}_2(z) & S_1^{(1)} & \bar{S}_1^{(2)} & \bar{S}_2^{(2)} \\ \bar{f}_3(z) & P_1^{(1)} & \bar{P}_1^{(2)} & \bar{P}_2^{(2)} \\ \bar{f}_4(z) & Q_1^{(1)} & \bar{Q}_1^{(2)} & \bar{Q}_2^{(2)} \end{vmatrix} \dots\dots\dots (30)$$

領域2では、

$$\left. \begin{aligned} \theta_1^{(2)}(z) &= D_1^{(2)}(z)/D \\ \theta_2^{(2)}(z) &= D_2^{(2)}(z)/D \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (31)$$

ここに、

$$D_1^{(2)}(z) = \begin{vmatrix} f_1(z) & 1 & 1 & 1 \\ f_2(z) & S_2^{(2)} & \bar{S}_1^{(1)} & \bar{S}_2^{(1)} \\ f_3(z) & P_2^{(2)} & \bar{P}_1^{(1)} & \bar{P}_2^{(1)} \\ f_4(z) & Q_2^{(2)} & \bar{Q}_1^{(1)} & \bar{Q}_2^{(1)} \end{vmatrix} \dots\dots\dots (32)$$

$$D_2^{(2)}(z) = - \begin{vmatrix} f_1(z) & 1 & 1 & 1 \\ f_2(z) & S_1^{(2)} & \bar{S}_1^{(1)} & \bar{S}_2^{(1)} \\ f_3(z) & P_1^{(2)} & \bar{P}_1^{(1)} & \bar{P}_2^{(1)} \\ f_4(z) & Q_1^{(2)} & \bar{Q}_1^{(1)} & \bar{Q}_2^{(1)} \end{vmatrix} \dots\dots\dots (33)$$

式(29), (30)と式(32), (33)中の $f_1(z), \dots, f_4(z)$ は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} f_1(z) &= \theta_1^0(z) + \theta_2^0(z) \\ f_2(z) &= S_1^{(1)} \theta_1^0(z) + S_2^{(1)} \theta_2^0(z) \\ f_3(z) &= P_1^{(1)} \theta_1^0(z) + P_2^{(1)} \theta_2^0(z) \\ f_4(z) &= Q_1^{(1)} \theta_1^0(z) + Q_2^{(1)} \theta_2^0(z) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (34)$$

式(28)と式(31)中の D は次式で与えられる。

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \bar{S}_1^{(1)} & \bar{S}_2^{(1)} & S_1^{(2)} & S_2^{(2)} \\ \bar{P}_1^{(1)} & \bar{P}_2^{(1)} & P_1^{(2)} & P_2^{(2)} \\ \bar{Q}_1^{(1)} & \bar{Q}_2^{(1)} & Q_1^{(2)} & Q_2^{(2)} \end{vmatrix} \dots\dots\dots (35)$$

また、式(28)と式(34)中の $\theta_1^0(z)$ と $\theta_2^0(z)$ は、均質無限板問題の解に対応するものであり、異方性パラメータ $s_1^{(1)} \neq s_2^{(1)}$ のときは式(18)の $\phi_1^0(z)$, $\phi_2^0(z)$, $s_1^{(1)} = s_2^{(1)}$ のときは式(21)の $\phi^0(z)$, $\chi^0(z)$ によって与えられる。

すなわち、

$$\left. \begin{aligned} s_1^{(1)} \neq s_2^{(1)} \text{ の場合,} \\ \theta_1^0(z) &= \phi_1^0(z) \\ \theta_2^0(z) &= \phi_2^0(z) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (36)$$

$$\left. \begin{aligned} s_1^{(1)} = s_2^{(1)} \text{ の場合,} \\ \theta_1^0(z) &= \phi^0(z)/2 \\ \theta_2^0(z) &= \chi^0(z)/2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (37)$$

求めた領域1と2における複素関数の式を式(7)または式(12)に代入すれば、各領域における変位、応力、合力の表示式が得られる。

4.2 計算結果 図2~6は、両半無限板の弾性係数が表1の場合について、(0, η)の点に x 方向の集中力 F_x が作用するときの $x=0.5\eta$ の線上における応力、変位の分布を示すものである。両領域における変位 u_x, u_y および応力 σ_y, τ_{xy} が接合界面 ($y=0$) で連続であることは言うまでもない。

表2には、本論文で求めた基本解を用いて、図2~6中の変位・応力の分布を求める際の中間結果と最終結果も示している(ただし、単位は省略する)。本基本解を利用して応力の数値解析を行う場合、表2のデータは、基本解に関するプログラムをチェックする際に立つと思われる。

