二重層ポテンシャル法の定式化に関する一考察*

荒井 政大^{*1}, 足立 忠晴^{*1}, 松本 浩之^{*1}

Formulation of Double-Layer Potential Method

Masahiro ARAI, Tadaharu ADACHI and Hiroyuki MATSUMOTO

In this paper, some regularized boundary integral formulations of the double-layer potential method are presented for two-dimensional classical potential problems. Some known particular solutions are superposed on the conventional integral representations so that the cauchy principal value integrals for the potential and the hyper-singular integrals for its derivatives in the original integral representations are regularized. Moreover, in order to extend this approach to external problems, the boundary integral equations formulated for the unit source distribution along the boundary are also presented. The singular elements are employed to approximate accurately the singular behaviour of the potential near the corners. Some numerical calculations are carried out for typical models and is shown that the results, especially the singular distributions of the potential gradients around the corners, are obtained with high accuracy.

Key Words: Boundary Element Method, Numerical Analysis, Computational Mechanics, Heat Conduction, Potential Flow, Potential Problems, Regularization

1. 緒 言

二重層ポテンシャル法⁽¹⁾は境界上に二重極 (Doublet) を分布させることにより解析領域の場を決定する数値解法であり, 単一層ポテンシャル法, および境界要素法 (直接法) と並んで積分方程式法の代表的解法の一つである。

この解法は, 翼まわりのポテンシャル流れなどに代表される境界が閉じていない系を直接取り扱うことが可能である。西谷ら⁽²⁾による集中力対を用いた体力法や, Nishimura⁽³⁾らの動弾性問題に対する定式化にみられるように, き裂の解析に対して極めて有効な解法として注目されてきた。また岸田らは密度関数を仮想境界に分布させる間接仮想境界積分法に対し二重層ポテンシャルを用いた定式化を示している⁽⁴⁾⁽⁵⁾⁽⁶⁾。

二重層ポテンシャル法における解法上の難点として, Neumann 型境界条件を既定する際に超特異積分方程式を取り扱わねばならない点が挙げられる。この超特異積分の評価法として, 高久田ら⁽⁷⁾は Hadamard の有限部分積分の概念に基づいて処理する方法を示している。Rudolphi ら⁽⁸⁾および Krishnasamy ら⁽⁹⁾は被積分関数の Taylor 展開の低次項を差し引く操作により積分方程式の正則化を行った。また松本ら⁽¹⁰⁾は有限部分積分公

式を用いて超特異積分を直接評価する方法を提案している。しかしながら, 現時点で提案されている手法によっても特異積分の処理を含めた離散化の取り扱い境界要素法 (直接法) と比べてもはるかに複雑な手続きを要する。加えて任意の角度を持つ境界の離散化法や外部問題の対応など未解決の課題も多く, 二重層ポテンシャル法の汎用的な定式化を確立することは重要であると考えられる。

そこで本研究では, 二次元問題に対する二重層ポテンシャル法の汎用的な定式化を図ることを目的として以下に示す課題の検討を行う。まず特異積分の処理に対し, 境界上で恒等的に成立する条件式との重ね合わせによる方法⁽¹¹⁾⁽¹²⁾⁽¹³⁾を用いて Rudolphi らと同様の原理に基づく正則化処理を行い, さらに Ghosh⁽¹⁴⁾らによる部分積分の手法を導入して開境界をも取り扱える一般的な表示式を導出する。また, 二重層ポテンシャル法により外部問題を解析する手段として, 単一極分布を用いて積分方程式を修正する方法について明らかにする。さらに角点近傍での導関数の特異性を表現するため, 二重極分布を精度よく近似するための特異要素について検討する。最後に種々の境界値問題について解析結果を示し, 本定式化の有効性を明らかにする。

* 原稿受付 平成 6 年 8 月 3 日。

^{*1} 正員, 東京工業大学工学部 (〒152 東京都目黒区大岡山2-12-1)。

2. 理 論

2.1 二重層ポテンシャル法の定式化 解析領域を Ω , その境界を Γ とする (図 1). 領域 Ω 内で連続なポテンシャル u が Laplace 方程式を満たすものとすれば, Green の公式により, 境界上のソース点 P におけるポテンシャル $u(P)$ は境界上の積分点 Q におけるポテンシャル $u(Q)$ およびフラックス $q(Q)$ と次式のように関係づけられる.

$$C(P)u(P) + \text{vp} \int_{\Gamma} q^*(P, Q)u(Q)d\Gamma = \int_{\Gamma} u^*(P, Q)q(Q)d\Gamma \quad (P \in \Gamma) \quad (1)$$

