非対称四点曲げ荷重をうけるはりの二次元弾性解析*

笠野 英秋^{*1}, 春日 幸生^{*2}Two-Dimensional Elastic Stress Analysis of a Beam
under Asymmetrical Four-Point Bending

Hideaki KASANO and Yukio KASUGA

We first predict using the elementary beam theory that a loading system of asymmetrical four-point bending (AFPB) applied to a beam produces a pure shear loading state through the middle section of the beam. For further investigation, we attempt a detailed analytical study of the stress state in a beam of infinite length subjected to AFPB loading system within the framework of the two-dimensional elasticity theory. The stress function approach is employed, and the principle of the superposition and the method of Fourier transforms are also used in the analysis. The numerical calculations are carried out for the stress components associated with a pure shear stress field.

Key Words: Shear Test Method, Asymmetrical Four-Point Bending, Pure Shear Stress State, Elementary Beam Theory, Two-Dimensional Elasticity Theory, CFRP Composites

1. 緒 言

非対称四点曲げ荷重を負荷したはりの中央部には、せん断力図と曲げモーメント図からわかるように、せん断力が一定で曲げモーメントが零となる領域、すなわち、純粋せん断応力場の存在することが予想される。

この点に着目したのが、複合材料のせん断特性を求める新しい試験方法として注目されている Iosipescu せん断試験法である。これは図 1(a)に示すように、中央に二つの V 形ノッチを入れた試験片に、特殊なジグを用いて非対称四点曲げ荷重を負荷し、ノッチ底部からせん断破壊を発生させる方法である。この方法は、元来、Iosipescu によって金属材料のせん断試験法として提案され⁽¹⁾⁽²⁾、その後、Walrath と Adams らによって複合材料のせん断試験に適用された^{(3)~(6)}。一方、図 1(b)に示すように、Iosipescu 試験片と同じ形状の試験片に、慣用の曲げジグを用いて、非対称四点曲げ荷重を負荷してせん断破壊を発生させる試験法 (AFPB 試験) も提案されている⁽⁷⁾⁽⁸⁾。この二つの試験

方法は、試験片中央部の二つのノッチを結ぶ領域に実現される純粋せん断応力場を利用する点で本質的には同じであると考えられる。そこで本研究では、このような純粋せん断応力場を利用したせん断試験法の有効性を弾性学的観点から確認することを目的に、非対称四点曲げ荷重をうけるはりの内部に生じる応力分布を、二次元異方性弾性論に基づいて詳細に解析することを試みた。解析では、便宜上、平滑で無限に長いはり进行を想定し、応力関数法と重ね合わせの原理を用いた。数値計算では、CFRP 異方性はりと等方性はりを対象に、内側荷重点スパンをパラメータとして、はりの中心軸上および中央断面内のせん断応力と曲げ応力の分布を明らかにし、はりの中央部に生ずると予想される

図 1 非対称四点曲げ荷重によるせん断試験法

* 平成 4 年 9 月 2 日材料力学部門講演会において講演、原稿受付 平成 6 年 3 月 25 日。

^{*1} 正員、拓殖大学工学部 (〒193 八王子市館町 815-1)。

^{*2} 正員、玉川大学工学部 (〒194 町田市玉川学園 6-1-1)。

純粋せん断応力場について考察した。なお、弾性解析に先だって、初等はり理論に基づく解析も行った。

2. 解析法

2.1 初等はり理論に基づく解析 前述の非対称四点曲げ荷重を負荷するせん断試験法は、図2に示すように、一対の内側荷重 P_1 と一対の外側荷重 P_2 をうけるはりの問題としてモデル化することができる。このとき、ジグに負荷する全荷重を P 、外側および内側荷重点スパンをそれぞれ a 、 b とすると、Iosipescu 試験では $P_1 = Pa/(a-b)$ 、 $P_2 = Pb/(a-b)$ であり、AFPB 試験では $P_1 = Pa/(a+b)$ 、 $P_2 = Pb/(a+b)$ である。したがって、各々のせん断試験法について、せん断力図(SFD)と曲げモーメント図(BMD)、さらに最大せん断力図(MSFD)、最大曲げモーメント図(MBMD)を求めると図3のようになる。SFD より、いずれの試験の場合も内側荷重点間ではせん断力が一