二つの材料の弾性係数を適当な値にすることによって、直交異方性材や等方性材などの接合無限板問題での基本解は、本研究で求めた解から得られる。例えば、著者がさきに示した異方性材と等方性材との接合無限板問題の基本解は本研究の解から得ることができる。

また、二つの等方性材の接合無限板問題の基本解も本研究の解から得られる。次に、このことを示す。

まず、二つの材料がともに直交異方性材で、しかも $s_1^{(1)} = s_2^{(1)}$, $s_1^{(2)} = s_2^{(2)}$ の場合の接合無限板における基本解を本研究の解から導出する。

この場合、弾性係数については、次の式が成り立つ。

$$\left. \begin{aligned} a_{16} &= a_{26} = 0 \\ a_{11}(2a_{12} + a_{66}) &= 2a_{22} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (38)$$

また、両材料のパラメータ $s_1^{(1)}$ と $s_1^{(2)}$ はともに純虚数であり、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} s_1^{(1)} &= i\beta^{(1)} \\ s_1^{(2)} &= i\beta^{(2)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (39)$$

ここに、 $\beta^{(1)}$ と $\beta^{(2)}$ は実数である。式(38)、(39)を基本解の式(28)～(35)に代入すれば、 $s_1^{(1)} = s_2^{(1)} = i\beta^{(1)}$, $s_1^{(2)}$

$= s_2^{(2)} = i\beta^{(2)}$ の場合の接合無限板での集中力および転位による解は次のように得られる。

領域 1 では、

$$\left. \begin{aligned} \phi^{(1)}(z_1) &= [D_{11}^{(1)} \bar{\phi}^0(z_1) + D_{12}^{(1)} \bar{\chi}^0(z_1)] / D + \phi^0(z_1) \\ \chi^{(1)}(z_1) &= [D_{21}^{(1)} \bar{\phi}^0(z_1) + D_{22}^{(1)} \bar{\chi}^0(z_1)] / D + \chi^0(z_1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (40)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} D_{11}^{(1)} &= 16a_{11}^{(1)}a_{11}^{(2)}\beta^{(1)}\beta^{(2)}\{\beta^{(1)2} - \beta^{(2)2}\} \\ D_{12}^{(1)} &= \{a_{66}^{(1)} - a_{66}^{(2)}\}\{a_{66}^{(1)} - a_{66}^{(2)} + 8a_{11}^{(1)}\beta^{(2)2}\} \\ D_{21}^{(1)} &= \{a_{66}^{(1)} - a_{66}^{(2)} - 8a_{11}^{(1)}\beta^{(1)2}\}\{a_{66}^{(1)} \\ &\quad - a_{66}^{(2)} - 8a_{11}^{(1)}\beta^{(1)2} + 8a_{11}^{(2)}\beta^{(2)2}\} \\ D_{22}^{(1)} &= 16a_{11}^{(1)}a_{11}^{(2)}\beta^{(1)}\beta^{(2)}\{\beta^{(1)2} - \beta^{(2)2}\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (41)$$

図 2 表 1 に示すような接合無限板の一点 $(0, \eta)$ に集中力 F_x が作用するときの、 $x=0.5\eta$ の線上での応力 σ_x

図 4 表 1 に示すような接合無限板の一点 $(0, \eta)$ に集中力 F_x が作用するときの、 $x=0.5\eta$ の線上での応力 τ_{xy}

図 3 表 1 に示すような接合無限板の一点 $(0, \eta)$ に集中力 F_x が作用するときの、 $x=0.5\eta$ の線上での応力 σ_y

図 5 表 1 に示すような接合無限板の一点 $(0, \eta)$ に集中力 F_x が作用するときの、 $x=0.5\eta$ の線上での変位 u_x

表 1 図 2~6 に用いた材料の弾性係数

		Mat. 1	Mat. 2	Mat. 3	Mat. 4
Elastic constants	a_{11}	0.4878 GPa ⁻¹	0.1729 GPa ⁻¹	0.2668 GPa ⁻¹	0.1028 GPa ⁻¹
	a_{12}	-0.0434 GPa ⁻¹	-0.0291 GPa ⁻¹	0.0210 GPa ⁻¹	-0.0131 GPa ⁻¹
	a_{16}	-0.0666 GPa ⁻¹	-0.1302 GPa ⁻¹	-0.1862 GPa ⁻¹	-0.0077 GPa ⁻¹
	a_{22}	0.9800 GPa ⁻¹	0.4602 GPa ⁻¹	0.5016 GPa ⁻¹	0.1219 GPa ⁻¹
	a_{26}	-0.1125 GPa ⁻¹	-0.1109 GPa ⁻¹	-0.2553 GPa ⁻¹	-0.0084 GPa ⁻¹
	a_{66}	1.4453 GPa ⁻¹	0.6981 GPa ⁻¹	0.8196 GPa ⁻¹	0.2506 GPa ⁻¹
Complex parameters	s_1	0.0734 + 1.2434i	-0.7829 + 1.5010i	-0.3489 + 1.1178i	-0.0374 + 1.0431i
	s_2	-0.2100 + 1.1184i	0.0300 + 0.9631i	-0.3489 + 1.1178i	-0.0374 + 1.0430i

