円孔を有する先端複合材料積層板の振動特性*

青 木 義 男^{*1}, 邊 吾 一^{*2}

Vibrational Characteristics of Advanced Composite Laminates With a Hole

Yoshio AOKI and Goichi BEN (O-II Byon)

The objective of this investigation is to predict the natural frequency of a laminated carbon fiber reinforced thermoplastics (CF/PEEK) plate with a hole by using the finite element method. In the finite element formulation, a parabolic isoparametric plate bending element is used and the first-order shear deformation theory based on the Mindlin type is considered. The good agreement between the numerical and the experimental results of CF/PEEK unidirectional and cross-ply laminated plates with a hole shows that the natural frequencies and modes can be predicted by the present method. Furthermore, the changes of frequencies and modes of the antisymmetrically angle-ply and the cross-ply laminated plates with the size of the hole, the stacking sequence of lamina and the plate length-to-width ratio are examined by F.E.M. under simply supported and clamped boundary conditions.

Key Words: Eigenvalue Analysis, Reinforced Plastics, Finite Element Method, Laminated Plate with a Hole, Coupling Effect

1. 結 言

最近の先端複合材料は、従来の複合材に比べて優れた耐疲労特性や耐熱性を有するので、飛翔体構造への適用例が多くなってきた。このため、動的特性の把握も重要課題になってきたが、飛翔体構造部材には、小さなものとしてはボルト、ピンなどによる取付のための開孔、大きなものとしては航空機の窓などの開孔部がよく見られる。開孔を有する構造部材に動的負荷が作用した場合の挙動を明らかにするためには、まず開孔を有する部材の基本振動特性を把握する必要がある。一方、複合積層材による軽量機体設計では、空力弾性テラリングなどにみられるように、異方性やクロスエラスティシティ効果の積極利用がなされているので、対称バランسد積層についての検討のみでは不十分とも考えられる。複合材積層板の振動問題を取り扱った研究は、これまでも多く行われている⁽¹⁾が、対称バランسد積層以外の積層構成について検討しているものは比較的少ない^{(2)~(4)}。また、有孔平板の振動特性について調べられたものも若干みられる^{(5)~(10)}。周辺単純支持と周辺固定の正方形板⁽⁵⁾や長方形板⁽⁶⁾、周辺自由の正方形板⁽⁷⁾などの等方性材について、適当なたわみ関数を用い、Rayleigh-Ritz法によって基本固有振動数を求めたもの、有限要素法を用いてCFRP有孔積層板の固有振動数と損失係数を求め⁽⁸⁾、周辺自由支持のCFRP積層板の加振実験結果と比較したもの

⁽⁹⁾、またハイブリッド型有限要素法を用い、周辺単純支持された有孔積層板の固有振動数を求めた解析⁽¹⁰⁾などがある。

本研究では、円孔を有する先端複合材積層板の固有振動数を求めるために有限要素法の定式化を行い、各種境界条件の下で数値解析を行う。また、周辺固定条件の下で円孔を有するCF/PEEK積層板のインパルス加振実験も行い、両者の結果について比較・検討する。さらに、有孔CF/PEEK積層板の振動特性に関する設計公式を提案するために、開孔の大きさや積層構成ならびに境界条件などが、積層板の固有振動数や振動モードに及ぼす影響を明らかにする。

2. 固有値解析

図1に有孔複合材積層板と原点を板下面に有する座標系を示す。この積層板が曲げ振動する場合の x , y , z 方向の変位成分 u , v , w を次式で仮定する。

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z\theta_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z\theta_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (1)$$

図1 有孔複合材積層板とその座標系

* 原稿受付 平成6年4月18日。

^{*1} 正員, 日本大学理工学部 (〒274 船橋市習志野台 7-24-1)。^{*2} 正員, 日本大学生産工学部 (〒275 習志野市泉町 1-2-1)。

ここで, u_0, v_0, w_0 は積層板の中央面での各変位成分, θ_x, θ_y は積層板断面の y, x 軸まわりの回転を表す。数値解析に用いた要素は, 8 節点,