図2 非対称四点曲げ荷重をうけるはり

図3 せん断力と曲げモーメントの分布

定であり、BMD よりはりの中央では曲げモーメントが零となることがわかる。そして、とくに Iosipescu 試験の場合には、内側荷重点間のせん断力の大きさは荷重点スパン a 、 b に依存しない一定値で、その大きさはジグに負荷される全荷重 P に等しい。一方、MSFD より内側荷重点間でせん断破壊を生じさせるためには、いずれの試験法の場合でも、 $b < a/2$ が必要であり、また、MBMD より、Iosipescu 試験の場合、内側荷重点スパン b が大きくなると曲げ破壊も予想される。

2.2 二次元異方性弾性理論に基づく解析 図4に示すように、無限に長いはりの上下縁に集中荷重対 P_1 と P_2 がそれぞれ非対称に作用する問題を考える。ここで、はりは直交異方性と仮定し、 x 、 y 軸は異方性主軸方向に一致するものとする。このような二次元直交異方性弾性体の応力場は、一般に、重調和形応力関数 $X(x, y)$ を用いて次式のように表せる⁽⁹⁾。

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 X}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y} \quad \dots\dots (1)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mu_1^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mu_2^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) X = 0 \quad \dots\dots (2)$$

ここで、 μ_1 、 μ_2 は弾性係数 S_{ij} を係数とする異方性パラメータで、次の方程式の根である。

$$S_{22}\mu^4 - (2S_{12} + S_{66})\mu^2 + S_{11} = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

なお、本解析では、応力が無限遠方で消失することを考慮して、 $\text{Re}(\mu) > 0$ となる2根だけを用いる。

本研究では集中荷重に起因する解の発散問題を回避するために、図5に示すような直交異方性半無限板の直線縁に一つの集中荷重が垂直に作用するときの解を基本解として、重ね合わせの原理を適用して本問題の解を導出する。まず、図5の応力場は次式で与えられることが知られている⁽¹⁰⁾。

図4 非対称四点曲げ荷重をうける無限長はり

図5 集中荷重をうける直交異方性半無限板

$$\sigma_x = -\frac{P}{\pi} \cdot \frac{(\mu_1 + \mu_2)x^2 y}{(\mu_1^2 x^2 + y^2)(\mu_2^2 x^2 + y^2)}, \quad \sigma_y = -\frac{P}{\pi} \cdot \frac{(\mu_1 + \mu_2)y^3}{(\mu_1^2 x^2 + y^2)(\mu_2^2 x^2 + y^2)} \dots\dots\dots (4)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{P}{\pi} \cdot \frac{(\mu_1 + \mu_2)xy^2}{(\mu_1^2 x^2 + y^2)(\mu_2^2 x^2 + y^2)}$$

次に、上式に適当な座標変換を適用すると⁽¹⁰⁾、図6に示すような四つの半無限板にそれぞれ集中荷重 P_1 あるいは P_2 が作用するときの応力場を共通の座標系 (x, y) で表すことができる。そこで、これら四つの半無限板の応力場を図6のようにして単純に重ね合わせると、新しい応力場【 S_0 】が得られる。このときの応力成分は、AFPB 試験を想定して $P_1 = Pa/(a+b)$ 、 $P_2 = Pb/(a+b)$ とすれば、次式のようになる。

