二質点応答不規則荷重下のレインフローレンジ分布評価*

酒井 信介^{*1}, 岡村 弘之^{*1}Distribution of Rainflow Range of Random Process Response
from Two Degrees of Freedom System

Shinsuke SAKAI and Hiroyuki OKAMURA

We showed in the previous paper that the distribution of rainflow range of random wave with bimodal PSD can be determined analytically from its PSD geometry. The probability density of the rainflow range can be evaluated from the central frequency ratio r and the power ratio b . This method postulates that the geometry of the two concentrated powers is rectangular. To apply the proposed method to the random wave response from a practical two degrees of freedom system, the procedure for extracting r and b from the PSD has to be clarified. In this paper the method for evaluating r and b from PSD will be investigated using simulation of random response wave from a two degrees of freedom system. Finally, the procedure to evaluate the probability density of rainflow range from given differential equations of the response system will be summarized.

Key Words: Service Load, Statistical Treatment, Life Prediction, Rainflow Method, Stationary Gaussian Random Loads, Distribution of Range, Cumulative Fatigue Damage, Two Degrees of Freedom

1. 緒 言

前報⁽¹⁾で、パワースペクトルに2つの鋭いピークを有するガウス性定常不規則荷重については、レインフローレンジ分布がパワースペクトルの形状と関係付けて解析的に評価できることを示した。レンジ分布の形状に影響を与えるのは、2つのパワースペクトルの中心周波数比 r 、およびパワー比 b であることを明らかにし、 r と b の関数として分布の確率密度関数を誘導した。前報では、2つの集中したパワーを矩形状の形状でモデル化する場合について報告したが、一般に構造物の応答系が線形微分方程式で与えられる場合、その応答波形のパワースペクトルは必ずしも矩形状の領域に集中しているわけではない。従って、前報の結論を一般化するためには、パワースペクトルの形状から r と b の特徴量を抽出する手順を明らかにしなければならない。これが可能となれば、提案する疲労強度評価法を不規則信号論と結合することが可能になり、有用である。何故なら多質点系の応答不規則波形の性質を

構造系の伝達関数と関係付けて評価する手法は不規則信号論の分野で確立しているからである。

本報では、構造物の応答が定数係数の線形微分方程式で与えられるときに、系の伝達関数から評価される応答不規則波のスペクトルに基づいてレインフローレンジ分布を統計的に評価する一般的手順を明らかにする。また、二質点系構造物の地盤からの応答波形をシミュレーションにより発生し、レインフローレンジ分布を評価することにより、提案法の評価精度を検証する。

2. PSDからのパラメータ抽出法

2・1 バイモーダルPSDでのレンジ分布 図1に示すバイモーダルPSDを有する不規則波形については、レインフローレンジ分布が多くの条件下で次式のように表現できることを前報で示した⁽¹⁾。

$$f(X) = \frac{(1+b)X}{4\sigma_s^2(1+r)} \left[\exp\left(-\frac{X^2(1+b)}{8\sigma_s^2}\right) + \frac{r}{b} \exp\left(-\frac{X^2(1+b)}{8b\sigma_s^2}\right) \right] \quad (1)$$

ただし、 r は2つの中心周波数の比、 b は高周波数成分のパワーの低周波数成分に対する比、 σ_s は波形の標準偏差である。本報では、PSDが図1のように矩形状で

* 原稿受付 平成6年4月11日。

*1 正員, 東京大学工学部 (〒113 東京都文京区本郷7-3-1)。

図1. バイモデルPSDの例

ない一般の場合について、等価な r と b を合理的に評価する方法を検討する。

2・2 構造物モデル 構造物のモデルとしては、一質点系の地盤からの加速度応答が、配管系などの機械構造物と建築構造物からなる二質点系に負荷される場合を考える。疲労に影響を与えるのは、主に変位であると考えられることから、配管系と建屋との相対変位応答を考察の対象とする。

地盤の加速度としては、強さ a なる白色雑音の1質点系応答波形を用いる。この場合の系の伝達関数は、次式で与えられる⁽⁴⁾。

$$H_g(S) = \frac{2\omega_g h_g S + \omega_g^2}{S^2 + 2\omega_g h_g S + \omega_g^2} \quad (2)$$