ただし, $q = \partial u / \partial n$ であり, n は境界外向き法線方向を表す. $C(P)$ はソース点の位置に関する不連続関数であり, $\gamma/2\pi$ (図 2 参照) である. また, 'vp' は Cauchy の主値積分を意味する. 基本解 $u^*(P, Q)$ は点 Q に単一極 (Unit Source) が作用する場合の点 P におけるポテンシャルであり, 以下の基礎式を満足する.

$$\nabla^2 u^*(P, Q) + \delta(P, Q) = 0 \quad (2)$$

ここに δ は Dirac の Delta 関数である. 二次元問題の場合の核関数 $u^*(P, Q)$, $q^*(P, Q)$ は具体的に次式で表される. なお r は PQ 間の距離である.

$$\left. \begin{aligned} u^*(P, Q) &= -\frac{1}{2\pi} \ln r \\ q^*(P, Q) &= -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

外部の無限領域 $\bar{\Omega}$ に関しても, Green の公式に基づき境界上の点 P のポテンシャルに関する以下の積分方程式が成立する.

$$\bar{C}(P)\bar{u}(P) + \text{vp} \int_{\Gamma} \bar{q}^*(P, Q)\bar{u}(Q)d\Gamma = \int_{\Gamma} \bar{u}^*(P, Q)\bar{q}(Q)d\Gamma \quad (P \in \Gamma) \quad (4)$$

ただし上式における境界 Γ 上の方向余弦は式 (1) に対するものと逆向きであり, $\bar{C}(P) = 1 - C(P)$ である.

ここで, 内部領域 Ω に関する積分方程式 (1) と外部領域 $\bar{\Omega}$ に関する積分方程式 (4) との和をとれば,

$$\begin{aligned} C(P)u(P) + \bar{C}(P)\bar{u}(P) \\ + \text{vp} \int_{\Gamma} q^*(P, Q)\{u(Q) - \bar{u}(Q)\}d\Gamma \\ = \int_{\Gamma} u^*(P, Q)\{q(Q) + \bar{q}(Q)\}d\Gamma \end{aligned} \quad (5)$$

ただし $u^* = \bar{u}^*$ および $q^* = -\bar{q}^*$ を考慮した. 上式において, $q(Q) + \bar{q}(Q) = 0$ とし, さらに $u(Q) - \bar{u}(Q) = \varphi(Q)$ なる置き換えを行えば以下の積分方程式を得る.

図 1 座標系と使用記号

$$u(P) = \bar{C}(P)\varphi(P) - \text{vp} \int_{\Gamma} q^*(P, Q)\varphi(Q)d\Gamma \quad (6)$$

上式が二重層ポテンシャル (Double layer potential) に関する積分表示であり, φ は境界上に分布する二重極 (doublet) の分布密度となる⁽¹⁾.

さらに, 式 (6) を座標 x_i で微分し, 点 P における方向余弦 $n_i(P)$ を乗ずることにより, フラックス $q(P)$ に関する積分方程式を得る. なお, 記号 'pf' は発散積分の有限部分を意味するものとする.

$$q(P) = -\text{pf} \int_{\Gamma} q_{,i}^*(P, Q)n_i(P)\varphi(Q)d\Gamma \quad (7)$$

二重層ポテンシャル法では, ポテンシャル u が既知である境界上で式 (6) を, フラックス q が既知である境界上では式 (7) を用いて境界条件を与え, 最終的に未知関数 $\varphi(Q)$ に関する代数方程式に帰着させる. しかしながら, 一般的には式 (6) 中の Cauchy の主値積分, および式 (7) 中の超特異積分を数値的にどう評価するかが重要である. そこで本報では, 次節に示すようにあらかじめ積分方程式を正則化した上で離散化する.

2.2 特異積分の処理 まず始めにポテンシャルに関する表示式 (6) に含まれる Cauchy の主値積分を以下のような手順で正則化する. この場合, ソース点 P を含む部分境界 Γ_P (図 3) に関する以下の特異積分の処理について考えればよい.

$$I_1 = \int_{\Gamma_P} q^*(P, Q)\varphi(Q)d\Gamma \quad (8)$$

ここで基本解 $u^*(P, Q)$ の基礎式 (2) を参照して以下のような恒等式を考える.