2 次のアイソパラメトリック板曲げ要素であり, 要素の節点自由度は $u_i, v_i, w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}$ ($i=1\sim 8$) の 5 つとした。形状関数マトリクス $[N]$ を用いて, 要素内の各変位成分 $\{d\} = \{u, v, w, \theta_x, \theta_y\}$ を

$$\{d\} = [N]\{\delta\} \quad (2)$$

$\{\delta\} = \{u_1, v_1, w_1, \theta_{x1}, \theta_{y1}, u_2, v_2, w_2, \theta_{x2}, \theta_{y2}, \dots, u_8, v_8, w_8, \theta_{x8}, \theta_{y8}\}^T$ で定義する。次に積層板の面内, 曲げ, 面外せん断変形を考慮したひずみ成分

$\{\epsilon\} = \{\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_{xy}, \kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}, \phi_x, \phi_y\}^T$ は節点変位量ベクトル $\{\delta\}$ を用いて次式で与えられる。

$$\{\epsilon\} = [B]\{\delta\} \quad (3)$$

面内合力, 合モーメント, 合せん断力のベクトル $\{\sigma\} = \{N_x, N_y, N_{xy}, M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y\}^T$ と式 (3) の $\{\epsilon\}$ の関係式は, $[D]$ を応力-ひずみ関係マトリクスとすると次式

$$\{\sigma\} = [D]\{\epsilon\} \quad (4)$$

で与えられる。なお, 本解析ではせん断修正係数を $5/6$ ⁽¹²⁾ とした。式 (3) と (4) により要素剛性マトリクス $[k]$ は次式となる。

$$[k] = \iint [B]^T [D] [B] dx dy \quad (5)$$

式 (2) ~ (5) の $[N], [B]$ と $[D]$ マトリクスは紙面の都合上記述 ⁽¹¹⁾ を省略する。次に, 要素質量マトリクス $[m]$ には分布質量を用い, その各成分は

$$m_{kl} = \rho h \iint N_i N_j dx dy \quad \begin{matrix} k = 5i-4, 5i-3, 5i-2 \\ l = 5i-4, 5i-3, 5i-2 \end{matrix}; i, j = 1-8$$

$$m_{kl} = \rho \frac{h^2}{4} \iint N_i N_j dx dy \quad \begin{matrix} k = 5i-4, 5i-3 \\ l = 5i-4, 5i-3 \end{matrix}; i, j = 1-8 \quad (6)$$

$$m_{kl} = \rho \frac{h^3}{12} \iint N_i N_j dx dy \quad \begin{matrix} k = 5i-1, 5i \\ l = 5i-1, 5i \end{matrix}; i, j = 1-8$$

となる。ここで, 最初の m_{kl} は並進慣性, 2 番目の m_{kl} は曲げ-伸張カップリング慣性, 最後の m_{kl} は回転慣性を表す。式 (5) と (6) の数値積分にはガウスの 2 点公式を採用した。

要素剛性マトリクスと要素質量マトリクスから, 全体剛性マトリクス $[K]$ と全体質量マトリクス $[M]$ を求めれば, 減衰を考慮しない積層板の自由振動方程式の離散形は

$$[K]\{\delta\} + [M] \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\delta\} = 0 \quad (7)$$

と表せる。節点変位の時間項を調和関数の周期解 $\{\delta\} = \{\delta_0\} \cos \sqrt{\lambda} \cdot t$ とし, これを式 (7) に代入することにより, 次のような標準固有値問題