ここで、 ω_g は地盤の共振角振動数、 h_g は減衰比である。従って、強さが a の白色雑音の応答波形のパワースペクトルは

$$S_g(\omega) = a \cdot H_g(i\omega) \cdot H_g(-i\omega) \quad (3)$$

から求められる。ここで、 i は複素数である。

一方、構造系の動的挙動は図2に示すバネ・マス系として表現できる。図中 k はバネ定数、 c は減衰定数、 m は質量である。この系に $\alpha(t)$ の地動加速度が加えられたときの運動方程式は次式で表現される⁽³⁾。

$$\begin{aligned} \ddot{x}_m + 2\omega_m h_m \dot{x}_m + \omega_m^2 x_m - (2\omega_m h_m \dot{x}_b + \omega_m^2 x_b) &= -\alpha(t) \\ -\gamma(2\omega_m h_m \dot{x}_m + \omega_m^2 x_m) + \ddot{x}_b & \\ + (2\omega_b h_b + \gamma 2\omega_m h_m) \dot{x}_b & \\ + (\omega_b^2 + \gamma \omega_m^2) x_b &= -\alpha(t) \end{aligned} \quad (4)$$

記号の意味は、 x : 地表と質点の相対変位、 $h(=c/2\sqrt{mk})$: 減衰比、 $\gamma(=m_m/m_b)$: 質量比、 $\omega(=\sqrt{k/m})$: 共振角振動

図2. 2質点系モデル

数、添字 m :機械構造物系、添字 b :建築構造物系、である。

入力加速度の代表値を $\alpha(S)$ 、地盤に対する相対変位 x_b 、 x_m のラプラス変換を各々 X_b 、 X_m とすると、入力加速度に対する相対変位応答の機械構造物系応答倍率は、次式で表現できる⁽⁴⁾。

$$H_s(S) = \frac{-(X_m - X_b)}{\alpha(S)} = \frac{1}{\Delta} [2\omega_b h_b S + \omega_b^2] \quad (5)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \Delta &= S^4 + [2\omega_b h_b + (\gamma + 1)2\omega_m h_m] S^3 \\ &+ [\omega_b^2 + (\gamma + 1)\omega_m^2 + 2\omega_b h_b \cdot 2\omega_m h_m] S^2 \\ &+ (\omega_b^2 \cdot 2\omega_m h_m + \omega_m^2 \cdot 2\omega_b h_b) S + \omega_b^2 \omega_m^2 \end{aligned} \quad (6)$$

である。従って、パワースペクトル $S_g(\omega)$ が式(3)であたえられる地盤加速度が加わったときの、応答波形のパワースペクトルは

$$S_s(\omega) = S_g(\omega) \cdot H_s(i\omega) \cdot H_s(-i\omega) \quad (7)$$

から求められる。ただし、スペクトル中にピークを2つ持つ場合を扱うので、 $\omega_g = \omega_b$ として検討する。図3は、典型的な $S_s(\omega)$ の形状(太線)及び、後述のシミュレーション波のスペクトル解析結果(細線)を重ねて表示したものである。