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u^*(P, Q)d\Omega = -1 \quad (P \in \Omega) \quad (9)$$

左辺に Gauss の発散定理を適用したのち, $P \rightarrow \Gamma$ の極限を取れば次式を得る.

$$C(P) + \text{vp} \int_{\Gamma} q^*(P, Q)d\Gamma = 0 \quad (10)$$

図2 角点近傍の座標系と使用記号

上式は一般に等ポテンシャル条件⁽¹¹⁾と呼ばれる式であり、境界 Γ が閉曲線である場合に限り恒等的に成立する。

ここで、Ghosh⁽¹⁴⁾らに従い、核関数 $q^*(P, Q)$ を以下のように書き換える。

$$q^*(P, Q) = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \quad (11)$$

式(10)において、式(11)に従い部分境界 Γ_P 以外の部分を解析的に積分すれば、等ポテンシャル条件が以下のように書き換えられる。

$$C(P) + \text{vp} \int_{\Gamma_P} q^*(P, Q) d\Gamma + [V^*(P, Q)]_{Q_2}^{Q_1} = 0 \quad (12)$$

ただし、

$$[f(Q)]_{Q_2}^{Q_1} = f(Q_1) - f(Q_2) \quad (13)$$

$$V^*(P, Q) = -\frac{\alpha}{2\pi} \quad (14)$$

であり、 Q_1, Q_2 は部分境界 Γ_P の端点である。式(12)に $\varphi(P)$ を乗じ、式(8)との差をとることにより、境界 Γ_P に関する特異積分 I_1 は以下のように正則化される。

$$I_1 = \int_{\Gamma_P} q^*(P, Q) \{ \varphi(Q) - \varphi(P) \} d\Gamma - [V^*(P, Q)]_{Q_2}^{Q_1} \varphi(P) - C(P) \varphi(P) \quad (15)$$

上式において、核関数 $q^*(P, Q)$ の係数項は、

$$|\varphi(Q) - \varphi(P)| \rightarrow O(r) \quad (|PQ| = r \rightarrow 0) \quad (16)$$

であるから、積分核 $q^*(P, Q)$ の特異性 $O(1/r)$ が一階キャンセルされることがわかる。式(6)の境界 Γ_P に対応する積分を式(15)で置き換えれば、正則化された積分方程式は次式のように表される。

$$u(P) = \varphi(P) - \int_{\Gamma - \Gamma_P} q^*(P, Q) \varphi(Q) d\Gamma - \int_{\Gamma_P} q^*(P, Q) \{ \varphi(Q) - \varphi(P) \} d\Gamma + [V^*(P, Q)]_{Q_2}^{Q_1} \varphi(P) \quad (17)$$

式(17)における境界 Γ_P はソース点が内部に位置する限り任意であるが、境界 Γ が閉境界である場合には Γ_P を境界全体に対応させることが可能であり、この場合には部分境界 Γ_P の端点 Q_1, Q_2 に関する不連続項は消失する。

図3 部分境界 Γ_P

なお、Ghosh⁽¹⁴⁾らの定式化と同様、上式の境界積分第二項をさらに部分積分することにより得られる次式を離散化してもよい。

$$u(P) = \varphi(P) - \int_{\Gamma - \Gamma_P} q^*(P, Q) \varphi(Q) d\Gamma + \int_{\Gamma_P} V^*(P, Q) \frac{\partial \varphi(Q)}{\partial t} d\Gamma + [V^*(P, Q) \varphi(Q)]_{Q_2}^{Q_1} \quad (18)$$

次に、ポテンシャル勾配の積分方程式に含まれる超特異核の処理について考える。基本解の基礎式(2)より領域 Ω に関する以下のような恒等式を考える。

$$\int_{\Omega} r_k(P, Q) t_k(P) \nabla^2 u^*(P, Q) d\Omega = 0 \quad (19)$$

ただし、 $r_k(P, Q)$ はソース点 P に対する積分点 Q の相対位置ベクトルであり、 $t_k(P)$ は点 P における単位境界接線ベクトルである。上式をGreenの公式を用いて変形すれば以下の表示式を得る。

$$\int_{\Gamma} \left\{ q^*(P, Q) r_k(P, Q) t_k(P) - u^*(P, Q) n_k(Q) t_k(P) \right\} d\Gamma = 0 \quad (20)$$

ここで、上式の被積分関数が以下のように書き換えられることに着目する。

$$\left. \begin{aligned} q^*(P, Q) r_k(P, Q) t_k(P) \\ - u^*(P, Q) n_k(Q) t_k(P) &= \frac{\partial W^*(P, Q)}{\partial t} \\ W^*(P, Q) &= \frac{1}{2\pi} r (1 - \ln r) \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