$$([K] - \lambda[M])\{\delta_0\} = 0 \quad (8)$$

となる。式 (8) の固有値解法には逆反復法を使用した。

3. 加振実験

試験板には CF/PEEK 一方向積層板 (カーボン繊維強化ポリエーテルエーテル酮, 積層構成 $[0]_8$: x 軸に対して $\theta = 0^\circ$ の角度にカーボン繊維が配向されたプリプレグを 8 層積層したもの) とクロスプライ積層板 (積層構成は下から $[0/90/0/90/90/0/90/0]$ の 8 層積層, 以後 $[0/90]_{2s}$ で略記) を用いた。その形状寸法はつかみ部を含め $300\text{mm} \times 220\text{mm} \times 1\text{mm}$, ただし, 試験領域は $200\text{mm} \times 200\text{mm}$ で板の中央に直径 100mm の円孔を設けた。実験に用いた CF/PEEK 積層材の材料特性値を表 1 に, また実験装置の概略を図 2 に示す。試験板を固定治具に取り付ける際, 試験板の上下はボルトで止め, 左右は固定ブロックに挟み込んで周辺固定の境界条件を実現した。実験は, 試験板の 6 4 点にインパルスハンマーによる面外方向からの加振力を与え, 求めるモードに応じて取り付け位置を変えた加速度センサによって応答加速度を測定した。FFT アナライザを用いて, 得られた加振力と応答加速度から伝達関数を求め, モーダルアナライザに記憶させる。以上の手順を 6 4 点全てにおいて順次行った後, MMDOF 法により計算した最適な理論的伝達関数から試験板の固有振動数と振動モードを求めた。

4. 解析および実験値の比較・検討

本数値解析結果の妥当性を検証するために, 解析値が与えられている無孔の一方向強化積層 $[0]_8$ ⁽¹³⁾ とアングルプライ逆対称積層 $[45/-45]_4$ ⁽²⁾ の CF/PEEK 積層板 ($200\text{mm} \times 200\text{mm} \times 1\text{mm}$) の固有振動数について数値解析を行った。両者の計算結果を比較して表 2 と表 3 に示す。

表 1 CF/PEEK 複合材の材料特性値

Flexural modulus E_{bL}	(GPa)	134
Transverse modulus E_{bT}	(GPa)	12.9
Shearing modulus G_{LT}	(GPa)	6.75
Poisson's ratio ν_{LT}		0.298
Fiber Volume Fraction V_f	(%)	55
Density ρ	(Kg/mm ³)	1.59×10^{-6}
$E_{bL}/E_{bT}=10.4, G_{LT}/E_{bT}=0.52$		

図2 測定システム

2.5要素分割の本数値解析結果と解析解はいずれの境界条件についても良く一致しており、その誤差は最大でも $[45/-45]_4$ 積層板の(1,1)モードの0.66%である。

次に、円孔を有する周辺固定のCF/PEEK積層板について行った加振実験結果と本数値解析結果を比較して一方向強化積層板 $[0]_8$ の場合を表4に、クロスプライ積層板 $[0/90]_{2S}$ の場合を表5にそれぞれ示す。計算値と実験値の差の最も大きいのは、 $[0]_8$ 積層板の(1,1)モードの-5.8%であるが、その他のモードのついての誤差は5%未満で満足する結果を得た。以上の結果より、開孔を有する複合材積層板に対する本解析手法の妥当性が検証された。

5. 固有振動数に及ぼす各種パラメータの影響

次に、円孔を有するCF/PEEK積層板の設計公式を提案するために、各種バランスド積層について、境界条件や開孔部の大きさを変えて行った数値解析の結果を述べる。

表2 各種境界条件の一方向強化無孔積層板 $[0]_8$ の基本固有振動数

Boundary condition	C	C	C	S	S
C:Clamped edge S:Simply supported edge					
Analytical value ⁽¹³⁾ (Hz) (a)	257	250	181	175	122
FEM (25mesh) (Hz) (b)	256	250	181	176	122
Error(%) (a)-(b)/(a)	0.39	0.0	0.0	-0.57	0.0

表3 無孔のアンギュラプライ逆対称積層板 $[45/-45]_4$ の固有振動数 (周辺単純支持)

mode (x,y)	Analytical value ⁽²⁾ (Hz) (a)	FEM(25mesh) (Hz) (b)	Error(%) (a)-(b)/(a)
(1,1)	153	152	0.66
(1,2)&(2,1)	354	354	0.0
(2,2)	610	609	0.16
(1,3)&(3,1)	664	663	0.15