表 2 図 2~6 に関する一部の計算結果

		$F_x = 10, F_y = 0; b_x = 0, b_y = 0; \xi = 0, \eta = 1.0$		$F_x = 10, F_y = 0; b_x = 0, b_y = 0; \xi = 0, \eta = 1.0$	
		Fig. (a) $\Omega_1: \text{Mat. 1}; \Omega_2: \text{Mat. 2}$	Fig. (b) $\Omega_1: \text{Mat. 1}; \Omega_2: \text{Mat. 3}$	Fig. (c) $\Omega_1: \text{Mat. 3}; \Omega_2: \text{Mat. 1}$	Fig. (d) $\Omega_1: \text{Mat. 3}; \Omega_2: \text{Mat. 4}$
eq. (35)		$D = 0.570 - 0.887i$	$D = 1.143 + 2.594i$	$D = 1.143 - 2.594i$	$D = -3.525$
$x = 0.5, y = 0.3$	eq. (34)	$\bar{f}_1(z_1) = 0.400 + 0.469i$ $\bar{f}_2(z_1) = 1.040 - 0.720i$ $\bar{f}_3(z_1) = -0.532 - 0.931i$ $\bar{f}_4(z_1) = -0.034 + 0.280i$	$\bar{f}_1(z_1) = 0.400 + 0.469i$ $\bar{f}_2(z_1) = 1.040 - 0.720i$ $\bar{f}_3(z_1) = -0.532 - 0.931i$ $\bar{f}_4(z_1) = -0.034 + 0.280i$	$\bar{f}_1(z_1) = 0.021 + 0.049i$ $\bar{f}_2(z_1) = 0.093 - 0.061i$ $\bar{f}_3(z_1) = -0.019 - 0.044i$ $\bar{f}_4(z_1) = 0.002 + 0.017i$	$\bar{f}_1(z_1) = 0.021 + 0.049i$ $\bar{f}_2(z_1) = 0.093 - 0.061i$ $\bar{f}_3(z_1) = -0.019 - 0.044i$ $\bar{f}_4(z_1) = 0.002 + 0.017i$
	eq. (28)	$\Theta_1^{(1)}(z_1) = 2.042 - 1.743i$	$\Theta_1^{(1)}(z_1) = 1.976 - 1.503i$	$\Theta_1^{(1)}(z_1) = -0.006 - 0.0004i$	$\Theta_1^{(1)}(z_1) = 0.007 + 0.027i$
	eq. (34)	$\bar{f}_1(z_2) = 0.401 + 0.475i$ $\bar{f}_2(z_2) = 1.065 - 0.705i$ $\bar{f}_3(z_2) = -0.514 - 0.956i$ $\bar{f}_4(z_2) = -0.030 + 0.293i$	$\bar{f}_1(z_2) = 0.401 + 0.475i$ $\bar{f}_2(z_2) = 1.065 - 0.705i$ $\bar{f}_3(z_2) = -0.514 - 0.956i$ $\bar{f}_4(z_2) = -0.030 + 0.293i$	$\bar{f}_1(z_1) = 0.021 + 0.049i$ $\bar{f}_2(z_1) = 0.093 - 0.061i$ $\bar{f}_3(z_1) = -0.019 - 0.044i$ $\bar{f}_4(z_1) = 0.002 + 0.017i$	$\bar{f}_1(z_1) = 0.021 + 0.049i$ $\bar{f}_2(z_1) = 0.093 - 0.061i$ $\bar{f}_3(z_1) = -0.019 - 0.044i$ $\bar{f}_4(z_1) = 0.002 + 0.017i$
	eq. (28)	$\Theta_2^{(1)}(z_2) = -1.871 + 1.227i$	$\Theta_2^{(1)}(z_2) = -1.807 + 1.072i$	$\Theta_2^{(1)}(z_1) = 0.023 - 0.066i$	$\Theta_2^{(1)}(z_1) = 0.013 - 0.092i$