$$\sigma_x = -\frac{2P}{\pi a} \cdot \frac{(\mu_1 + \mu_2)\rho_1}{(1 + \rho_0)} \left\{ \frac{(\rho_0 + \xi)^2(1 + \eta)}{D_1(\xi, \eta)} + \frac{(1 - \xi)^2(1 + \eta)\rho_0}{D_2(\xi, \eta)} + \frac{(\rho_0 - \xi)^2(1 - \eta)}{D_3(\xi, \eta)} + \frac{(1 + \xi)^2(1 - \eta)\rho_0}{D_4(\xi, \eta)} \right\}$$

$$\sigma_y = -\frac{2P}{\pi a} \cdot \frac{(\mu_1 + \mu_2)\rho_1^3}{(1 + \rho_0)} \left\{ \frac{(1 + \eta)^3}{D_1(\xi, \eta)} + \frac{(1 + \eta)^3\rho_0}{D_2(\xi, \eta)} + \frac{(1 - \eta)^3}{D_3(\xi, \eta)} + \frac{(1 - \eta)^3\rho_0}{D_4(\xi, \eta)} \right\}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{2P}{\pi a} \cdot \frac{(\mu_1 + \mu_2)\rho_1^2}{(1 + \rho_0)} \left\{ \frac{(\rho_0 + \xi)(1 + \eta)^2}{D_1(\xi, \eta)} - \frac{(1 - \xi)(1 + \eta)^2\rho_0}{D_2(\xi, \eta)} + \frac{(\rho_0 - \xi)(1 - \eta)^2}{D_3(\xi, \eta)} - \frac{(1 + \xi)(1 - \eta)^2\rho_0}{D_4(\xi, \eta)} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

ここで、無次元座標 ξ, η とパラメータ ρ_0, ρ_1 および関数 $D_i(\xi, \eta)$ 、($i=1\sim 4$) は次式で与えられる。

$$\xi = x/(a/2), \quad \eta = y/(h/2), \quad \rho_0 = b/a, \quad \rho_1 = h/a$$

$$D_1(\xi, \eta) = \{\mu_1^2(\rho_0 + \xi)^2 + \rho_1^2(1 + \eta)^2\} \{\mu_2^2(\rho_0 + \xi)^2 + \rho_1^2(1 + \eta)^2\}$$

$$D_2(\xi, \eta) = \{\mu_1^2(1 - \xi)^2 + \rho_1^2(1 + \eta)^2\} \{\mu_2^2(1 - \xi)^2 + \rho_1^2(1 + \eta)^2\}$$

$$D_3(\xi, \eta) = \{\mu_1^2(\rho_0 - \xi)^2 + \rho_1^2(1 - \eta)^2\} \{\mu_2^2(\rho_0 - \xi)^2 + \rho_1^2(1 - \eta)^2\}$$

$$D_4(\xi, \eta) = \{\mu_1^2(1 + \xi)^2 + \rho_1^2(1 - \eta)^2\} \{\mu_2^2(1 + \xi)^2 + \rho_1^2(1 - \eta)^2\} \dots\dots\dots (6)$$

さて、応力場【 S_0 】は、前述の重ね合わせの過程により、図7に示すように、無限に長いはりの上下縁に二つの集中荷重対 P_1, P_2 と分布荷重が同時に作用しているときの応力状態を表している。この分布荷重の大きさは式(5)の第2, 3式で $\eta = -1$ あるいは $\eta = 1$ とおけば、

$$(\sigma_y)_{\eta=-1} = -\frac{2P}{\pi a} \cdot \frac{(\mu_1 + \mu_2)\rho_1^3}{(1 + \rho_0)} \cdot \left\{ \frac{8}{D_3(\xi, -1)} + \frac{8\rho_0}{D_4(\xi, -1)} \right\}$$

$$(\tau_{xy})_{\eta=-1} = -\frac{2P}{\pi a} \cdot \frac{(\mu_1 + \mu_2)\rho_1^2}{(1 + \rho_0)} \cdot \left\{ \frac{4(\rho_0 - \xi)}{D_3(\xi, -1)} - \frac{4(1 + \xi)\rho_0}{D_4(\xi, -1)} \right\}$$

