半無限板の三次元的熱応力*

海 津 浩 一^{*1}, 清 水 將 之^{*2}
青 戸 剛^{*3}, 谷 村 眞 治^{*1}

Three-Dimensional Dynamic Thermal Stresses in Semi-Infinite Plate

Koichi KAIZU, Masayuki SHIMIZU,
Tsuyoshi AOTO and Shinji TANIMURA

A numerical method to analyze three-dimensional dynamic thermal stresses in a semi-infinite plate is presented, in which instantaneous heating is applied to part of the plate surface. For the numerical analysis, the finite difference method based on integration along bicharacteristics is employed. From the numerical results, it is found that the propagation and reflection of the stress waves under instantaneous heating can be examined in detail by this method.

Key Words: Numerical Analysis, Stress Wave, Dynamic Thermal Stress, Bicharacteristics

1. 緒 言

衝撃荷重下での構造物の動的応答解析には種々の数値計算法が用いられるが、その中でも従特性曲線法^{(1)~(7)}は、波頭に沿った数値積分法であるため、応力波の反射・干渉などの複雑な二次元波動伝ばの状況を詳しく調べることができるうえに、安定な解が得られやすい特徴があり、単純な形状の物体に対しては非常に有用な解法である。この解法は種々の二次元波動伝ば問題の解析には有用^{(1)~(7)}であることが示されているが、三次元波動伝ば問題を扱うには、従特性曲線に沿う微分関係式を求める際に非常に複雑な計算を必要とするため、まだ十分に研究されていないようである^{(8)~(10)}。著者らは従特性曲線法を三次元問題に発展させ、その長所を有効に利用しながら、均質体をはじめ不均質体や異方性体等に対する複雑な衝撃問題の解析手法の確立を目指している。

近年、宇宙空間等の過酷な環境下で使用される機械や機器等の需要が高まり、それらに関する研究が活発

に行われている。特に、過酷な熱環境下で使用される機械などの設計の際には熱衝撃によって発生する応力波の伝ばの状況を詳細に把握する必要がある。このような熱衝撃問題に関しては、解析の困難さから簡単な一次元問題の場合が多く、応力波の反射・干渉を含めた長時間の波動解析については二次元問題でもほとんど行われておらず、三次元問題については著者らの知る限りではないようである。

本研究は、二次元波動伝ば問題の解析に用いられてきた従特性曲線法を三次元的熱応力問題に応用することを目的とし、その基礎式を導出した。数値解析例として、半無限板の表面の一部が急激に加熱される場合の三次元的熱応力問題を取り上げ、板内の応力波の伝ばや反射などの状況を調べた。

2. 理 論

2.1 基礎式 ある厚さの半無限板が急激に加熱される場合の三次元的熱応力問題を考える。このときの運動方程式は直角座標 (x, y, z) を用いると次のようになる。

$$\rho \frac{\partial u_x}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}$$

* 原稿受付 平成6年5月18日。

*1 正員、大阪府立大学工学部 (〒593 堺市学園町1-1)。

*2 大阪府立大学大学院。

*3 新日本製鐵(株) (〒100 東京都千代田区大手町2-6-3)。

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial u_y}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \\ \rho \frac{\partial u_z}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}\end{aligned}$$

……………(1)

ここで, u_x, u_y, u_z はそれぞれ x, y, z 軸方向の粒子速度成分, $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}$ は各応力成分, ρ は密度, t は時間を表す。

応力, ひずみおよび温度の関係は次式のようになる。

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_{xx} &= \frac{1}{2\mu} \dot{s}_x + \frac{\dot{\sigma}_m}{3K_v} + \alpha \dot{\tau} \\ \dot{\epsilon}_{yy} &= \frac{1}{2\mu} \dot{s}_y + \frac{\dot{\sigma}_m}{3K_v} + \alpha \dot{\tau} \\ \dot{\epsilon}_{zz} &= \frac{1}{2\mu} \dot{s}_z + \frac{\dot{\sigma}_m}{3K_v} + \alpha \dot{\tau} \\ \dot{\epsilon}_{xy} &= \frac{1}{2\mu} \dot{\sigma}_{xy}, \dot{\epsilon}_{yz} = \frac{1}{2\mu} \dot{\sigma}_{yz}, \dot{\epsilon}_{zx} = \frac{1}{2\mu} \dot{\sigma}_{zx}\end{aligned}$$

……………(2)

