だ円形介在物内に作用する集中力
および転位による弾性場の解*陳 玳 珩^{*1}Solution for Elastic Field due to Point Force
and Dislocation Acting Within an Elliptic Inclusion

Dai-heng CHEN

The plane elasticity problem of a point force and a dislocation acting at a point inside an elliptic inclusion in an infinite plate was solved by Warren in 1983. However, in this study, it is found that the solution by Warren does not converge for the case in which the point of action of the point force and dislocation is near to the interface. The solution applicable for all cases, including the case where the point force and dislocation are applied at a point on the interface, is obtained in this paper in the form of functions plus an infinite series. By carefully defining the functions, the infinite series attains an acceptable convergence.

Key Words: Elasticity, Composite Material, Green's Function, Plane Problem, Inclusion, Point Force, Dislocation

1. 緒 言

だ円形介在物を有する無限板の基本解は、集中力および転位の作用点が介在物の外部にある場合と内部にある場合とではその式が異なっている。Stagni-Lizzio⁽¹⁾⁽²⁾は集中力および転位の作用点が介在物の外部にある場合について、Warren⁽³⁾はその作用点が介在物の内部にある場合について、それぞれの変位・応力の表示式を与えたので、この種の基本解の問題はすでに解決されたと言われている。しかし、著者の研究⁽⁴⁾によって、Stagniら⁽¹⁾⁽²⁾およびWarren⁽³⁾の解にはいずれも問題があることが明らかになった。それらの解は、無限級数を含んでいるが、その無限級数の収束性は、集中力または転位の作用点が介在物の接合界面の近傍にある場合に対しては非常に悪い。基本解を用いて体積法や境界要素法などによる応力の数値解析を行う際、計算時間の制約のため、基本解に含まれている無限級数を最初の数項で近似しなければならない。数値解析の精度を確保するため、その無限級数の収束性が重要となる。したがって、Stagniら⁽¹⁾⁽²⁾およ

びWarren⁽³⁾の解は、介在物の縁き裂や界面き裂などの問題の解析に適用できない。そこで、著者はさきの研究⁽⁴⁾で、Stagniらの解における収束性の問題点を解決するため、独自の解析に基づいて、介在物の外部の一点に集中力および転位が作用する場合について、収束性がよい無限級数で表されている弾性場の解を導いた。この解は、集中力および転位の作用点が界面上にあっても適用できる。そして、本研究では、Warren⁽³⁾の解に残されている収束性の問題点を解決するため、だ円形介在物を有する無限板の基本解の問題に対して再検討を行い、介在物の内部の一点に集中力および転位が作用する場合について、その集中力および転位の作用点が界面の近傍および界面上にあっても適用できる弾性場の解を導いた。

2. 基 本 解

図1のように、主軸 a, b のだ円の両軸の方向に座標軸 x, y をとり、だ円の外部と内部領域をそれぞれ領域1と2、 Ω_1 と Ω_2 とする。集中力と転位が介在物内の任意の一点 z_0 に作用していると仮定する。また、無限板と介在物の弾性性質については、それぞれの横弾性係数およびポアソン比を G_1, ν_1 と G_2, ν_2 とする。両領域における合力 P_x, P_y , 変位 u_x, u_y , 応力

* 原稿受付 平成6年6月17日。

^{*1} 正員、九州工業大学情報工学部 (〒820 飯塚市大字川津 680 の4)。

$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ を、複素応力関数で表す。

$$\begin{aligned} P_y + iP_x &= -\overline{\phi(z)} - \overline{z}\phi'(z) - \phi(z) \\ 2G(u_x - iu_y) &= \kappa \overline{\phi(z)} - \overline{z}\phi'(z) - \phi(z) \\ \sigma_x + \sigma_y &= 4 \operatorname{Re}[\phi'(z)] \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2[\overline{z}\phi''(z) + \phi'(z)] \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここに、

$$\kappa = \begin{cases} (3-\nu)/(1+\nu) & (\text{平面応力}) \\ 3-4\nu & (\text{平面ひずみ}) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (2)$$

だ円形の境界における境界条件を考慮するため、図 2 に示すように、次の変換を用いて物理面 $z(=x+iy)$ を $\zeta(=\xi+i\eta)$ 面に写像する。

$$z = \omega(\zeta) = c\zeta + d/\zeta \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここに、

$$\begin{aligned} c &= (a+b)/2 \\ d &= (a-b)/2 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (4)$$