2・3 r, b の評価法 図3のような二質点系応答波のパワースペクトルを図1の箱型の形状にモデル化するためには、レンジ分布の評価上、等価な結果を与える

図3. 2質点系応答波パワースペクトルの例

図4. PSDの箱型形状への置き換え

r と b を評価する必要がある。中心周波数比 r については、 ω_H/ω_L で評価できるのは、明らかであるので、等価な b の評価法について検討する。Broch⁽²⁾は、類似のスペクトル形状について、不規則波のピーク値の確率密度を評価するに当たり、スペクトルの各ピークを箱型に置き換えるためのbox理論を提案している。この理論は、図4のように、各共振成分のピーク G_i に対して、-3dBとなるバンド幅 $\Delta\omega_i$ を評価してこの領域の積分値、つまりウズミ部分のパワーを有する箱型スペクトルに置き換えるものである。ここでも、この考え方に従ってパワースペクトル上の2つのピークを各々箱型に置き換えた後に b を評価することを考える。ただし、 $\Delta\omega_i$ の評価にあたって、 G_i の-3dBの位置に設定することの根拠が若干あいまいであるので、この妥当性について検討しておく。図5は、表1中のS1、S2、S4、S14の4種類の条件についてスペクトルの箱型への置き換えを G_i の-1dB、-2dB、-3dB、-4dB、-5dBの5種類で行なった時の b の評価値の変化を示す。ただし、図4のウズミ部分の積分は3次のニュートン・コーツ法によって数値積分した。いずれの場合についても、 b 値は-2dB以降は殆んど変化せず、この値の採用値は b に大きな影響を及ぼさない。従って、Brochと同様に、-3dBの値を用いて b を評価するものとする。

3. シミュレーションによる検証

3.1 シミュレーション法 上述の二質点系モデルの応答不規則波形をシミュレーションで発生し、提

図5. dB値と b 値の関係

案法に基づく r と b の評価法の妥当性を調べる。手順は以下の通りである。

- (1) シミュレーションで発生した不規則波形について、レインフロー法で波形計数し、レンジの密度分布、線形被害則に基づく疲労被害を評価する。なお、波形計数法としては、ヒステリシスループ法⁽⁶⁾

などレンジペアを計数する類似の方法が存在するが、本報で対象とする不規則波形については、両者で実質上差異を生じない。

- (2) 式 (7) のスペクトルを表現する関数から提案法に基づく r と b を評価する。
- (3) 式 (1) に r と b を代入して評価されるレンジ確率密度とシミュレーション結果を比較・検証する。

また疲労被害についても評価精度を検討する。

線形微分方程式で与えられる構造系の動的応答波形は、4 次のルンゲクッタ法によって発生した。動的応答系としては、本報の提案法が、幅広い領域で検証し易いスペクトルの条件を作成できる $\omega_g = \omega_b$ とした。実構造物では、このような条件が設定されることは、ないが、ここでは提案法の妥当性の検証に重点を置き、検証の容易さを重視した。波形の発生については、高周波成分の 1 周期に対して、20 点以上の応答波が得られるよう Δt を設定した。また、1 条件で 2000 ~ 3000 個のレンジが得られるようにした。表 1 に示すように幅広い条件について 40 種類のシミュレーションを実施した。図 6 には条件 S20 の波形発生例を示す。

図 6. シミュレーション波形例 (条件 S20)

3・2 r 、 b の評価 表 1 中には、2 つの共振周波数の比である r の値と、先述の box 理論の利用により -3dB を採用してスペクトルを 2 つの箱型形状に置き換えたときに評価される b 値を示す。このように、構造物の動的応答特性と結びつけて r と b を容易に評価することが可能である。また、応答特性の変更により r と b について、幅広い領域の組み合わせを実現できること

がわかる。表中には、シミュレーションで発生された波形の極大値と平均値正方向通過頻度から評価した不規則度指数 ϵ (0 : Rayleigh 過程) も併せてしめすが、 ϵ についても、幅広い領域の波形を実現できる。

3・3 レンジ確率密度分布 図 7(a)(b) は、S20 と S25 の条件についてシミュレーション波形について評価されたレンジの確率密度と提案法によって評価した r と b 値から式 (1) によって評価した結果を比較したものである。両者は良く一致しており、提案法によって r 、 b を評価することは、妥当であると考えられる。これ以外の多くの条件についても、提案法によって、良いレンジの確率密度が得られることが確認された。

3・4 累積疲労被害評価 線形累積損傷則を仮定して評価される疲労被害の評価精度を調べる。S-N 曲線は次式で与えられるものとする。

$$N = C \cdot X^{-m} \quad (8)$$

提案するレンジ密度の評価法によれば、単位時間当たりに累積する疲労被害値 $\dot{D}_{th}$ は、 r と b の関数として

$$\dot{D}_{th} = \dot{D}_L (1 + b^{\frac{m}{2}} r) \quad (9)$$

で与えられることを示した⁽⁵⁾。ここで、 $\dot{D}_L$ は低周波数成分の寄与分で次式で与えられる。

$$\dot{D}_L = \frac{2^{3m/2} \sigma_s^m}{2\pi C} \Gamma\left(1 + \frac{m}{2}\right) I_{L0}^{\frac{m-1}{2}} \cdot I_{L2}^{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