ここで, $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \epsilon_{xy}, \epsilon_{yz}, \epsilon_{zx}$ は各ひずみ成分, μ は剛性率, $s_{xx}, s_{yy}, s_{zz}, s_{xy}, s_{yz}, s_{zx}$ は各偏差応力成分, K_v は体積弾性係数, σ_m は平均垂直応力, α は線膨張係数, τ は温度変化, “ $\cdot$ ” は時間に関する偏微

分を示す。

2・2 無次元化 以下の無次元量を導入する。

$$\begin{aligned}t &= \frac{c_1}{b} \hat{t}, x = \frac{\hat{x}}{b}, y = \frac{\hat{y}}{b}, z = \frac{\hat{z}}{b} \\ u &= \frac{\hat{u}_x}{c_1}, v = \frac{\hat{u}_y}{c_1}, w = \frac{\hat{u}_z}{c_1} \\ l &= \frac{\hat{\sigma}_{xx}}{\rho c_1^2}, m = \frac{\hat{\sigma}_{yy}}{\rho c_1^2}, n = \frac{\hat{\sigma}_{zz}}{\rho c_1^2} \\ p &= \frac{\hat{\sigma}_{xy}}{\rho c_1^2}, q = \frac{\hat{\sigma}_{yz}}{\rho c_1^2}, s = \frac{\hat{\sigma}_{zx}}{\rho c_1^2} \\ k_c &= c_1/c_2, \beta = \alpha \hat{T}_0, T = \hat{T}/\hat{T}_0 \\ c_1 &= (K_v/\rho + 4\mu/3\rho)^{1/2}, c_2 = (\mu/\rho)^{1/2}\end{aligned}$$

……………(3)

ここで, $\hat{\cdot}$ は有次元量を表し, c_1, c_2 はそれぞれ膨張波およびせん断波の伝ば速度を示し, T は温度, T_0 は代表温度, b は代表長さを表す。運動方程式(1)と構成式(2)を上記の無次元量を用いて無次元化し, 行列表示すると基礎式は次のようになる。

$$L(W) = A^t W_t + A^x W_x + A^y W_y + A^z W_z + B = 0$$

……………(4)

ここで, ベクトル W, B および行列 A^x, A^y, A^z はそれぞれ次のようになる。

$$\begin{aligned}W &= \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ (l+m+n)/(3\xi) \\ k_c(l-m)/2 \\ k_c(l+m-2n)/2\sqrt{3} \\ k_cp \\ k_cs \\ k_cq \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3\xi\beta T_t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ A^x &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\xi & -\eta & -\zeta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\eta & 0 \\ -\xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A^y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\xi & \eta & -\zeta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\eta \\ 0 & -\xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\end{aligned}$$

$$A^z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\eta \\ 0 & 0 & 0 & -\xi & 0 & 2\xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (5)$$

なお、ベクトル W の下添字はそれぞれ t, x, y, z の偏微分を表し、また $\xi = \{1 - 4/(3k_c^2)\}^{1/2}$, $\eta = 1/k_c$, $\zeta = 1/\sqrt{3}k_c$ である。

2・3 従特性曲線に沿った差分式 式(4)は1階の半線形双曲型偏微分方程式系であり、曲面 $\phi(x, y, z, t) = 0$ が式(4)の特性曲面を表すための条件は特性行列 $A = A^t\phi_t + A^x\phi_x + A^y\phi_y + A^z\phi_z$ の行列式が零になることである。 $\det A = 0$ は次のようになる。

$$\phi_t^2 - (\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2) = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\phi_t^2 - (\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2)/k_c^2 = 0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここで式(6), (7)は、それぞれ無次元伝ば速度が ± 1 , $\pm 1/k_c$ の膨張波およびせん断波に関する特性方程式を表す。 $t = t_0$ の平面上で、

$$(x - x_0)a_1 + (y - y_0)a_2 + (z - z_0)a_3 = 0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

の直線を含み、伝ば速度が c の特性曲面は次のようになる。

$$\phi = c(t - t_0) - (x - x_0)a_1 - (y - y_0)a_2 - (z - z_0)a_3 \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここで、 a_1, a_2, a_3 はパラメータであり、また $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$ である。この平面群の包絡面をとると次式となる。

$$c^2(t - t_0)^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \quad (c = \pm 1, \pm 1/k_c) \quad \dots\dots\dots (10)$$

これは点 (t_0, x_0, y_0, z_0) を頂点とする特性円すいである。この接線が従特性曲線であり、それらは次のように表される。

$$x - x_0 = c(t - t_0)a_1, \quad y - y_0 = c(t - t_0)a_2, \quad z - z_0 = c(t - t_0)a_3 \quad \dots\dots\dots (11)$$