これによって物理面のだ円の外部は ζ 面の半径 $r=1$ の円の外部に、物理面のだ円の内部は ζ 面の半径 $r=\sqrt{|d/c|}$ と $r=1$ の円環の内部に変換される。ここで、集中力および転位の作用点 z_0 に対応する ζ 面上の点を ζ_0 とする。

$$z_0 = \omega(\zeta_0) \quad \dots\dots\dots (5)$$

領域 Ω_1 と Ω_2 の弾性場に対応する複素応力関数をそれぞれ $\phi_1(\zeta), \phi_1(\zeta)$ と $\phi_2(\zeta), \phi_2(\zeta)$ とする。

本問題の弾性場の基本解は次の四つの条件を満足しなければならない。

(1) まず、集中力と転位が作用している点 z_0 において、次の力の合力条件および変位の増分条件を満足しなければならない。

(a) 力の合力条件：点 z_0 を囲む任意の閉じた経路にそって、内側の部分が外側の部分に及ぼす応力の

合力が (F_x, F_y) である。

(b) 変位の増分条件：点 z_0 のまわりを反時計方向に一周するとき生じる x 方向と y 方向の変位の増分がそれぞれ b_x と b_y である。

このような条件を満足させるため、領域 Ω_2 の弾性場に対応する複素関数 $\phi_2(\zeta)$ と $\phi_2(\zeta)$ は、同様な集中力および転位の作用による均質無限板の基本解と同様な特異性をもたなければならない。

(2) 複素関数 $\phi_1(\zeta)$ と $\phi_1(\zeta)$ は、領域 Ω_1 内の解析関数である。しかも、無限遠では、 $\phi_1(\zeta)$ と $\phi_1(\zeta)$ による応力は零である。複素関数 $\phi_2(\zeta)$ と $\phi_2(\zeta)$ は、特異点 $\zeta=\zeta_0$ を除けば、領域 Ω_2 内の解析関数である。

(3) 領域 1 と 2 における弾性場はまた、介在物と無限板との接合界面における応力と変位の連続条件を満足しなければならない。

変換 (3) を用いると、接合界面における応力と変位の連続条件は次の二つの式で表される。

$$\phi_1(\sigma) + \overline{\eta_1(1/\sigma)} = \phi_2(\sigma) + \overline{\eta_2(1/\sigma)} \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$G_2\{-\kappa_1\phi_1(\sigma) + \overline{\eta_1(1/\sigma)}\} = G_1\{-\kappa_2\phi_2(\sigma) + \overline{\eta_2(1/\sigma)}\} \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここに、 σ は ζ 面における半径 $r=1$ の円上の点である。また、補助関数 $\eta(\zeta)$ は次式で定義されるものである。

$$\eta(\zeta) = \frac{\omega(1/\zeta)}{\omega'(\zeta)} \phi'(\zeta) + \phi(\zeta) \quad \dots\dots\dots (8)$$

(4) だ円の両焦点を結ぶ線分上で応力と変位の連続条件を満足しなければならない。

式 (3) の変換によって、だ円の両焦点を結ぶ線分は ζ 面上の円 $r_0=\sqrt{|d/c|}$ の縁に変換される。だ円内部における変位・応力の連続性を保証するため、 ζ 面上で求めた変位、合力は次式を満足しなければならない。

$$\left. \begin{aligned} u_x(\zeta)|_{\zeta=\sqrt{m}e^{i\theta}} &= u_x(\zeta)|_{\zeta=\sqrt{m}e^{-i\theta}} \\ u_y(\zeta)|_{\zeta=\sqrt{m}e^{i\theta}} &= u_y(\zeta)|_{\zeta=\sqrt{m}e^{-i\theta}} \\ P_x(\zeta)|_{\zeta=\sqrt{m}e^{i\theta}} &= P_x(\zeta)|_{\zeta=\sqrt{m}e^{-i\theta}} \\ P_y(\zeta)|_{\zeta=\sqrt{m}e^{i\theta}} &= P_y(\zeta)|_{\zeta=\sqrt{m}e^{-i\theta}} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここに、

$$m = d/c \quad \dots\dots\dots (10)$$

図 1 だ円形介在物を有する無限板

図 2 写像関数による変換

式(9)より、変数 ζ で表されている領域 Ω_2 内の複素関数 $\phi_2(\zeta)$ と $\psi_2(\zeta)$ は、次式を満足しなければならない。

$$\phi_2(\zeta) = \phi_2(m/\zeta), \quad \psi_2(\zeta) = \psi_2(m/\zeta) \quad \dots\dots\dots (11)$$