	Stress and displacement	$\sigma_x = -0.506$ $\sigma_y = -0.228$ $\tau_{xy} = 1.318$ $u_x = 0.178$ $u_y = 0.045$	$\sigma_x = -0.543$ $\sigma_y = -0.193$ $\tau_{xy} = 1.230$ $u_x = 0.062$ $u_y = 0.145$	$\sigma_x = -0.060$ $\sigma_y = -0.007$ $\tau_{xy} = 0.087$ $u_x = -0.023$ $u_y = -0.037$	$\sigma_x = -0.008$ $\sigma_y = -0.023$ $\tau_{xy} = 0.123$ $u_x = 0.012$ $u_y = -0.008$
$x = 0.5, y = -0.3$	eq. (34)	$f_1(z_1) = 0.399 - 0.452i$ $f_2(z_1) = 0.979 + 0.756i$ $f_3(z_1) = -0.575 + 0.872i$ $f_4(z_1) = -0.043 - 0.251i$	$f_1(z_1) = 0.394 - 0.465i$ $f_2(z_1) = 1.012 + 0.713i$ $f_3(z_1) = -0.527 + 0.902i$ $f_4(z_1) = -0.046 - 0.274i$	$f_1(z_1) = 0.021 - 0.048i$ $f_2(z_1) = 0.090 + 0.062i$ $f_3(z_1) = -0.020 + 0.043i$ $f_4(z_1) = 0.003 - 0.016i$	$f_1(z_1) = 0.020 - 0.048i$ $f_2(z_1) = 0.089 + 0.061i$ $f_3(z_1) = -0.020 + 0.042i$ $f_4(z_1) = 0.002 - 0.016i$
	eq. (31)	$\Theta_1^{(2)}(z_1) = -0.356 - 1.123i$	$\Theta_1^{(2)}(z_1) = -0.166 + 0.338i$	$\Theta_1^{(2)}(z_1) = 0.108 - 0.031i$	$\Theta_1^{(2)}(z_1) = -0.018 + 0.041i$
	eq. (34)	$f_1(z_2) = 0.396 - 0.474i$ $f_2(z_2) = 1.046 + 0.693i$ $f_3(z_2) = -0.502 + 0.935i$ $f_4(z_2) = -0.041 - 0.292i$	$f_1(z_1) = 0.394 - 0.465i$ $f_2(z_1) = 1.012 + 0.713i$ $f_3(z_1) = -0.527 + 0.902i$ $f_4(z_1) = -0.046 - 0.274i$	$f_1(z_2) = 0.020 - 0.047i$ $f_2(z_2) = 0.088 + 0.062i$ $f_3(z_2) = -0.020 + 0.041i$ $f_4(z_2) = 0.002 - 0.015i$	$f_1(z_1) = 0.020 - 0.048i$ $f_2(z_1) = 0.089 + 0.061i$ $f_3(z_1) = -0.020 + 0.042i$ $f_4(z_1) = 0.002 - 0.016i$
	eq. (31)	$\Theta_2^{(2)}(z_2) = 0.823 + 0.642i$	$\Theta_2^{(2)}(z_1) = 0.495 - 0.858i$	$\Theta_2^{(2)}(z_2) = -0.078 - 0.007i$	$\Theta_2^{(2)}(z_1) = 0.045 - 0.079i$
	Stress and displacement	$\sigma_x = 0.066$ $\sigma_y = -0.204$ $\tau_{xy} = 0.700$ $u_x = -0.658$ $u_y = 0.209$	$\sigma_x = 0.112$ $\sigma_y = -0.159$ $\tau_{xy} = 0.654$ $u_x = -0.747$ $u_y = 0.318$	$\sigma_x = -0.021$ $\sigma_y = -0.011$ $\tau_{xy} = 0.045$ $u_x = -0.061$ $u_y = -0.025$	$\sigma_x = -0.069$ $\sigma_y = -0.037$ $\tau_{xy} = 0.081$ $u_x = -0.026$ $u_y = 0.005$