また、従特性曲線を含む特性曲面に垂直な方向は次のようになる。

$$\phi_t = c, \quad \phi_x = -a_1, \quad \phi_y = -a_2, \quad \phi_z = -a_3 \quad (c = 1, 1/k_c) \quad \dots\dots\dots (12)$$

式(5)と式(12)をもとに、 $l^i(A^t\phi_t + A^x\phi_x + A^y\phi_y + A^z\phi_z) = 0$ を満たす四つの固有ベクトル $l^i (i = 1, 2, 3, 4)$ を求めると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} l^1 &= [-a_1, -a_2, -a_3, \xi, (\alpha_1^2 - \alpha_2^2)/k_c, (1 - 3\alpha_3^2)/(\sqrt{3}k_c), 2a_1a_2/k_c, 2a_1a_3/k_c, 2a_2a_3/k_c] \\ l^2 &= [0, a_3, -a_2, 0, a_2a_3, -\sqrt{3}a_2a_3, -a_1a_3, a_1a_2, a_2^2 - a_3^2] \\ l^3 &= [a_3, 0, -a_1, 0, -a_1a_3, -\sqrt{3}a_1a_3, -a_2a_3, -a_3^2 + a_1^2, a_1a_2] \\ l^4 &= [a_2, -a_1, 0, 0, -2a_1a_2, 0, -a_2^2 + a_1^2, -a_2a_3, a_1a_3] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (13)$$

これらの固有ベクトル l^i を用いて次式を展開する。

$$l^i L(W) = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad \dots\dots\dots (14)$$

式(14)より得られた式に、従特性曲線に沿う関係式

$$\frac{dW}{dt} = W_t + W_x \frac{dx}{dt} + W_y \frac{dy}{dt} + W_z \frac{dz}{dt} \quad \dots\dots\dots (15)$$

を代入して W_t を消去すると、次のような従特性曲線に沿った微分関係式が得られる。

$$a_1 du + a_2 dv + a_3 dw + a_1^2 dl + a_2^2 dm + a_3^2 dn + 2a_1a_2 dp + 2a_1a_3 ds + 2a_2a_3 dq = -S_1(a_1, a_2, a_3) dt \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$-a_3 dv + a_2 dw - k_c a_2 a_3 dm + k_c a_2 a_3 dn - k_c a_1 a_3 dp + k_c a_1 a_2 ds + k_c (a_2^2 - a_3^2) dq = -S_2(a_1, a_2, a_3) dt \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$-a_3 du + a_1 dw - k_c a_1 a_3 dn + k_c a_1 a_3 dm - k_c a_2 a_3 dp + k_c (a_1^2 - a_3^2) ds + k_c a_1 a_2 dq = -S_3(a_1, a_2, a_3) dt \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$-a_2 du + a_1 dv - k_c a_1 a_2 dl + k_c a_1 a_2 dm + k_c (a_1^2 - a_2^2) dp - k_c a_2 a_3 ds + k_c a_1 a_3 dq = -S_4(a_1, a_2, a_3) dt \quad \dots\dots\dots (19)$$

ここで

$$S_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (k_c^2 - 2) \{ (\alpha_1^2 - 1)u_x + \alpha_1\alpha_2u_y + \alpha_1\alpha_3u_z + \alpha_1\alpha_2v_x + (\alpha_2^2 - 1)v_y + \alpha_2\alpha_3v_z + \alpha_1\alpha_3w_x + \alpha_2\alpha_3w_y \\ + (\alpha_3^2 - 1)w_z \} / k_c^2 - \alpha_1(1 - \alpha_1^2)l_x + \alpha_1^2\alpha_2l_y + \alpha_1^2\alpha_3l_z + \alpha_1\alpha_2^2m_x - \alpha_2(1 - \alpha_2^2)m_y + \alpha_2^2\alpha_3m_z \\ + \alpha_2^2\alpha_1n_x + \alpha_2\alpha_3^2n_y - \alpha_3(1 - \alpha_3^2)n_z - \alpha_2(1 - 2\alpha_1^2)p_x - \alpha_1(1 - 2\alpha_2^2)p_y + 2\alpha_1\alpha_2\alpha_3p_z - \alpha_3(1 - 2\alpha_1^2)s_x + 2\alpha_1\alpha_2\alpha_3s_y \\ - \alpha_1(1 - 2\alpha_3^2)s_z + 2\alpha_1\alpha_2\alpha_3q_x - \alpha_3(1 - 2\alpha_2^2)q_y - \alpha_2(1 - 2\alpha_3^2)q_z + (3k_c^2 - 4)\beta T_t \quad \dots\dots\dots (20)$$