先の場合と同様に式(20)の積分区間を Γ_P とそれ以外の部分に分け、 Γ_P 以外の境界に関する積分を上式に従い解析的に処理すれば以下の条件式が導かれる。

$$\int_{\Gamma_P} \left\{ q^*(P, Q) r_k(P, Q) t_k(P) - u^*(P, Q) n_k(Q) t_k(P) \right\} d\Gamma + [W^*(P, Q)]_{Q_2}^{Q_1} = 0 \quad (22)$$

上式に $\partial\varphi(Q)/\partial t|_P$ を乗じたのち式 (17) に加えれば次式を得る.

$$\begin{aligned} u(P) = & \varphi(P) - \int_{\Gamma-\Gamma_P} q^*(P, Q)\varphi(Q)d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma_P} q^*(P, Q)\left\{\varphi(Q) - \varphi(P) \right. \\ & \quad \left. - r_k(P, Q)t_k(P)\frac{\partial\varphi(Q)}{\partial t}\Big|_P\right\}d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma_P} u^*(P, Q)n_k(Q)t_k(P)\frac{\partial\varphi(Q)}{\partial t}\Big|_P d\Gamma \\ & + \left[V^*(P, Q)\varphi(P) + W^*(P, Q)\frac{\partial\varphi(Q)}{\partial t}\Big|_P\right]_{Q_2}^{Q_1} \quad (23) \end{aligned}$$

上式をさらに座標 x_i で微分することにより, ポテンシャル勾配 $u_{,i}(P)$ に関する表示式を得る. ただし, Γ_P は滑らかであるものとする.

$$\begin{aligned} u_{,i}(P) = & \varphi_{,i}(P) - \int_{\Gamma-\Gamma_P} q_{,i}^*(P, Q)\varphi(Q)d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma_P} q_{,i}^*(P, Q)\left\{\varphi(Q) - \varphi(P) \right. \\ & \quad \left. - r_k(P, Q)t_k(P)\frac{\partial\varphi(Q)}{\partial t}\Big|_P\right\}d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma_P} u_{,i}^*(P, Q)n_k(Q)t_k(P)\frac{\partial\varphi(Q)}{\partial t}\Big|_P d\Gamma \\ & + \left[V_{,i}^*(P, Q)\varphi(P) + W_{,i}^*(P, Q)\frac{\partial\varphi(Q)}{\partial t}\Big|_P\right]_{Q_2}^{Q_1} \quad (24) \end{aligned}$$

上式において, $r \rightarrow 0$ の極限を考えれば,

$$\left|\varphi(Q) - \varphi(P) - r_k(P, Q)t_k(P)\frac{\partial\varphi(Q)}{\partial t}\Big|_P\right| \rightarrow O(r^2) \quad (25)$$

であるから, 二重極密度の接線勾配 $\partial\varphi(Q)/\partial t$ がソース点 P において Hölder 連続であれば $q_{,i}^*$ の特異性 $O(1/r^2)$ が二階キャンセルされ, 超特異積分が正則化されることがわかる.

なお, 式 (18) と同様, 上式の境界 Γ_P に関する積分項をさらに部分積分した次式を用いてもよい.

$$\begin{aligned} u_{,i}(P) = & \varphi_{,i}(P) - \int_{\Gamma-\Gamma_P} q_{,i}^*(P, Q)\varphi(Q)d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_P} V_{,i}^*(P, Q)\left\{\frac{\partial\varphi(Q)}{\partial t} - n_k(Q)n_k(P)\frac{\partial\varphi(Q)}{\partial t}\Big|_P\right\}d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma_P} u_{,i}^*(P, Q)n_k(Q)t_k(P)\frac{\partial\varphi(Q)}{\partial t}\Big|_P d\Gamma \\ & + \left[V_{,i}^*(P, Q)\varphi(Q) + R_{,i}^*(P, Q)\frac{\partial\varphi(Q)}{\partial t}\Big|_P\right]_{Q_2}^{Q_1} \quad (26) \end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned} R_{,i}^*(P, Q) = & V_{,i}^*(P, Q)r_k(P, Q)t_k(P) \\ & + W_{,i}^*(P, Q) \quad (27) \end{aligned}$$

である. フラックス $q(P)$ および境界接線方向へのポテンシャル勾配に関する積分方程式は, ソース点 P における方向余弦 $n_i(P)$ ないしは単位接線ベクトル $t_i(P)$ を

式 (24), (26) の両辺に乘じることによりそれぞれ求められる. ただし, 厳密には式 (24) および式 (26) はソース点 P において $\partial\varphi(Q)/\partial t$ が Hölder 連続でなければ成立しない. それゆえ通常の高次適合要素で離散化する場合要素間の節点上で, 勾配 $\partial\varphi(Q)/\partial t$ が不連続となる問題が生ずる.