図 6 表 1 に示すような接合無限板の一点 $(0, \eta)$ に集中力 F_x が作用するとき、 $x=0.5\eta$ の線上での変位 u_y

領域 2 では、

$$\begin{aligned} \phi^{(2)}(z_1) &= [D_{11}^{(2)} \phi^0(z_1) + D_{12}^{(2)} \chi^0(z_1)] / D \\ \chi^{(2)}(z_1) &= [D_{21}^{(2)} \phi^0(z_1) + D_{22}^{(2)} \chi^0(z_1)] / D \end{aligned} \quad \dots\dots (42)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} D_{11}^{(2)} &= -4a_{11}^{(1)}\beta^{(1)2}\{\beta^{(1)} + \beta^{(2)}\} \\ &\quad \times \{a_{66}^{(1)} - a_{66}^{(2)} - 8a_{11}^{(1)}\beta^{(1)2}\} / \beta^{(2)} \\ D_{12}^{(2)} &= -4a_{11}^{(1)}\beta^{(1)2}\{\beta^{(1)} - \beta^{(2)}\} \\ &\quad \times \{a_{66}^{(1)} - a_{66}^{(2)}\} / \beta^{(2)} \\ D_{21}^{(2)} &= 4a_{11}^{(1)}\beta^{(1)2}\{\beta^{(1)} - \beta^{(2)}\}\{a_{66}^{(1)} \\ &\quad - a_{66}^{(2)} - 8a_{11}^{(1)}\beta^{(1)2} + 8a_{11}^{(1)}\beta^{(2)2}\} / \beta^{(2)} \\ D_{22}^{(2)} &= 4a_{11}^{(1)}\beta^{(1)2}\{\beta^{(1)} + \beta^{(2)}\} \\ &\quad \times \{a_{66}^{(1)} - a_{66}^{(2)} + 8a_{11}^{(1)}\beta^{(2)2}\} / \beta^{(2)} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (43)$$

また、式(40)と式(42)中に

$$\begin{aligned} D &= \{a_{66}^{(1)} - a_{66}^{(2)}\}[-\{a_{66}^{(1)} - a_{66}^{(2)}\} \\ &\quad + 8\{a_{11}^{(1)}\beta^{(1)2} - 8a_{11}^{(1)}\beta^{(2)2}\} \\ &\quad + 16a_{11}^{(1)}a_{11}^{(2)}\beta^{(1)}\beta^{(2)}\{\beta^{(1)} + \beta^{(2)}\}^2] \quad \dots\dots (44) \end{aligned}$$

一方、等方性材の弾性係数は、式(14)のように横弾性係数 G とポアソン比 ν によって表される。この場合、パラメータ s_1 と s_2 はともに $s_1 = s_2 = i$ である [式

(16)]。これらの式を式(40)～(44)に代入すれば、二つの等方性材の接合無限板の一点に集中力と転位が作用する場合についての、Frasier と Rongved が導いた基本解⁽⁹⁾と一致する式が得られる。

5. 結 論

本論文は、平面弾性問題として、二つの異方性材の接合無限板中の一点に集中力と転位が作用するときの変位、応力分布の解を導いたものである。

異方性材の弾性係数の組合せによって、パラメータ s_1 と s_2 が $s_1 \neq s_2$ になる場合、と $s_1 = s_2$ になる場合との二とおりがある。複素関数による変位、応力の表示式は、 s_1 と s_2 が等しいかどうかによって異なる。したがって、異方性材接合無限板における基本解を導く際、両材料の s_1, s_2 に関する 4 種類の組合せの場合：

- (1) $s_1^{(1)} \neq s_2^{(1)}, s_1^{(2)} \neq s_2^{(2)}$
- (2) $s_1^{(1)} \neq s_2^{(1)}, s_1^{(2)} = s_2^{(2)}$
- (3) $s_1^{(1)} = s_2^{(1)}, s_1^{(2)} \neq s_2^{(2)}$
- (4) $s_1^{(1)} = s_2^{(1)}, s_1^{(2)} = s_2^{(2)}$

を考慮しなければならない。本研究で求めた基本解は、その 4 種類の場合のいずれにも適用できる。また、等方性材がパラメータ $s_1 = s_2 = i$ の場合に相当しているため、本研究で求めた基本解は、異方性材・等方性材の接合無限板や等方性材・等方性材の接合無限板などの問題における基本解を含む形である。

文 献

- (1) Frasier, J. T. and Rongved, L., *J. Appl. Mech.*, **24** (1957), 582.
- (2) 笠野・ほか 3 名, 機論, **52**-476, A (1986), 933.
- (3) 笠野・ほか 3 名, 機論, **52**-478, A (1986), 1500.
- (4) Wu, R. S. and Chou, Y. T., *J. Appl. Mech.*, **49**(1982), 55.
- (5) 陳, 機論, **60**-578, A (1994), 2383.
- (6) 陳, 機論, **60**-579, A (1994), 2581.
- (7) Lekhnitskii, S. G., *Anisotropic Plates*, (1968), 19, Gordon and Breach.
- (8) Hirth, J. P., *Scripta Metall.*, **6**(1972), 535.
- (9) Loeber, J. F. and Sih, G. C., *Trans. ASME, Ser. E*, **34** (1967), 240.