上述の四つの条件を満足する解を求めるため、本研究では、すでに求められた介在物が円形である場合の基本解⁽⁵⁾の形に基づいて、介在物がだ円形である場合の応力関数を次の式のように仮定できるものとする。

領域 Ω_1 に対しては、

$$\phi_1(\zeta) = \frac{(\alpha+1)}{(\beta-1)} R_2 \log(1-\zeta_o/\zeta) - R_1 \log(\zeta) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^{-n} \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\eta_1(\zeta) = \frac{\alpha+1}{\beta+1} \left[\lambda_2 \overline{R_2} \log(1-\zeta_o/\zeta) - \frac{R_2(1/\zeta_o + m\zeta_o - \overline{h_1})}{h_2(1-\zeta_o/\zeta)} - \frac{R_2}{h_2} \left(\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{\zeta_o} \right) \right] + \lambda_1 \overline{R_1} \log(\zeta) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \zeta^{-n} \quad \dots\dots\dots (13)$$

領域 Ω_2 に対しては、

$$\phi_2(\zeta) = -R_2 \log \left\{ (\zeta - \zeta_o) \left(1 - \frac{m}{\zeta_o \zeta} \right) \right\} + \frac{\alpha-\beta}{\beta+1} \left[\lambda_2 R_2 \log(\xi_1 \xi_2) - \frac{\overline{R_2}(\zeta + m/\zeta - h_1)}{h_2} \{1/\xi_1 + 1/\xi_2\} \right] + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \{ \zeta^n + (m/\zeta)^n \} \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$\begin{aligned} \psi_2(\zeta) = & \lambda_2 \overline{R_2} \log \left\{ (\zeta - \zeta_o) \left(1 - \frac{m}{\zeta_o \zeta} \right) \right\} + \frac{R_2 \overline{h_1}}{(\zeta - \zeta_o) \{1 - m/(\zeta \zeta_o)\}} + \frac{\alpha+\beta}{\beta-1} \overline{R_2} \log(\xi_1 \xi_2) \\ & + \frac{(\alpha-\beta) \lambda_2 R_2 \overline{\zeta_o}}{(\beta+1) h_3} \left[\overline{\zeta_o} \left\{ \frac{1+m\zeta_o^2}{\xi_1} + \frac{1+m^3/\zeta_o^2}{\xi_2} + (m^2-1) \right\} + m(\zeta + m/\zeta) \right] \\ & + \frac{(\alpha-\beta) \overline{R_2}}{(\beta-1) h_2 h_3} (1-\zeta_o \overline{\zeta_o})(1-m \overline{\zeta_o}/\zeta_o) \left[(m + \overline{\zeta_o}^2) \left\{ \frac{\zeta}{\xi_1^2} + \frac{m/\zeta}{\xi_2^2} \right\} + \frac{2(m^2+1) \overline{\zeta_o}}{h_3} \{1/\xi_1 + 1/\xi_2 - 1\} \right] \\ & + \frac{1}{\zeta - m/\zeta} \sum_{n=1}^{\infty} d_n \{ \zeta^n - (m/\zeta)^n \} \quad \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

ここに、

$$h_1 = \zeta_o + m/\zeta_o, \quad h_2 = \zeta_o - m/\zeta_o, \quad h_3 = 1 - m \overline{\zeta_o}^2 \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$\xi_1 = 1 - \zeta \overline{\zeta_o}, \quad \xi_2 = 1 - m \overline{\zeta_o}/\zeta \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$R_1 = \begin{cases} \frac{(F_x + iF_y)}{2\pi(\kappa_1 + 1)} & \text{(集中力)} \\ \frac{-G_1(b_y - ib_x)}{\pi(\kappa_1 + 1)} & \text{(転位)} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$\lambda_1 = \begin{cases} \kappa_1 & \text{(集中力)} \\ -1 & \text{(転位)} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$R_2 = \begin{cases} \frac{(F_x + iF_y)}{2\pi(\kappa_2 + 1)} & \text{(集中力)} \\ \frac{-G_2(b_y - ib_x)}{\pi(\kappa_2 + 1)} & \text{(転位)} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (20)$$

$$\lambda^2 = \begin{cases} \kappa_2 & \text{(集中力)} \\ -1 & \text{(転位)} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (21)$$