ただし、 I_{L0}, I_{L2} は、パワースペクトル低周波数成分の原点回りの 0 次、2 次のモーメントである。従って、本論文の手法で r と b を評価できれば、式 (9) により、単位時間当たりの疲労被害を評価できる。図 8 は、 $\sigma_s = 1$ 、 $m = 2$ の場合について表 1 の条件でシミュレーションした波形から評価される被害 $\dot{D}_{sim}$ と式 (9) の結果を比較したものである。ただし $C=1$ としている。 $\dot{D}_{sim}$ に対して $\dot{D}_{th}$ はごくわずかず大きな値を示しているが、多くの条件下で両者は比較的良く一致していることがわかる。しかし、 $\dot{D}$ が小さい場合には評価誤差は相対的に大きくなる。

このことをより詳しく調べるために $\dot{D}_{th}$ と $\dot{D}_{sim}$ の比と $\dot{D}_{sim}$ の関係を図 9 に示す。このように提案法では、シミュレーションに対して多くの場合、過大評価を与える。これは、提案法では全てのパワーが 2 つのピークの領域に集中するものとして近似するが、本来疲労損傷にほとんど寄与のない他の周波数成分のパワーが、ピークの領域に加算して評価することになるので、過分に見積もることになるものと思われる。しかし、 $\dot{D}_{sim}$ が 5 以上の領域については、誤差は 20 % 以内であり、比較的良い評価精度を有しているといえる。 $\dot{D}_{sim}$ が 5 以下の領域では提案法が 8 割も過大に評価する場合があり、評価精度は低下している。

表 1. シミュレーション条件および r と b の評価

No.	h_g	h_m	h_b	γ	r	b	ϵ	No.	h_g	h_m	h_b	γ	r	b	ϵ
S1	0.04	0.005	0.01	0.00001	4	1.044	0.710	S21	0.04	0.005	0.01	0.001	10	0.07444	0.942
S2	0.04	0.005	0.01	0.00001	6	0.3325	0.866	S22	0.04	0.005	0.01	0.01	10	0.07433	0.952
S3	0.04	0.005	0.3	0.00001	10	0.0005037	0.934	S23	0.04	0.005	0.01	0.05	10	0.07366	0.970
S4	0.02	0.01	0.005	0.00001	6	5.269	0.489	S24	0.01	0.01	0.005	0.00001	10	4.270	0.472
S5	0.02	0.005	0.01	0.00001	10	0.2681	0.867	S25	0.005	0.01	0.005	0.00001	10	13.31	0.258
S6	0.06	0.005	0.01	0.00001	10	0.03411	0.962	S26	0.04	0.01	0.03	0.00001	5	0.3070	0.854
S7	0.08	0.005	0.01	0.00001	10	0.01956	0.970	S27	0.005	0.01	0.01	0.00001	6	19.07	0.300
S8	0.1	0.005	0.01	0.00001	10	0.01274	0.973	S28	0.005	0.01	0.01	0.00001	8	8.245	0.378
S9	0.3	0.005	0.01	0.00001	10	0.001861	0.969	S29	0.005	0.01	0.01	0.00001	15	1.280	0.698
S10	0.04	0.01	0.01	0.00001	10	0.1489	0.927	S30	0.04	0.005	0.01	0.00001	10	0.07446	0.914
S11	0.04	0.03	0.01	0.00001	10	0.4456	0.849	S31	0.03	0.05	0.005	0.00001	4	37.45	0.160
S12	0.04	0.05	0.01	0.00001	10	0.7393	0.775	S32	0.05	0.05	0.05	0.00001	4	1.005	0.701
S13	0.04	0.1	0.01	0.00001	10	1.447	0.659	S33	0.08	0.05	0.05	0.00001	8	0.06798	0.952
S14	0.04	0.3	0.01	0.00001	10	3.396	0.458	S34	0.04	0.05	0.05	0.00001	8	0.1876	0.917
S15	0.04	0.005	0.02	0.00001	10	0.03414	0.963	S35	0.04	0.1	0.01	0.00001	12	0.8421	0.756
S16	0.04	0.005	0.04	0.00001	10	0.01365	0.973	S36	0.02	0.1	0.01	0.00001	12	3.033	0.538
S17	0.04	0.005	0.08	0.00001	10	0.004587	0.975	S37	0.005	0.2	0.01	0.00001	12	44.16	0.194
S18	0.04	0.005	0.1	0.00001	10	0.003139	0.971	S38	0.005	0.2	0.005	0.00001	12	137.6	0.112
S19	0.04	0.005	0.01	0.00001	8	0.1438	0.899	S39	0.5	0.2	0.005	0.00001	8	0.1355	0.916
S20	0.04	0.005	0.01	0.0001	10	0.07445	0.941	S40	0.2	0.2	0.01	0.00001	6	0.5748	0.775