$$(\sigma_y)_{\eta=1} = -\frac{2P}{\pi a} \cdot \frac{(\mu_1 + \mu_2)\rho_1^3}{(1 + \rho_0)} \cdot \left\{ \frac{8}{D_1(\xi, 1)} + \frac{8\rho_0}{D_2(\xi, 1)} \right\}$$

$$(\tau_{xy})_{\eta=1} = -\frac{2P}{\pi a} \cdot \frac{(\mu_1 + \mu_2)\rho_1^2}{(1 + \rho_0)} \cdot \left\{ \frac{4(\rho_0 + \xi)}{D_1(\xi, 1)} - \frac{4(1 - \xi)\rho_0}{D_2(\xi, 1)} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

となる。したがって、上式と逆符号の大きさの分布荷重がはりの上縁と下縁に作用するときの応力場を【 R 】として、これを図7の応力場に加えると、図4で示される本問題の解が得られる。すなわち、本問題の解【 S 】は

$$[S] = [S_0] + [R] \dots\dots\dots (8)$$

で与えられる。結局、本問題は残余の応力場【 R 】を求める問題に帰着される。このように重ね合わせの原理を適用することにより、集中荷重点での解の発散の問題は応力場【 S_0 】に限定され、応力場【 R 】はこのような特異性を含まない。そして、応力場【 S_0 】は式(5)で与えられるように closed form で表され、応力場【 R 】も後述するように収束のよい無限積分で表されるため、数値計算が容易になる。

さて、応力場【 R 】を求めるために、分布荷重の非対称性を考慮して、式(2)を満たすため応力関数 X を次式で与える。

$$X(\xi, \eta) = \frac{Pa}{\pi} \int_0^\infty \left[\left\{ f_1(\lambda) \cdot \cosh\left(\frac{\lambda\eta}{\mu_1}\right) + f_2(\lambda) \cdot \cos h\left(\frac{\lambda\eta}{\mu_2}\right) \right\} \cdot \frac{\cos(\lambda\xi)}{\lambda^2} \right. \\ \left. + \left\{ f_3(\lambda) \cdot \sinh\left(\frac{\lambda\eta}{\mu_1}\right) + f_4(\lambda) \cdot \sin h\left(\frac{\lambda\eta}{\mu_2}\right) \right\} \frac{\sin \lambda\xi}{\lambda^2} \right] d\lambda \dots\dots\dots (9)$$

ここで、 $f_i(\lambda)$ 、($i=1\sim 4$)は境界条件から決定される未知関数である。式(9)を式(1)に代入すると、応力場【 R 】の応力成分は未知関数 $f_i(\lambda)$ を用いて表される。このとき、はりの上縁($\eta = -1$)と下縁($\eta = +1$)の応力成分 σ_y と τ_{xy}

は次式のようにになる。

$$\begin{aligned}
 (\sigma_y)_{\eta=\mp 1} &= -\frac{4P}{\pi a} \int_0^\infty \left[\{f_1(\lambda) \cdot \cos h(\lambda/\mu_1) + f_2(\lambda) \cdot \cos h(\lambda/\mu_2)\} \cos \lambda \xi \mp \{f_3(\lambda) \cdot \sin h(\lambda/\mu_1) \right. \\
 &\quad \left. + f_4(\lambda) \cdot \sin h(\lambda/\mu_2)\} \sin \lambda \xi \right] d\lambda \\
 (\tau_{xy})_{\eta=\mp 1} &= -\frac{4P}{\pi a \rho_1} \int_0^\infty \left[\pm \left\{ \frac{f_1(\lambda)}{\mu_1} \cdot \sin h(\lambda/\mu_1) + \frac{f_2(\lambda)}{\mu_2} \cdot \sin h(\lambda/\mu_2) \right\} \sin \lambda \xi \right. \\
 &\quad \left. + \left\{ \frac{f_3(\lambda)}{\mu_1} \cdot \cos h(\lambda/\mu_1) + \frac{f_4(\lambda)}{\mu_2} \cdot \cos h(\lambda/\mu_2) \right\} \cos \lambda \xi \right] d\lambda
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