また α と β は、領域 1 と 2 の弾性定数から決まる量で、Dundurs⁽⁶⁾の複合パラメータと呼ばれている。

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{G_1(\kappa_2 + 1) - G_2(\kappa_1 + 1)}{G_1(\kappa_2 + 1) + G_2(\kappa_1 + 1)} \\ \beta &= \frac{G_1(\kappa_2 - 1) - G_2(\kappa_1 - 1)}{G_1(\kappa_2 + 1) + G_2(\kappa_1 + 1)} \quad \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

上述の基本解の仮定式において、領域 1 に対して、応力関数 $\phi_1(\zeta)$ の代わりに式(8)で定義された応力関数 $\eta_1(\zeta)$ を用いるが、これは式をできるだけ簡単な形にするためである。この場合、 $\phi_1(\zeta)$ を用いても、当然、本質上同様の結果が得られる。一方、領域 2 に対しては、式(11)を考慮して、応力関数 $\phi_2(\zeta)$ を用いる。

式(12)～(15)で定義されている関数は、条件(1)、(2)および(4)を厳密に満足している。条件(3)、すなわち接合界面における応力と変位の連続条件は、無限級数の各係数 a_n , b_n , c_n , d_n によって満足される。

式(12)～(15)中の各係数 a_n , b_n , c_n , d_n は、未知係数であり、接合界面における応力と変位の連続条件が満足されるように決定される。具体的には、式(12)～(15)を式(6)、(7)に代入した後、式(6)と(7)を σ のべき級数の形に書き直せば、各 σ^n の係数に関する等式から係数 a_n , b_n , c_n , d_n を決める方程式が得られる。ここで、その詳細を省略して、結果のみを以下のようにまとめる。

係数 a_n と $c_n(n \geq 1)$ は次の連立方程式の根として求まる。

$$a_n + \frac{\alpha+1}{\beta-1} m^n c_n = W_n \quad (n \geq 1) \quad \dots\dots\dots (23)$$

$$\frac{\alpha+\beta}{\beta-1} m^n a_n - \frac{(\beta+1)(\alpha+1)}{(\beta-1)(\alpha-\beta)} c_n$$

$$-\frac{\alpha+1}{\beta-1}n(m^2-1)m^{n-1}\bar{c}_n=Q_n \quad (n \geq 1) \quad \dots\dots\dots (24)$$

方程式(23)と(24)の右辺の W_n と Q_n は、 $n \geq 2$ の場合、

$$W_n = -\frac{(\alpha+1)}{(\beta-1)}D_n \quad (n \geq 2) \quad \dots\dots\dots (25)$$

$$Q_n = -\frac{(\alpha+1)}{(\beta-1)}E_n \quad (n \geq 2) \quad \dots\dots\dots (26)$$

また $n=1$ の場合、

$$W_1 = -\frac{(\alpha+1)}{(\beta-1)}D_1 + \frac{(\alpha-\beta)(\alpha+1)\bar{m}R_2}{(\beta^2-1)\bar{h}_2} \quad \dots\dots\dots (27)$$

$$Q_1 = -\frac{(\alpha+1)}{\beta-1}E_1 - \frac{(\alpha+1)\bar{R}_2}{(\beta-1)\bar{h}_2} + \frac{(\alpha+1)(\alpha-\beta)(1-m^2)R_2}{(\beta^2-1)\bar{h}_2} \quad \dots\dots\dots (28)$$