4. 構造物動特性と疲労強度の関係

構造物の動的応答特性が線形微分方程式で表現され、入力波のパワースペクトルが $S_g(\omega)$ のときに、応答波のレインフロー分布および累積疲労被害値を求めるための一般的な手順は以下のように要約される。

- (1) 微分方程式のラプラス変換により構造系の伝達関数 $H_s(S)$ を求める。
- (2) 式 (7) により応答波のパワースペクトル $S_s(\omega)$ を求める。
- (3) パワースペクトルにbox理論を適用することにより r と b を評価する。
- (4) レインフローレンジの密度関数は式 (1) により評価される。
- (5) 単位時間当たりの累積疲労被害値は、S-N曲線さえ求まっていれば、式 (9) により求まる。

5. 結 言

二質点系の構造物の動的応答特性と関係付けて、応答不規則波のレインフローレンジ密度分布、疲労被害を評価する方法を提案した。得られた結論は以下のよう要約される。

- (1) 構造系の伝達関数から評価される不規則波のスペクトルから、2つのピークの周波数比、パワー比を評価すれば、前報⁽¹⁾の提案法にてレインフローレンジ密度分布を精度よく評価できる。
- (2) パワー比の評価にあたっては、スペクトルのピーク値の3dBダウンとなる領域にわたる積分値を、等価なパワーと置き換えることにより評価できる。
- (3) 一質点系としての地盤の加速度が二質点系構造物に入力されたときの相対変位応答について、多くの条件下でシミュレーションを実施し、レンジ密度、累積疲労被害ともに提案法で良好に評価でき

(a)

(b)

図 7. レンジ確率密度の評価精度

ることを確認した。ただし、単位時間当たりの疲労被害 $\dot{D}$ についてみたとき、 $\dot{D}$ が小さくなるほど相対的な評価誤差は大きくなる。

文 献

- (1) 酒井信介・岡村弘之, パワースペクトルに2つのピークを有する定常不規則波のレインフローレンジ分布, 機論 60-

図 8. 単位時間当たりの累積疲労被害評価の比較

図 9. 単位時間当たりの累積疲労被害評価精度

574,A(1994),1464

- (2) Broch, J.T., *Peak-Distribution Effects in Random-Load Fatigue*, ASTM STP 462 (1970),105
- (3) 佐藤寿芳, 建築・機械構造物系の地震時応答について, 機論 (1), 32-233(1966),29
- (4) 佐藤寿芳, 建築機械構造物の耐震設計に関する研究, 東京大学生研報告,15-1(1965)
- (5) 酒井信介・岡村弘之, パワースペクトルに2つのピークを有する不規則荷重下の疲労強度信頼性評価, 日本材料学会, 第12回材料・構造信頼性シンポジウム, 講演論文集,(1993)
- (6) Okamura,H., Sakai,S. and Susuki,I., *Cumulative Fatigue Damage Under Random Loads*, Fatigue Engng. Mater. and Struct.,1(1979),409