$$S_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1\alpha_3u_y - \alpha_1\alpha_2u_z + \alpha_2\alpha_3v_y - \alpha_2^2v_z + \alpha_3^2w_y - \alpha_2\alpha_3w_z) / k_c - \alpha_1\alpha_2\alpha_3m_x - \alpha_3(\alpha_2^2 - 1)m_y \\ - \alpha_2\alpha_3^2m_z + \alpha_1\alpha_2\alpha_3n_x + \alpha_2^2\alpha_3n_y - \alpha_2(1 - \alpha_3^2)n_z - \alpha_3(\alpha_1^2 - 1)p_x - \alpha_1\alpha_2\alpha_3p_y - \alpha_1\alpha_3^2p_z - \alpha_2(1 - \alpha_1^2)s_x + \alpha_1\alpha_2^2s_y \\ + \alpha_1\alpha_2\alpha_3s_z + \alpha_1(\alpha_2^2 - \alpha_3^2)q_x - \alpha_2(1 - \alpha_1^2 + \alpha_3^2)q_y + \alpha_3(1 + \alpha_2^2 - \alpha_3^2)q_z \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$S_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1\alpha_3u_x - \alpha_1^2u_z + \alpha_2\alpha_3v_x - \alpha_1\alpha_2v_z + \alpha_3^2w_x - \alpha_1\alpha_3w_z) / k_c - \alpha_3(\alpha_1^2 - 1)l_x - \alpha_1\alpha_2\alpha_3l_y \\ - \alpha_1\alpha_3^2l_z + \alpha_1^2\alpha_3n_x + \alpha_1\alpha_2\alpha_3n_y - \alpha_1(1 - \alpha_3^2)n_z - \alpha_1\alpha_2\alpha_3p_x - \alpha_3(\alpha_2^2 - 1)p_y - \alpha_2\alpha_3^2p_z - \alpha_1(1 - \alpha_1^2 + \alpha_3^2)s_x \\ + \alpha_2(\alpha_1^2 - \alpha_3^2)s_y + \alpha_3(1 + \alpha_1^2 - \alpha_3^2)s_z + \alpha_1^2\alpha_2q_x - \alpha_1(1 - \alpha_2^2)q_y + \alpha_1\alpha_2\alpha_3q_z \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$S_4(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1\alpha_2u_x - \alpha_1^2u_y + \alpha_2^2v_x - \alpha_1\alpha_2v_y + \alpha_2\alpha_3w_x - \alpha_1\alpha_3w_y) / k_c - \alpha_2(\alpha_1^2 - 1)l_x - \alpha_1\alpha_2^2l_y \\ - \alpha_1\alpha_2\alpha_3l_z + \alpha_1^2\alpha_2m_x - \alpha_1(1 - \alpha_2^2)m_y - \alpha_1\alpha_2\alpha_3m_z - \alpha_1(1 - \alpha_1^2 + \alpha_2^2)p_x + \alpha_2(1 + \alpha_1^2 - \alpha_2^2)p_y + \alpha_3(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)p_z \\ - \alpha_1\alpha_2\alpha_3s_x - \alpha_2^2\alpha_3s_y - \alpha_2(\alpha_3^2 - 1)s_z + \alpha_1^2\alpha_3q_x + \alpha_1\alpha_2\alpha_3q_y - \alpha_1(1 - \alpha_3^2)q_z \quad \dots\dots\dots (23)$$

式(16)は $c=1$ の従特性曲線に沿う微分方程式で、式(17)～(19)は $c=1/k_c$ の従特性曲線に沿う微分方程式系である。式(16)～(19)を対応する従特性曲線に沿って積分し、無次元時間 K_t^2 の精度の差分式で表すと次のようになる。

$$\alpha_1\delta u + \alpha_2\delta v + \alpha_3\delta w + \alpha_1^2\delta l + \alpha_2^2\delta m + \alpha_3^2\delta n + 2\alpha_1\alpha_2\delta p + 2\alpha_1\alpha_3\delta s + 2\alpha_2\alpha_3\delta q \\ = -K_t[(S_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3))_i + (S_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3))^\circ] / 2 - W_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + 0(K_t^3) \quad \dots\dots\dots (24)$$