式(25)～(28)中の D_n , E_n は次式で定義されるものである。

$$D_n = (m/\zeta_o)^n \frac{R_2}{n} - \frac{\alpha-\beta}{\beta+1}(m\bar{\zeta}_o)^n \left[\frac{\lambda_2 R_2}{n} + \frac{\bar{R}_2}{\bar{h}_2} \{m\bar{\zeta}_o + 1/\bar{\zeta}_o - \bar{h}_1\} \right] \quad (n \geq 1) \quad \dots\dots\dots (29)$$

$$E_n = (m/\zeta_o)^n \left[-\frac{\lambda_2 R_2}{n} + \frac{\bar{R}_2}{\bar{h}_2} \{m^2/\bar{\zeta}_o + \bar{\zeta}_o/m - \bar{h}_1\} \right] - (m\bar{\zeta}_o)^n \left[\frac{(\alpha+\beta)R_2}{(\beta-1)n} - \frac{(\alpha-\beta)\lambda_2 \bar{R}_2(m-1/m)}{(\beta+1)} - \frac{(\alpha-\beta)R_2 n(m-1/m)}{(\beta+1)\bar{h}_2} (1/\bar{\zeta}_o + m\bar{\zeta}_o - \bar{h}_1) \right] \quad (n \geq 1) \quad \dots\dots\dots (30)$$

係数 $b_n (n \geq 1)$ と $d_n (n \geq 2)$ は、求めた a_n と c_n から求まる。

$$b_n = \frac{\alpha+1}{\alpha-\beta}\bar{c}_n \quad (n \geq 1) \quad \dots\dots\dots (31)$$

$$d_n = \frac{\alpha+\beta}{\alpha+1} \{ \bar{a}_{n-1} - m\bar{a}_{n+1} \} - (n+1)c_{n+1} - m(n-1)c_{n-1} \quad (n \geq 3) \quad \dots\dots\dots (32)$$

表 1 点 $(-0.5a, 0)$ に作用する転位 b_x による点 $(0, b)$ での無次元化変位 $(u_x - u_{x0})(\kappa_2 + 1)/b_x$
[u_{x0} : 介在物の中心点における x 方向の変位]

n	By method of Warren		By author's method	
	A ⁺	A ⁻	A ⁺	A ⁻
5	0.6025	0.6022	0.6077	0.6021
10	0.5888	0.5891	0.5886	0.5890
15	0.58987	0.58986	0.58988	0.58985
20	0.5897997	0.5898009	0.5897988	0.5898005
25	0.5898035	0.5898034	0.5898035	0.5898034
50	0.5898032	0.5898032	0.5898032	0.5898032
100	0.5898032	0.5898032	0.5898032	0.5898032
500	0.5898032	0.5898032	0.5898032	0.5898032
1000	0.5898032	0.5898032	0.5898032	0.5898032

$$d_2 = \frac{\alpha+\beta}{\alpha+1} \{ \bar{a}_1 - m\bar{a}_3 \} - 3c_3 - mc_1 + \frac{\alpha-\beta}{\beta+1} m\bar{R}_2/\bar{h}_2 \quad \dots\dots\dots (33)$$

また、係数 a_0 , b_0 , c_0 と d_1 については、その中の二つは任意にとることができるが、あとの二つは次式から計算される。

$$c_0 = \frac{(\alpha-\beta)\bar{b}_0 - (\beta-1)a_0}{2(\alpha+1)} + \frac{(\alpha-\beta)\bar{R}_2(m\bar{\zeta}_o - \bar{h}_1)}{2(\beta+1)\bar{h}_2} \quad \dots\dots\dots (34)$$

$$d_1 = \frac{\alpha+\beta}{\alpha+1} \{ \bar{a}_0 - m\bar{a}_2 \} + \frac{(\beta+1)b_0}{\alpha+1} - 2c_2 - (m^2/\bar{\zeta}_o - \bar{h}_1)R_2/\bar{h}_2 \quad \dots\dots\dots (35)$$

3. Warren の解との比較

本研究で求めた解は無限級数で表されるものである。ただし、介在物の形状が円形である場合、 $m=0$ となるので、 b_1 と c_1 以外のすべての係数は零となる。したがって、円形介在物の場合に対して、本研究は有限項の形で表される解を与えている。そして、 $m \neq 0$ の場合に対して、無限級数による補正が必要となる。この場合、級数の項数 n を有限にすると、接合界面における変位と応力の連続条件は厳密には満足できなくなる。本解の式(29)と式(30)からわかるように、項数 n が有限なとき、界面における変位・応力の連続条件に関する誤差 ε は $(|m/\zeta_o|)^n$ に比例する。