表4 有孔CF/PEEK積層板 ($d/b=0.5$) の固有振動数 (一方向強化積層板 $[0]_8$, 周辺固定の場合)

mode (x,y)	Experimental (Hz) (a)	FEM(25mesh) (Hz) (b)	Error(%) (a)-(b)/(a)
(1,1)	341	361	-5.8
(1,2)	358	367	-2.45
(2,1)	576	586	-1.71
(2,2)	633	649	-2.47
(1,3)	655	678	-3.39

表5 有孔CF/PEEK積層板 ($d/b=0.5$) の固有振動数 (クロスプライ対称積層板 $[0/90]_{2S}$, 周辺固定の場合)

mode (x,y)	Experimental (Hz) (a)	FEM(25mesh) (Hz) (b)	Error(%) (a)-(b)/(a)
(1,1)	411	402	2.24
(1,2)	477	462	3.25
(2,1)	566	542	4.43
(2,2)	689	662	4.08
(1,3)	844	825	2.30

図3 境界条件と基本固有振動数の関係 (固定支持辺と単純支持辺の組み合わせ)

図4 境界条件と基本固有振動数の関係 (単純支持辺と自由支持辺の組み合わせ)

図5 境界条件と基本固有振動数の関係 (固定支持辺と自由支持辺の組み合わせ)

5-1 境界条件の影響 図3～5は、各種境界条件下での有孔CF/PEEK積層板($a/b=1.0$, $d/b=0.5$)について算出した基本固有振動数 f_1 を、同様の境界条件で孔の無い積層板の基本固有振動数 f_0 で正規化し、固有振動数比 f_1/f_0 として示した結果である。

固定支持[C]と単純支持[S]の組み合わせ(図3)では、4辺固定の場合の固有振動数比 f_1/f_0 が最も大きく、開孔の影響によって基本固有振動数が最大60%近くまで高位化している。そして、単純支持辺が増えてくると開孔の影響による f_1/f_0 の高位化の度合いが小さくなるのがわかる。擬似等方性積層材 $[0/90/45/-45]_s$ の場合を例にして、周辺固定支持のときの基本振動モード(図6)と周辺単純支持のときのそれ(図7)を比較すると、単純支持では開孔周りの振幅は大体等しいが、周辺固定においては、 x 軸方向の対称軸上の振幅が他の位置のものより小さくなっており、このことが固有振動数の高位化度の違いに影響を及ぼしていると考えられる。また、4種類の積層構成のなかでは、 $[0]_8$ がどの境界条件においても相対的に f_1/f_0 が低く、逆に $[45/-45]_{2s}$ の f_1/f_0 は他のものより常に大きめである。単純支持[S]と自由支持[F]の組み合わせ(図4)からは、自由支持辺が多くなると開孔の影響で基本固有振動数が低下し、 f_1/f_0 は1以下となることや、積層構成によって若干 f_1/f_0 の変化の傾向が異なることなどがわかる。また、周辺自由支持の場合は積層構成によって振動モードが異なるにも関わらず、 f_1/f_0 はほぼ同程度になった。固定支持[C]と自由支持[F]の組み合わせ(図5)では、自由支持辺の増加に伴って f_1/f_0 が低下する傾向が顕著である。この場合では、積層構成の違いによる f_1/f_0 の有意差は殆ど認められない。

5-2 積層構成の影響 次に、各種積層構成の正方形積層板について、剛性行列のカップリング項が基本固有振動数に及ぼす影響を検討する。図8～図13に、クロスエラスティシティ項やカップリング剛性と曲げ剛性の比 $[\alpha = \sqrt{D_{16}D_{26}} / \sqrt{D_{11}D_{22}}, \beta = h\sqrt{B_{16}B_{26}} / \sqrt{D_{11}D_{22}}, \gamma = hB_{11} / \sqrt{D_{11}D_{22}}]$ と、基本固有振動数 f_1 をクロスエラスティシティ項やカップリング剛性が零となる直交異方性板の基本固有振動数 f_∞ で正規化した値 f_1/f_∞ の関係を、対称積層材[図8と図11]、逆対称アングルプライ積層材[図9と図12]と逆対称クロスプライ積層材[図10と図13]に分け、周辺単純支持と周辺固定条件の場合についてそれぞれ示す。図8～図10の周辺単純支持の場合、破線で表した無孔の積層板の f_1/f_∞ は、剛性係数比 α, β, γ が大きき積層数 n が少いほど低い値となり、いずれも同様の傾向を示す。しかし、実