ここで、 $\pm$ は複号同順である。

そして、式(7)と逆符号の大きさの応力値を境界条件として式(10)と等置すると、 $f_i(\lambda)$ に関する積分方程式が得られる。この積分方程式をフーリエ変換を適用して解くと、未知関数 $f_i(\lambda)$ が決まり、応力場【R】

図 6 座標変換と半無限板の応力場の重ね合わせ

図 7 非対称四点曲げ荷重と分布荷重を同時にうける無限長はり

の応力成分は次式のようにになる。

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{2P}{\pi a} \cdot \frac{1}{(\mu_1 - \mu_2)} \cdot \frac{1}{(1 + \rho_0) \rho_1} \\
 &\quad \times \int_0^\infty \{S_x^1(\lambda, \eta) \cos \lambda \xi + S_x^2(\lambda, \eta) \sin \lambda \xi\} d\lambda \\
 \sigma_y &= \frac{2P}{\pi a} \cdot \frac{1}{(\mu_1 - \mu_2)} \cdot \frac{\rho_1}{(1 + \rho_0)} \\
 &\quad \times \int_0^\infty \{S_y^1(\lambda, \eta) \cos \lambda \xi + S_y^2(\lambda, \eta) \sin \lambda \xi\} d\lambda \\
 \tau_{xy} &= \frac{2P}{\pi a} \cdot \frac{1}{(\mu_1 - \mu_2)} \cdot \frac{1}{(1 + \rho_0)} \\
 &\quad \times \int_0^\infty \{S_{xy}^1(\lambda, \eta) \sin \lambda \xi + S_{xy}^2(\lambda, \eta) \cos \lambda \xi\} d\lambda
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

ここで、 $S_x^j(\lambda, \eta)$, $S_y^j(\lambda, \eta)$ および $S_{xy}^j(\lambda, \eta)$, ($j=1, 2$)、は付録に示すような既知関数である。

なお、これまでの解析では AFPB 試験を想定したが、Iosipescu 試験の結果は AFPB 試験の結果に $(1 + \rho_0)/(1 - \rho_0)$ を乗じることによって容易に求めることができる。

(a) Iosipescu 試験法

(b) AFPB 試験法

図 8 中心軸上のせん断応力 τ_{xy} の分布

3. 数値計算および結果

本問題の解は、式(8)の重ね合わせの原理より、式(5)と式(11)の和で与えられる。このとき、後者は無限積分で表されるため、数値計算にあたっては、数値積分を実行する必要がある。ここでは、これらの被積分関数が λ の増加とともに指数関数的に減少することを考慮して、これを適当な有限積分で近似し、フィロンの公式を適用して積分値を評価した。異方性パラメータ μ_1 と μ_2 の値は、CFRP異方性はりの場合には弾性定数を $E_x=137$ GPa, $E_y=10.5$ GPa, $G_{xy}=5.4$

GPa, $\nu_{xy}=0.33$ とし、等方性はりの場合は $E_x=E_y=206$ GPa, $G_{xy}=80$ GPa, $\nu_{xy}=0.28$ として、式(3)から計算した。また、荷重点スパンについては、外側荷重点スパンを $a=60$ mmと一定にして、内側荷重点スパンを $b=6, 12, 18, 24, 30, 36$ mm ($\rho_0=b/a=0.1\sim 0.6$)の六とおりに変化させた。そして、はりの中心軸上のせん断応力および中央断面内のせん断応力と曲げ応力の分布を計算した。なお、はりの高さは $h=5.6$ mm ($\rho_1=h/a=0.093$)とした。