$$\varepsilon \propto |m/\zeta_o|^n \quad \dots\dots\dots (36)$$

ζ_o は z 面上の半径 $r=|\sqrt{m}|$ と半径 $r=1$ の円環内にあるので、 $|\zeta_o| \geq |\sqrt{m}|$ 。これによって、

$$|m/\zeta_o|^n \leq |m|^{n/2} \quad \dots\dots\dots (37)$$

したがって、だ円形介在物である限り、すなわちだ円の半軸長 a と b がいずれも零でない限り、 $|m| < 1$ であるので、本研究の解は収束する。表 1 と表 2 に、その一例として、 $b/a=0.5$, $G_2/G_1=10$, $\nu_1=\nu_2=0.3$ (平面応力) の場合について、 x 方向の転位 b_x が点 $(x_0=$

表 2 点 $(-0.5a, 0)$ に作用する転位 b_x による点 $(0, b)$ での無次元化応力 $a\tau_{xy}(\kappa_2 + 1)/(G_2 b_x)$

n	By method of Warren		By author's method	
	A ⁺	A ⁻	A ⁺	A ⁻
5	-0.0970	0.0062	-0.1030	-0.0014
10	-0.0725	-0.0832	-0.0721	-0.0838
15	-0.0754	-0.0743	-0.0754	-0.0744
20	-0.07517	-0.07523	-0.07516	-0.07524
25	-0.075183	-0.075177	-0.075184	-0.075178
50	-0.07518249	-0.07518249	-0.07518249	-0.07518249
100	-0.07518249	-0.07518249	-0.07518249	-0.07518249
500	-0.07518249	-0.07518249	-0.07518249	-0.07518249
1000	-0.07518249	-0.07518249	-0.07518249	-0.07518249

$-0.5a, y_0=0$)に作用するときの、座標値が $(0, b)$ となる点 A における変位 u_x と τ_{xy} の計算結果と計算に用いる級数の項数 n との関係を示す。点 A が界面上にあるため、表には、記号 A^+ と A^- をもって、領域 1 側にある点 A と領域 2 側にある点 A とを区別する。接合界面における変位と応力の連続条件により、点 A^+ と点 A^- におけるそれぞれの変位 u_x と応力 τ_{xy} の値は同様になるはずである。しかし、実際の計算では項数 n が有限であるため、それらの値には誤差が含まれる。項数 n を増やすにつれて、点 A^+ と点 A^- における計算値の差は徐々に小さくなる。表 1 と表 2 では、点 A^+ と点 A^- におけるそれぞれの u_x と τ_{xy} の計算値はいずれも $n=50$ から 7 けたまで同じ値になっている。

また、式(36)からわかるように、 $|\xi_0|$ が大きいほど、本研究の解の収束性はよい。表 1, 2 に示した例では、転位の作用点 $(x_0=-0.5a, y_0=0)$ がだ円の両焦点を結ぶ線分上にあるので、 $|\xi_0|$ が最小となり、 $|\xi_0|=\sqrt{m}$ 。これに対して、表 3, 4 では、 $|\xi_0|>\sqrt{m}$ の場合の例として、転位の作用点が $(x_0=-0.9a, y_0=0)$ にあるとき、表 1, 2 と同様な介在物について求めた点 A での

表 3 点 $(-0.9a, 0)$ に作用する転位 b_x による点 $(0, b)$ での無次元化変位 $(u_x - u_{x0})(x_2 + 1)/b_x$
[u_{x0} : 介在物の中心点における x 方向の変位]

n	By method of Warren		By author's method	
	A ⁺	A ⁻	A ⁺	A ⁻
5	0.34	0.29	0.3177	0.3165
10	0.323	0.305	0.31466	0.31461
15	0.3128	0.3164	0.3145299	0.3145303
20	0.3139	0.3152	0.3145308	0.3145308
25	0.3147	0.3144	0.3145309	0.3145309
50	0.3145311	0.3145307	0.3145309	0.3145309
100	0.3145309	0.3145309	0.3145309	0.3145309
500	0.3145309	0.3145309	0.3145309	0.3145309
1000	0.3145309	0.3145309	0.3145309	0.3145309