$$-\alpha_3\delta v + \alpha_2\delta w - k_c\alpha_2\alpha_3\delta m + k_c\alpha_2\alpha_3\delta n - k_c\alpha_1\alpha_3\delta p + k_c\alpha_1\alpha_2\delta s + k_c(\alpha_2^2 - \alpha_3^2)\delta q \\ = -K_t[(S_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3))_i + (S_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3))^\circ] / 2 - W_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + 0(K_t^3) \quad \dots\dots\dots (25)$$

$$-\alpha_3\delta u + \alpha_1\delta w - k_c\alpha_1\alpha_3\delta l + k_c\alpha_1\alpha_3\delta n - k_c\alpha_2\alpha_3\delta p + k_c(\alpha_1^2 - \alpha_3^2)\delta s + k_c\alpha_1\alpha_2\delta q \\ = -K_t[(S_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3))_i + (S_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3))^\circ] / 2 - W_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + 0(K_t^3) \quad \dots\dots\dots (26)$$

$$-\alpha_2\delta u + \alpha_1\delta v - k_c\alpha_1\alpha_2\delta l + k_c\alpha_1\alpha_2\delta m + k_c(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)\delta p - k_c\alpha_2\alpha_3\delta s + k_c\alpha_1\alpha_3\delta q \\ = -K_t[(S_4(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3))_i + (S_4(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3))^\circ] / 2 - W_4(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + 0(K_t^3) \quad \dots\dots\dots (27)$$

ここで、

$$W_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = [\alpha_1u + \alpha_2v + \alpha_3w + \alpha_1^2l + \alpha_2^2m + \alpha_3^2n + 2\alpha_1\alpha_2p + 2\alpha_1\alpha_3s + 2\alpha_2\alpha_3q]_i \\ - [\alpha_1u + \alpha_2v + \alpha_3w + \alpha_1^2l + \alpha_2^2m + \alpha_3^2n + 2\alpha_1\alpha_2p + 2\alpha_1\alpha_3s + 2\alpha_2\alpha_3q]_i \quad \dots\dots\dots (28)$$

$$W_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = [-\alpha_3v + \alpha_2w - k_c\alpha_2\alpha_3m + k_c\alpha_2\alpha_3n - k_c\alpha_1\alpha_3p + k_c\alpha_1\alpha_2s + k_c(\alpha_2^2 - \alpha_3^2)q]_i \\ - [-\alpha_3v + \alpha_2w - k_c\alpha_2\alpha_3m + k_c\alpha_2\alpha_3n - k_c\alpha_1\alpha_3p + k_c\alpha_1\alpha_2s + k_c(\alpha_2^2 - \alpha_3^2)q]_i \quad \dots\dots\dots (29)$$

$$W_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = [-\alpha_3u + \alpha_1w - k_c\alpha_1\alpha_3l + k_c\alpha_1\alpha_3n - k_c\alpha_2\alpha_3p + k_c(\alpha_1^2 - \alpha_3^2)s + k_c\alpha_1\alpha_2q]_i \\ - [-\alpha_3u + \alpha_1w - k_c\alpha_1\alpha_3l + k_c\alpha_1\alpha_3n - k_c\alpha_2\alpha_3p + k_c(\alpha_1^2 - \alpha_3^2)s + k_c\alpha_1\alpha_2q]_i \quad \dots\dots\dots (30)$$

$$W_4(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = [-\alpha_2u + \alpha_1v - k_c\alpha_1\alpha_2l + k_c\alpha_1\alpha_2m + k_c(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)p - k_c\alpha_2\alpha_3s + k_c\alpha_1\alpha_3q]_i \\ - [-\alpha_2u + \alpha_1v - k_c\alpha_1\alpha_2l + k_c\alpha_1\alpha_2m + k_c(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)p - k_c\alpha_2\alpha_3s + k_c\alpha_1\alpha_3q]_i \quad \dots\dots\dots (31)$$