図8ははりの中心軸上($\eta=0$)のせん断応力 τ_{xy} の分布である。せん断応力は、内側荷重の作用線($\xi=$

(a) Iosipescu 試験法

(b) AFPB 試験法

図9 中央断面のせん断応力 τ_{xy} の分布

(a) Iosipescu 試験法

(b) AFPB 試験法

図10 中央断面の曲げ応力 σ_x の分布

$\pm \rho_0$) を境にしてその作用方向が変化し、内側荷重点間でほぼ一定の大きさとなる。そのせん断応力が一定となる領域は荷重点スパン比 ρ_0 が大きくなるほど顕著になる。また、内側荷重点間のせん断応力の大きさは、AFPB 試験法では、 ρ_0 の増加とともに減少するが、Iosipescu 試験法では、CFRP はりの場合、 ρ_0 の値に依存しない同じ大きさの一定値となるのに対して、等方性はりの場合には ρ_0 の増加とともに大きくなる。なお、最大せん断応力は、いずれの試験法においても、内側荷重の作用線に近いところに生じる。一方、CFRP はりと等方性はりの結果を比較すると、AFPB 試験法では分布の形状やその大きさにほとんど差異は見られないが、Iosipescu 試験法では、内側荷重点間において両者の差異が現れ、弾性的異方性の影響が顕著になる。本弾性理論から得られるこれらの結果は初等はり理論のせん断力図や最大せん断力図から予想される結果とよく一致している。

図 9 ははりの中央断面 ($\xi=0$) のせん断応力 τ_{xy} の分布である。ここで、 $\eta=-1$ と $\eta=1$ はそれぞれはりの上縁および下縁、 $\eta=0$ ははりの中心である。せん断応力は、上縁あるいは下縁から内部に入るとつれてその絶対値が増加し、両縁近傍で最大となった後、中心に向かうにつれて単調に減少する。この応力分布の変化は Iosipescu 試験法ではとくに顕著であるが、AFPB 試験法の場合には、 ρ_0 が大きくなると変化が小さくなって中心部において応力がほぼ一様になる傾向が見られる。ここで、初等はり理論によれば、断面に生じるせん断応力は放物線状に分布し、両縁で零、中心で最大になることが知られているが、本弾性理論による上述の結果はそれと大きく異なっていることに注意する必要がある。一方、せん断応力の大きさは、Iosipescu 試験法の場合、 ρ_0 が大きくなるにつれて、両縁に近い領域では大きくなり、中心部では逆になるが、AFPB 試験法の場合には、いずれの領域においても ρ_0 が大きいほど小さくなる。また、両縁近傍に生じる最大せん断応力の大きさは、いずれの試験法の場合も、 ρ_0 が大きいほど大きくなる。なお、せん断応力の大きさと分布に及ぼす異方性の影響については、前述の中心軸上のせん断応力の場合と同じである。

図 10 ははりの中央断面の曲げ応力 σ_x の分布である。曲げ応力は、荷重点スパン比 ρ_0 が小さいときには、両縁で最大の引張応力を生じ、内部に向かうにつれて急激に減少して圧縮応力に変化し、一定の応力値に漸近する。これに対して、 ρ_0 が大きくなると、両縁で最大の圧縮応力を生じ、内部に向かうにつれてその大きさが減少して引張応力に変化し、最大の引張応力を生

じたあと再び減少する。しかし、このような応力分布の大きな変化は両縁近傍に限定され、いずれの試験法の場合も、中心部では応力がほぼ一様になる。ちなみに、初等はり理論から計算される曲げ応力は断面に沿ってつねに零である。一方、CFRP はりと等方性はりの結果を比較すると、いずれの試験法においても、両縁近傍の応力分布の変化にそれらの差異が見られ、後者の変化はゆるやかであるのに対して前者は急激である。