表 4 点 $(-0.9a, 0)$ に作用する転位 b_x による点 $(0, b)$ での無次元化応力 $a\tau_{xy}(x_2 + 1)/(G_2 b_x)$

n	By method of Warren		By author's method	
	A ⁺	A ⁻	A ⁺	A ⁻
5	-0.03	-0.18	0.003	0.019
10	-0.01	-0.09	0.0069	0.0080
15	0.014	0.037	0.007230	0.007217
20	0.0099	0.0197	0.0072267	0.0072262
25	0.0065	0.0041	0.007226603	0.007226609
50	0.007224	0.007218	0.007226605	0.007226605
100	0.007226605	0.007226605	0.007226605	0.007226605
500	0.007226605	0.007226605	0.007226605	0.007226605
1000	0.007226605	0.007226605	0.007226605	0.007226605

変位 u_x と応力 τ_{xy} の計算結果を示す。表からわかるように、この場合の解の収束性は、表 1, 2 のそれよりよい。

表 1 ~ 4 には、Warren の解による計算結果も示している。項数 n が大きくなるにつれて、Warren の解による計算値は、本研究のそれと一致するようになる。しかし、同じ数の項数 n による変位または応力の計算値の点 A^+ と点 A^- における差を両方法について比較してみると、転位の作用点が $(x_0=-0.5a, y_0=0)$ にある場合、両方法によるそれぞれの計算結果には差異がないが、転位の作用点が $(x_0=-0.9a, y_0=0)$ にある場合、本研究で得た解の収束性が Warren のそれよりよいことがわかる。このことは、解の表示式からも理解される。Warren の解では、項数 n が有限なとき、界面における変位・応力の連続条件に関する誤差 ε は $(|\xi_0|)^n$ に比例する^{**1}。集中力と転位の作用点が介在物の内部にある場合、 $|\xi_0|$ がつねに 1 より小さいので、Warren の解は収束する。とくに、集中力と転位の作用点がだ円の両焦点を結ぶ線分上にあるとき、 $|\xi_0|$ が最小となり、Warren の解の収束性は作用点他のところにあるときよりよい。このとき、 $|\xi_0|=\sqrt{m}$ であるので、Warren の解の収束性は表 1, 2 に示すように本研究のそれと同程度になる。しかし、集中力と転位の作用点がだ円の両焦点を結ぶ線分から離れるにつれて、 $|\xi_0|$ の値が大きくなるので、表 3, 4 に示すように、Warren の解の収束性が悪くなる。そして、集中力と転位の作用点が界面にある場合、 $|\xi_0|=1$ となるので、Warren の解が収束しなくなる。これに対して、本解では、 $|\xi_0|=1$ であるので、 $|m/\xi_0|^n = |m|^n$ となり、解の収束性は作用点他のところにあるときより逆によい。表 5, 6 と表 7, 8 に、それぞれ転位の作用点が $(x_0=-0.995a, y_0=0)$ にあるときと $(x_0=-1.0a, y_0=0)$ すなわち界面上にあるとき、表 1, 2 と同様な介在物について求めた点 A での変位 u_x と応力 τ_{xy} の計算結果を示す。これらの表からわかるように、集中力と転位が界面の近傍に作用する場合、Warren の解から正しい結果が得られない。これに対して、本研究で得た解は、集中力と転位の作用点が界面にある場合にも適用できる。

^{**1} Warren の研究では、異なる変換式

$$z = \omega(\xi) = R(\xi + 1/\xi)$$

$$R = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2}$$

を用いる。項数 n が有限なとき、界面における変位・応力の連続条件に関する誤差 ε は、Warren の論文の記号で表示すると、 $(|\xi_0/a|)^n$ に比例するが、これを本論文の記号で書き直すと文中の $(|\xi_0|)^n$ になる。

表 5 点 $(-0.995a, 0)$ に作用する転位 b_x による点 $(0, b)$ での無次元化変位 $(u_x - u_{x0})(x_2 + 1)/b_x$
 $[u_{x0}$: 介在物の中心点における x 方向の変位]

n	By method of Warren		By author's method	
	A ⁺	A ⁻	A ⁺	A ⁻
5	0.37	0.23	0.25882	0.25878
10	0.38	0.24	0.2587079	0.2587073
15	0.13	0.27	0.2587064	0.2587064
20	0.13	0.27	0.2587064	0.2587064
25	0.38	0.25	0.2587064	0.2587064
50	0.36	0.255	0.2587064	0.2587064
100	0.20	0.260	0.2587064	0.2587064
500	0.2576	0.25872	0.2587064	0.2587064
1000	0.2586995	0.2587065	0.2587064	0.2587064