なお、 $\delta W = W^\circ(t_0, x_0, y_0, z_0) - W_\circ(t_0 - K_t, x_0, y_0, z_0)$ であり、上指標“ $\circ$ ”と下指標“ $\circ$ ”はそれぞれ点 (t_0, x_0, y_0, z_0) と点 $(t_0 - K_t, x_0, y_0, z_0)$ での各変数の値である。下指標“ i ”は点 $(t_0 - K_t, x_0 + K_t\alpha_1, y_0 + K_t\alpha_2, z_0 + K_t\alpha_3)$ での各変数の値を、下指標“ i ”は点 $(t_0 - K_t, x_0 + K_t k_c\alpha_1, y_0 + K_t k_c\alpha_2, z_0 + K_t k_c\alpha_3)$ での各変数の値を示す。ここで紙面の関係上、 $a_j, b_k, c_k, d_k (j=1, 2, \dots, 6, k=1, 2, 3, 4)$ の記号を導入する⁽¹⁾⁽⁸⁾⁽¹⁰⁾。具体的には以下に示すとおりである。式(24)はそれぞれ $\alpha_1 = \pm 1, \alpha_2 = \pm 1, \alpha_3 = \pm 1 (c=1)$ の従特性曲線に沿って積分されるので、 $(\alpha_1 = \pm 1, \alpha_2 = \alpha_3 = 0), (\alpha_2 = \pm 1, \alpha_1 = \alpha_3 = 0), (\alpha_3 = \pm 1, \alpha_1 = \alpha_2 = 0)$ をそれぞれ式(24)に代入すると、6個の差分式を得ることができる。それらをそれぞれ

$a_1(1, 0, 0), a_2(-1, 0, 0), a_3(0, 1, 0), a_4(0, -1, 0), a_5(0, 0, 1), a_6(0, 0, -1)$ と表す。同様に、式(25)～(27)をそれぞれ $\alpha_1 = \pm 1, \alpha_2 = \pm 1, \alpha_3 = \pm 1 (c=1/k_c)$ の従特性曲線に沿って積分することにより、12個の差分式が得られる。それらをそれぞれ、 $b_1(0, 1, 0), b_2(0, -1, 0), b_3(0, 0, 1), b_4(0, 0, -1), c_1(1, 0, 0), c_2(-1, 0, 0), c_3(0, 0, 1), c_4(0, 0, -1), d_1(1, 0, 0), d_2(-1, 0, 0), d_3(0, 1, 0), d_4(0, -1, 0)$ と表す。

一方、基礎式(4)を時間軸に沿って $t = t_0 - K_t$ から $t = t_0$ まで K_t^2 の精度で積分すると次の差分式が得られる。

$$\delta u = K_t[l_{x_0} + p_{y_0} + s_{z_0} + l_x^\circ + p_y^\circ + s_z^\circ] / 2 \quad \dots\dots\dots (32)$$

$$\delta v = K_t [p_{x_0} + m_{y_0} + q_{z_0} + p_x^0 + m_y^0 + q_z^0] / 2 \quad \dots\dots\dots (33)$$

$$\delta w = K_t [s_{x_0} + q_{y_0} + n_{z_0} + s_x^0 + q_y^0 + n_z^0] / 2 \quad \dots\dots\dots (34)$$

$$(\delta l + \delta m + \delta n) / 3\xi^2 = K_t \xi [u_{x_0} + v_{y_0} + w_{z_0} + u_x^0 + v_y^0 + w_z^0] / 2 - 3\beta\delta T \quad \dots\dots\dots (35)$$

$$k_c(\delta l - \delta m) / 2 = K_t [-(u_{x_0} + v_{y_0} - u_x^0 + v_y^0) / k_c] / 2 \quad \dots\dots\dots (36)$$

$$k_c(\delta l + \delta m - 2\delta n) / 2\sqrt{3} = K_t [(u_{x_0} + v_{y_0} - 2w_{z_0} + u_x^0 + v_y^0 - 2w_z^0) / \sqrt{3} k_c] / 2 \quad \dots\dots\dots (37)$$

$$k_c\delta p = K_t [(v_{x_0} + u_{y_0} + v_x^0 + u_y^0) / k_c] / 2 \quad \dots\dots\dots (38)$$

$$k_c\delta s = K_t [(u_{z_0} + w_{x_0} + u_z^0 + w_x^0) / k_c] / 2 \quad \dots\dots\dots (39)$$

$$k_c\delta q = K_t [(v_{z_0} + w_{y_0} + v_z^0 + w_y^0) / k_c] / 2 \quad \dots\dots\dots (40)$$