図6 周辺固定支持の場合の基本振動モード
(疑似等方性積層 $[0/90/45/-45]_s$ の場合)

図7 周辺単純支持の場合の基本振動モード
(疑似等方性積層 $[0/90/45/-45]_s$ の場合)

図8 剛性係数比 α と基本固有振動数の関係
(周辺単純支持対称積層の場合)

図9 剛性係数比 β と基本固有振動数の関係
(周辺単純支持逆対称アングルプライ積層の場合)

線で示した開孔比 $d/b=0.5$ の有孔積層板では、 f_1/f_∞ の変化の傾向が積層形式によって異なる。すなわち、対称積層(図8)と逆対称アングルプライ積層(図9)のときは、4層以上の積層板で α や β に伴う f_1/f_∞ の増大が認められる。これに対して、逆対称クロスプライ積層(図10)のときは、どの積層数でも γ が増すに連れて f_1/f_∞ が低下している。

また周辺固定支持の場合(図11~図13)は、 f_1/f_∞ の変化の傾向が単純支持のときと異なってくるものが多い。無孔の対称積層板(図11)の f_1/f_∞ は、 α や積層数の変化に対する低下の度合いが小さいが、有孔アングルプライ対称積層板(実線)では α が増すに連れて f_1/f_∞ も高くなる傾向である。逆対称アングルプライ積層板(図12)の f_1/f_∞ は、周辺単純支持のときと似通った傾向を示し、 $n=4$ 以上の有孔積層板では、 β に比例して f_1/f_∞ も大きくなる。逆対称クロスプライ積層板(図13)では、円孔の有無に関わらず、積層数による違いが顕著であるが、 γ は f_1/f_∞ にほとんど影響を与えないことがわかる。

5-3 開孔の大きさの影響

次に、円孔の大きさが基本固有振動数に及ぼす影響を各種積層構成で比較するために、円孔の直径 d を板の辺長 b で正規化した値 d/b と基本固有振動数比 f_1/f_0 の関係を、周辺単純支持の場合は図14に、周辺固定の場合は図15にそれぞれ示す。周辺単純支持の正方形板の場合は、剛性比 α や β が大きくなる積層構成の $[45/-45]_{2s}$ 、 $[45/-45]_4$ 、 $[(45)_4/(-45)_4]$ では、 d/b に比例して f_1/f_0 の増大傾向が最も顕著である。逆に開孔の影響が小さいのは $\alpha=\beta=0$ となる、 $[0]_8$ 、 $[0/90]_{2s}$ 、 $[0/90]_4$ の積層構成である。またカップリング剛性係数 B_{11} が支配的となる $[(0)_4/(90)_4]$ も d/b に伴う f_1/f_0 の増大量が比較的大きくなる。一方、図15の周辺固定の場合、対称、非対称に関わらず、クロスプライと疑似等方性積層板では、 d/b に比例した f_1/f_0 の増大がかなり顕著であり、 $d/b=0.7$ では無孔の場合の約3倍まで基本固有振動数が高位化する。これに対して、 $[0]_8$ の積層構成の f_1/f_0 の増大量は相対的に小さいが、それでも単純支持の場合と比べると増大量が大きくなる。また、 $[45/-45]_4$ の積層構成の開孔の影響は、前述の2通りの場合の間になる。

6. 結 論

円孔を有する先端複合材料積層板の振動特性を調べるために、積層板の面外せん断変形を考慮した有限要素法による数値解析の定式化を行い、CF/PEEK積層板のインパルス加振実験によって解析結果の妥当性を検討

図10 剛性係数比 γ と基本固有振動数の関係
(周辺単純支持逆対称クロスプライ積層の場合)

図11 剛性係数比 α と基本固有振動数の関係
(周辺固定対称積層の場合)

図12 剛性係数比 β と基本固有振動数の関係
(周辺固定逆対称アングルプライ積層の場合)