表 7 点 $(-1.0a, 0)$ に作用する転位 b_x による点 $(0, b)$ での無次元化変位 $(u_x - u_{x0})(x_2 + 1)/b_x$
 $[u_{x0}$: 介在物の中心点における x 方向の変位]

n	By method of Warren		By author's method	
	A ⁺	A ⁻	A ⁺	A ⁻
5	0.37	0.23	0.25597	0.25594
10	0.39	0.24	0.2558712	0.2558707
15	0.11	0.2654	0.2558699	0.2558699
20	0.10	0.2635	0.2558699	0.2558699
25	0.41	0.2500	0.2558699	0.2558699
50	0.42	0.2528	0.2558699	0.2558699
100	0.09	0.2574	0.2558699	0.2558699
500	0.09	0.2562	0.2558699	0.2558699
1000	0.09	0.2560	0.2558699	0.2558699

表 6 点 $(-0.995a, 0)$ に作用する転位 b_x による点 $(0, b)$ での無次元化応力 $a\tau_{xy}(x_2 + 1)/(G_2 b_x)$

n	By method of Warren		By author's method	
	A ⁺	A ⁻	A ⁺	A ⁻
5	-0.15	-0.17	0.0186	0.0192
10	-0.27	-0.17	0.018742	0.018755
15	0.46	0.21	0.01874503	0.01874500
20	0.55	0.21	0.01874503	0.01874503
25	-0.64	-0.17	0.01874503	0.01874503
50	-0.98	-0.16	0.01874503	0.01874503
100	1.24	0.17	0.01874503	0.01874503
500	0.13	0.03	0.01874503	0.01874503
1000	0.0201	0.0189	0.01874503	0.01874503

表 8 点 $(-1.0a, 0)$ に作用する転位 b_x による点 $(0, b)$ での無次元化応力 $a\tau_{xy}(x_2 + 1)/(G_2 b_x)$

n	By method of Warren		By author's method	
	A ⁺	A ⁻	A ⁺	A ⁻
5	-0.16	-0.17	0.0192	0.0197
10	-0.30	-0.17	0.019300	0.019311
15	0.54	0.20	0.01930259	0.01930257
20	0.67	0.20	0.01930259	0.01930259
25	-0.83	-0.16	0.01930259	0.01930259
50	-1.64	-0.16	0.01930259	0.01930259
100	3.37	0.20	0.01930259	0.01930259
500	16.87	0.20	0.01930259	0.01930259
1000	33.74	0.20	0.01930259	0.01930259

集中力と転位が界面上に作用するとき、

$$\bar{\xi}_0 = 1/\xi_0 \dots \dots \dots (38)$$

式(38)を2章の一般解の式に代入すれば、著者がさきの研究で集中力と転位の作用点が介在物の外部にある場合から導いた集中力と転位が界面上に作用するときの基本解と同様な式が得られる。

4. 結 論

集中力と転位が介在物内の一点に作用する、だ円形の介在物を有する無限板の基本解問題は、すでにWarrenによって解決されたとこれまで言われているが、集中力または転位の作用点が界面の近傍にある場合に、Warrenの解の収束性が保証されていないことが本研究によって明らかになった。Warrenの解に残されているこのような問題点を解決するため、本研究

では、だ円形介在物を有する無限板の基本解の問題に対して再検討を行い、介在物が円形である場合の基本解が有限項の形で求められていることに基づいて、Warrenの解より収束性がよい解を導いた。本研究で求めた解は、集中力と転位の作用点が界面上にある場合にも適用できる。

文 献

- (1) Stagni, L., *J. Appl. Math. Phys.* (ZAMP), **33**(1982), 315.
- (2) Stagni, L. and Lizzio, R., *Appl. Phys.*, **A**, **30**(1983), 217.
- (3) Warren, W. E., *Mech. Mater.*, **2**(1983), 319.
- (4) 陳, 機論, **60**-580, A(1994), 2796.
- (5) Dundurs, J. and Sendekyj, G. P., *J. Mech. Phys., solids* **13**(1965), 141.
- (6) Dundurs, J., *J. Appl. Mech.*, **36**(1969), 650.