さて、これらの弾性理論による結果を基にして、図 3 に示した初等はり理論によるせん断力図と曲げモーメント図から予想される純粋せん断応力場について考察する。ここではとくに中央断面 ($\xi=0$) 上の中心点 ($\eta=0$) と最大せん断応力が生じる両縁近傍の 2 箇所を対象にして、せん断応力 τ_{xy} と二つの垂直応力 σ_x , σ_y の大きさを比較する。まず、断面の中心では、図 9, 10 より、いずれの試験法においても、一般に σ_x の大きさは τ_{xy} の大きさと同程度か 1 けた大きい値を示す。したがって、本解析で対象とした無限に長いはりの場合には、純粋せん断応力場は期待できない。なお、厚さ方向の垂直応力 σ_y の大きさは、本弾性計算の結果によれば、 τ_{xy} よりも 1 けた程度小さい。一方、せん断応力 τ_{xy} が最大となる両縁近傍は、 σ_x が引張りから圧縮、あるいは圧縮から引張りに変化する領域とほぼ対応していることから、ここでは σ_x の大きさは零か、あるいは零に近い値となり、 τ_{xy} に比べて十分小さくなる。また、ここでは σ_y も同程度に小さくなることだが、本弾性計算からも確認されている。したがって、本解析の範囲では、いずれの試験法の場合も、はりの両縁近傍に純粋せん断応力場とみなせる領域が存在すると考えられる。本研究では、解析の便宜上、試験片を無限長さのはりとしてモデル化したが、Iosipescu および AFBP せん断試験法の有効性を立証するためには、より実際の試験片モデルとして有限長さのほりを想定し、同様の弾性解析をすることが必要である。

4. 結 言

本研究では、Iosipescu および AFBP せん断試験法の有効性に関連して、試験片に非対称四点曲げ荷重を負荷したときに生じると予想される純粋せん断応力場を弾性学的立場から確認することを試みた。まず、初等はり理論に基づいて計算されたせん断力図、曲げモーメント図などから、はりの中央部ではせん断力が一定で曲げモーメントが零となることが確認された。そこで、さらに二次元異方性弾性理論を用いてはりの内部の応力分布を計算した。ここでは、解析の便宜上、は

りの長さは無限に長いと仮定した。弾性計算の結果、はりの中心軸上のせん断応力の分布はせん断力図や最大せん断力図から予想される結果とよく一致していることがわかった。一方、中央断面のせん断応力と曲げ応力の分布ならびにそれらの相対的な大きさを比較したところ、両縁近傍に純粹せん断応力場とみなせる領域が存在することを確認した。今後は、より実的な試験片モデルを用いて同様の弾性解析をすることが必要であることを指摘した。

付 録

$$S_x^1(\lambda, \eta) = c_1(\lambda) \left\{ -\frac{1}{\mu_1^2} \cdot F_1(\lambda) \cos h(\lambda\eta/\mu_1) + \frac{1}{\mu_1\mu_2} \cdot F_2(\lambda) \cos h(\lambda\eta/\mu_2) \right\}$$

$$S_x^2(\lambda, \eta) = c_2(\lambda) \left\{ \frac{1}{\mu_1^2} \cdot F_3(\lambda) \sin h(\lambda\eta/\mu_1) - \frac{1}{\mu_1\mu_2} \cdot F_4(\lambda) \sin h(\lambda\eta/\mu_2) \right\}$$

$$S_y^1(\lambda, \eta) = c_1(\lambda) \left\{ F_1(\lambda) \cos h(\lambda\eta/\mu_1) - \frac{\mu_2}{\mu_1} \cdot F_2(\lambda) \cos h(\lambda\eta/\mu_2) \right\}$$

$$S_y^2(\lambda, \eta) = c_2(\lambda) \left\{ -F_3(\lambda) \sin h(\lambda\eta/\mu_1) + \frac{\mu_2}{\mu_1} \cdot F_4(\lambda) \sin h(\lambda\eta/\mu_2) \right\}$$