した。さらに、各種の境界条件や積層構成を有する有孔複合材積層板についての固有振動数と振動モードを算定して、開孔や形状比の影響を検討し、以下に示す主要な結論を得た。

(1) 本数値計算結果は、無孔の複合材積層板の固有振動数に関する従来の解析解や円孔を有するCF/PEEK積層板のインパルス加振実験結果と一致し、ここで定式化した数値解析手法は複合材積層板の固有値解析に対して有用であることを示した。

(2) 有孔積層板では、固定支持辺を多く有する境界条件のときは、孔の無い場合よりも基本固有振動数は高くなり、単純支持辺が多くなると円孔の有無による基本固有振動数の変化は小さくなる。また、自由支持辺が多くなると、基本固有振動数は無孔積層板より有孔積層板のほうが低くなることを判明した。

(3) 対称積層の場合、周辺単純支持及び固定支持の無孔積層板の基本固有振動数 f_1 は、クロスエラスティシティー剛性 α の大きさに拘わらず、直交異方性の場合の値 f_∞ よりも小さくなる。一方、周辺固定有孔積層板の f_1 は逆に f_∞ よりも大きくなる。

(4) 逆対称アングルプライ積層の場合、対称積層板と同じように無孔の f_1 は常に f_∞ よりも小さくなり、周辺固定の有孔積層板の f_1 は大きくなる。周辺単純支持の場合の f_1 は、積層数 n が2までは f_∞ よりも小さくなるが、4以上では逆に f_1 は f_∞ よりも大きくなる。

(5) 逆対称クロスプライ積層の場合、両境界条件の無孔積層板と周辺固定の有孔積層板の f_1 は対称積層、逆対称アングルプライ積層の場合と同じ結果を与えるが、周辺単純支持の有孔積層板の f_1 は $n=8$ と4で γ が小さい場合のみ f_∞ よりも大きくなる。

(6) 周辺単純支持の場合は、積層板の基本固有振動数に及ぼす開孔の大きさの影響が積層構成によって異なる。剛性係数比 α , β , γ が大きい積層構成ほど、開孔による基本固有振動数の変化が大きく、剛性係数比が小さいものの固有振動数の変動は相対的に小さい。また、周辺固定の場合は、 $[0]_8$ 積層以外の積層構成による有意差はあまりみられず、 $[0]_8$ 積層のみが開孔の影響が小さいが、それでも単純支持の場合よりも固有振動数の変動は大きくなる。

参考文献

- (1) A.K.Noor and W.S.Burton, *ASME. Appl. Mech. Rev.*, **42**-1 (1989),1
- (2) R.M.Jones, *Mechanics of Composite Materials*, (1975), Scripta Book Co.
- (3) N.D.Plan and J.N.Reddy, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **21** (1985),2201
- (4) 福永久雄・平野陽一, *材料システム*, **3**(1984),135
- (5) R.F.Hegarty and T.Ariman, *Int. J. Solids Struct.*, **11**(1975),895
- (6) 高橋伸, *機論*, **24**-139(1958),183

- (7) C.V.Joga Rao and G.Pickett, *J.Aero.Soc.India*, **13**-3(1961),83
- (8) A.S.Bicos and G.S.Springer, *Int. J. Solids Struct.*, **25**-2(1989),129
- (9) A.S.Bicos and G.S.Springer, *AIAA J.*, **27**-8(1989),1116
- (10) S.Ramakrishna et al, *Composite Structures*, **21**(1992),177
- (11) Y.Aoki and G.Ben, *Proceeding of ICCM/9,4* (1993),277
- (12) J.R.Vinson and R.L.Sierakowski, *The Behavior of Structures Composed of Composite Materials*, (1986), Martinus Nijhoff Publ.
- (13) J.E.Ashton and J.M.Whitney, *Theory of laminated plate*, (1970), Technomic Publ.

図13 剛性係数比 γ と基本固有振動数の関係 (周辺固定逆対称クロスプライ積層の場合)

図14 開孔比 d/b と基本固有振動数の関係 (周辺単純支持の場合)

図15 開孔比 d/b と基本固有振動数の関係 (周辺固定の場合)