これらの 27 個の差分式に含まれる未知数は 27 個であるため、これらの差分式を連立して解くことができる。点 (t_0, x_0, y_0, z_0) における W^0 の偏微分の項を消去すると 9 個の増分 $\delta u, \delta v, \delta w, \delta l, \delta m, \delta n, \delta p, \delta q, \delta s$ を既知の W_0 の項で以下のように表すことができる。

$$a_1 - a_2 - c_3 + c_4 - d_3 + d_4 - 4(32) | 2\delta u \quad \dots\dots\dots (41)$$

$$a_3 - a_4 - b_3 + b_4 + d_1 - d_2 - 4(33) | 2\delta v \quad \dots\dots\dots (42)$$

$$a_5 - a_6 + b_1 - b_2 + c_1 - c_2 - 4(34) | 2\delta w \quad \dots\dots\dots (43)$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 - 4(k_c^2 - 2)(35) / k_c^2 | 2(\delta l + \delta m + \delta n) / \xi^2 / 3 \quad \dots\dots\dots (44)$$

$$a_1 + a_2 - a_3 - a_4 + 2(k_c^2 - 2)k_c(36) / k_c^2 | k_c^2(\delta l - \delta m) \quad \dots\dots\dots (45)$$

$$[a_1 + a_2 + a_3 + a_4] / 2 - a_5 - a_6 + \sqrt{3}(k_c^2 - 2) \times k_c(37) / k_c^2 | k_c^2(\delta l + \delta m - 2\delta n) / 2 \quad \dots\dots\dots (46)$$

$$d_1 + d_2 - d_3 - d_4 - 2(38) | 2k_c\delta p \quad \dots\dots\dots (47)$$

$$c_1 + c_2 - c_3 - c_4 - 2(39) | 2k_c\delta s \quad \dots\dots\dots (48)$$

$$b_1 + b_2 - b_3 - b_4 - 2(40) | 2k_c\delta q \quad \dots\dots\dots (49)$$

ここで、線 | の左辺は式の組合せの操作を表し、線 | の右辺は組合せの結果から求められる未知変数の増分を表している。境界上では有効な従特性曲線が減るが、その不足分は境界条件により補足され、必要とする差分式が得られる。

3. 数値計算例

図 1 に示すように、半無限板の表面の斜線部分が急激に加熱される場合を考える。板の形状は厚さを 4 mm とし、図 1 に示すように y 軸の正負両方向および x 軸の負方向には無限大に広いものと仮定した。

三次元非定常熱伝導方程式は次式である。

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\chi} \frac{\partial T}{\partial t} \quad \dots\dots\dots (50)$$

ただし χ は無次元化された温度伝導率を示し、 $\chi = \kappa / (c_1 b)$ で表される。

加熱面に作用させる負荷関数は次のように仮定した。

$$T(t) = \begin{cases} T_m t / t_1 & (t < t_1) \\ T_m & (t \geq t_1) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (51)$$

ここで $T_m = T_{m0} / T_0$ 、 T_{m0} は最大加熱温度、 t_1 は無次元立上り時間である。また、加熱領域は図 1 (b) に示すとおりである。境界条件は以下のように仮定する。

$$\frac{\partial T}{\partial z} + h_z(T - T_0) = 0 \quad (z=1)$$

(a)

(b)

図 1 半無限板と座標系

図 2 数値解 $n(=\sigma_z)$ に及ぼす $AH(K_t/H)$ の影響

図 3 加熱部近傍の板厚中央面 ($z=0.5$) での応力 $n(\sigma_z)$ の分布

図 4 引張主応力の分布

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial z} - h_z(T - T_0) &= 0 \quad (z=0) \\ \frac{\partial T}{\partial x} + h_x(T - T_0) &= 0 \quad (x=1) \\ T &= 0 \quad (x \rightarrow -\infty, y \rightarrow \pm\infty) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (52)$$

ここで h_x と h_z は相対熱伝達率である。

力学的境界条件は以下のように仮定した。

$$\left. \begin{aligned} n &= q = s = 0 \quad (z=0, 1) \\ l &= p = s = 0 \quad (x=1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (53)$$

なお、無限遠方 ($x \rightarrow -\infty, y \rightarrow \pm\infty$) において、すべての粒子速度および応力成分は零とする。

数値計算には材料として軟鋼を仮定し、以下の材料定数を用いた。

$$\begin{aligned} \rho &= 7.86 \times 10^3 [\text{kg/m}^3], \quad c_1 = 5841.8 [\text{m/s}], \\ c_2 &= 3190.3 [\text{m/s}], \quad \kappa = 2.27 \times 10^{-5} [\text{m}^2/\text{s}], \\ \alpha &= 1.1 \times 10^{-5} [1/\text{K}], \quad h_x = h_z = 0.0 [1/\text{m}] \end{aligned}$$