$$S_{xy}^1(\lambda, \eta) = c_1(\lambda) \left\{ -\frac{1}{\mu_1} \cdot F_1(\lambda) \sin h(\lambda\eta/\mu_1) + \frac{1}{\mu_1} \cdot F_2(\lambda) \sin h(\lambda\eta/\mu_2) \right\}$$

$$S_{xy}^2(\lambda, \eta) = c_2(\lambda) \left\{ -\frac{1}{\mu_1} \cdot F_3(\lambda) \cos h(\lambda\eta/\mu_1) + \frac{1}{\mu_1} \cdot F_4(\lambda) \cos h(\lambda\eta/\mu_2) \right\}$$

ここで、 $a_i = 2\rho_1/\mu_i$ ($i=1, 2$) とし、

$$F_1(\lambda) = \frac{1}{\rho_1} (\mu_1 e^{-a_1\lambda} - \mu_2 e^{-a_2\lambda}) \sin h(\lambda/\mu_2) + \mu_2 (e^{-a_1\lambda} - e^{-a_2\lambda}) \cos h(\lambda/\mu_2)$$

$$F_2(\lambda) = \frac{1}{\rho_1} (\mu_1 e^{-a_1\lambda} - \mu_2 e^{-a_2\lambda}) \sin h(\lambda/\mu_1) + \mu_1 (e^{-a_1\lambda} - e^{-a_2\lambda}) \cos h(\lambda/\mu_1)$$

$$F_3(\lambda) = \frac{1}{\rho_1} (\mu_1 e^{-a_1\lambda} - \mu_2 e^{-a_2\lambda}) \cos h(\lambda/\mu_2) + \mu_2 (e^{-a_1\lambda} - e^{-a_2\lambda}) \sin h(\lambda/\mu_2)$$

$$F_4(\lambda) = \frac{1}{\rho_1} (\mu_1 e^{-a_1\lambda} - \mu_2 e^{-a_2\lambda}) \cos h(\lambda/\mu_1) + \mu_1 (e^{-a_1\lambda} - e^{-a_2\lambda}) \sin h(\lambda/\mu_1)$$

$$c_1(\lambda) = \frac{\cos(\lambda\rho_0) + \rho_0 \cdot \cos \lambda}{\{\cos h(\lambda/\mu_1) \cdot \sin h(\lambda/\mu_2) - (\mu_2/\mu_1) \cdot \sin h(\lambda/\mu_1) \cdot \cos h(\lambda/\mu_2)\}}$$

$$c_2(\lambda) = \frac{\sin(\lambda\rho_0) - \rho_0 \cdot \sin \lambda}{\{\sin h(\lambda/\mu_1) \cdot \cos h(\lambda/\mu_2) - (\mu_2/\mu_1) \cdot \cos h(\lambda/\mu_1) \cdot \sin h(\lambda/\mu_2)\}}$$

文 献

- (1) Iosipescu, N., *Rev. de Mec. Appl.*, **1**(1963), 145.
- (2) Iosipescu, N., *J. Mat.*, **2-3**(1967), 537.
- (3) Adams, D. F. and Walrath, D. E., *ASTM STP*, **787** (1982), 19.
- (4) Adams, D. F. and Walrath, D. E., *Exp. Mech.*, **23-1** (1983), 105.
- (5) Adams, D. F. and Walrath, D. E., *J. Comp. Mat.*, **21** (1987), 494.
- (6) Adams, D. F. and Walrath, D. E., *Exp. Mech.*, **27**(1987), 113.
- (7) Sullivan, J. L., Kao, B. G. and Van Oene, H., *Exp. Mech.*, **24-3**(1984), 223.
- (8) Spigel, B. S., Prabhakaran, R. and Sawyer, J. W., *Exp. Mech.*, **27**(1987), 57.
- (9) 笠野・松本・中原, 機論, **58-554, A**(1992), 1839.
- (10) Kasano, H., ほか3名, *Trans. JSCM.*, **6-1**(1980), 1.