(断熱状態を仮定)。

また、加熱条件は $t_1 = 0.625$, $T_{m0} = 1.18$ とした。

初期条件として、 $t=0$ ですべての粒子速度および応力成分を零とした。

数値解の安定性については、無次元時間刻み幅と無次元空間刻み幅の比 $AH(=K_t/H)$ の値を変えることにより調べた。なお、無次元空間刻み幅は無次元表示した座標系に沿って半無限板をメッシュに分割したときの刻み幅である。図2は計算の一例であり、 $x=1, z=0.5$ の位置における $n(=\sigma_z)$ の値を示している。図より、 AH が $0.4 \sim 0.5$ で n の値が収束していることがわかる。したがって、以下の計算には、 $K_t = 0.125$, $H = 0.25$ としたときの $AH = 0.5$ を用いることとした。この値は Clifton の安定条件⁽¹⁾ と一致している。

図3(a)から図3(f)は、半無限板の加熱部近傍の板厚中央面での応力 $n(=\sigma_z)$ を無次元時間0.5より1.0おきに5.5までの時間にわたって三次元的に表したものである。これらのグラフより、加熱部の真下で引張応力が発生し、時間とともに徐々に大きくなるが、無次元時間2.5において垂直応力は減少し、その後、時間とともに変動することがわかる。これは上面で発生した引張りの応力波が底面で反射して圧縮の応力波として帰ってきたためである。また $x=1$ の面においても、応力波の反射により引張応力と圧縮応力が交互に発生し、時間とともに変動することがわかる。

引張強さが圧縮強さよりも顕著に低い脆性材料からなる物体に、衝撃的荷重が作用する時の破壊の発生位置は、高い引張応力の発生位置と密接に関連している。また、必ずしも脆性材料でなくても、衝撃的荷重が

繰返し作用するときの破壊の発生位置は、引張応力の発生位置とも関連すると考えられる。そこで、板内に発生する最大引張主応力を調べることで、厚板の全体の衝撃破壊についての検討を行う。図4(a)から図4(f)は、無次元時間0.5から5.5までに $x=0$ の面の加熱部近傍に発生した引張りの最大主応力の分布を示している。手前が板の底面、向こう側が板の加熱面を表している。なお、図4は xz 面に対する対称性と加熱部近傍のみを表しているために、図示される格子点の数が減り、メッシュが大きくなっている。図より、最大引張りの主応力は、最初に加熱中心で発生し、その後、加熱部分と非加熱部分の境界において大きくなることがわかる。このことから、今回の加熱条件の場合には、脆性材料の板は加熱面で破壊が生じる可能性が高いといえる。このように引張りの主応力を調べることで、脆性材料の板に対する破壊の発生位置が予想でき、熱衝撃を受ける板に対する設計に利用できるものと思われる。

以上の数値計算結果から、形状の簡単な半無限板のような場合には、従特性曲線法を用いて応力波の伝ば状況を追いかけることにより、板の動的熱応力の状況を詳細に明らかにできることがわかった。

4. 結 言

波頭に沿った数値積分法であるために、波動伝ばの状況を詳細に解析できる従特性曲線法を三次元動的熱応力問題に応用し、急激に加熱される板内の熱応力波の伝ば状況を明らかにすることを目的とし、三次元動的熱応力問題の基礎式を導出した。数値解析例として、半無限板の表面の一部が急激に加熱される場合の三次元波動伝ば問題を取り上げ、数値計算結果から、板内の応力波の伝ば状況を示すと同時に、三次元動的熱応力問題に対して、この解法が有用であることを示した。

最後に、本研究の一部は文部省科学研究費補助金奨励研究(A)(No. 06750100)の補助によることを記し、謝意を表する。

文 献

- (1) Clifton, R. J., *Q. Appl. Math.*, **25**-1 (1967), 97.
- (2) 谷村・ほか2名, 機論, **52**-484, A (1986), 2680.
- (3) 劉・ほか2名, 機論, **54**-502, A (1988), 1284.
- (4) 劉・ほか3名, 材料, **36**-411 (1987), 1309.
- (5) 劉・ほか3名, 機論, **55**-515, A (1989), 1572.
- (6) 海津・ほか2名, 機論, **57**-535, A (1991), 615.
- (7) 海津・ほか2名, 機論, **59**-557, A (1993), 124.
- (8) Recker, W. W., *J. Appl. Mech.*, **37** (1970), 116.
- (9) 劉・横山, 機論, **58**-547, A (1992), 449.
- (10) 海津・ほか2名, 機論, **60**-571, A (1994), 825.