本報では, $\partial\varphi(Q)/\partial t$ を $\varphi(Q)$ に関する補間多項式を数値微分することにより求めており, 2 要素間の節点では両側の要素で求められた値の平均値を用いている. 後述の計算結果に示されているように, 未知関数 $\varphi(Q)$ の決定に際して Neumann 型 ($q = \hat{q}$) 境界条件を既定する場合はこの方法により十分に収束性の高い解が得られる.

ただし, すべての節点関数 $\varphi(Q)$ が求められた後に改めて境界上の物理量を算出する場合, 境界条件が Dirichlet 型 ($u = \hat{u}$) で与えられた 2 要素間の節点では, フラックスの計算精度が離散化誤差に極めて敏感となる. ゆえにこのような節点上のフラックスを算出することは避けた方がよい.

3. 外部問題の取り扱い

境界上に分布する密度 $\varphi(Q)$ なる二重極が生成する二重層ポテンシャルは無限遠方において, 二次元の場合 $O(1/r)$, 三次元の場合 $O(1/r^2)$ の漸近特性を示し, 任意の閉曲面 (閉曲線) Γ 上でフラックスの総和を求めれば常に次式

$$\int_{\Gamma} q(Q)d\Gamma = 0 \quad (28)$$

が成立する. しかしながら, 外部領域問題でのポテンシャルは一般に無限遠方で二次元の場合 $O(\ln r)$, 三次元の場合 $O(1/r)$ なる性質を有し, 必ずしも式 (28) を満足しない. すなわち, 境界上に分布する二重極の分布 $\varphi(Q)$ をどのように選んでも無限領域のポテンシャル場を表現し得ない場合が存在する.

この問題の解決法として, 以下のような三通りの方法が考えられる.

1. 補助領域 (内部領域) の任意の点に単一極を配置する方法.
2. 補助領域に密度一定の単一極分布を与える方法.
3. 境界上に密度一定の単一極分布を与える方法.

上記 (1) の方法は最も簡便であるが, 単一極の位置に関して任意性が生じるため, 一般的な定式化には不向きである. そこで本報では残る (2), (3) の方法のうち, 単

一層ポテンシャル法による理論展開の比較的容易な (3) の方法について考察する。

閉境界 Γ 上に一定密度 $\rho(Q)$ なる単一極を分布させた場合、単一層ポテンシャル法の議論に従えば、内部の補助領域 $\bar{\Omega}$ 内および境界 Γ 上のポテンシャルは一定値をとり、結果的に次式の積分方程式が成立する。

$$\int_{\Gamma} u^*(P, Q) \rho_0 d\Gamma = u_0 \text{ (Const.)} \quad (29)$$

$$\int_{\Gamma} u_{,i}^*(P, Q) n_i(P) \rho_0 d\Gamma = \rho_0 \text{ (Const.)} \quad (30)$$

ここで、 u_0 は一般に未知であることに注意しなければならない。

外部領域 Ω および境界 Γ 上で定義されるポテンシャル場 u が、密度 $\varphi(Q)$ で分布する二重極と密度 ρ_0 で一様に分布する単一極による重ね合わせで表現されるとすれば、外部領域に対応するポテンシャル $u(P)$ およびフラックス $q(P)$ は以下のような積分方程式で表される。

$$u(P) = -vp \int_{\Gamma} q^*(P, Q) \varphi(Q) d\Gamma + \rho_0 \int_{\Gamma} u^*(P, Q) d\Gamma \quad (31)$$

$$q(P) = -pf \int_{\Gamma} q_{,i}^*(P, Q) n_i(P) \varphi(Q) d\Gamma + \rho_0 \quad (32)$$

外部問題の解析では、式 (31) および式 (32) を用いて境界条件を与え、未知量である $\varphi(Q)$ と ρ_0 に関する代数方程式に帰着させればよい。

なお、外部問題では二重極の密度 $\varphi(Q)$ が同次解を含んだ形でしか一意的に定まらないため、通常は特定の節点における $\varphi(Q)$ を既知量 (例えば 0) として与える。ただし ρ_0 が未知となるため、ソース点については内部問題と同様、すべての節点に設置する必要がある。

4. 特異要素

弾性解析でよく知られているように、境界の内角が $\pi < \gamma < 2\pi$ の範囲にある場合は角点近傍の導関数 (フラックス, 応力) が特異となる (図 2)。また、境界が滑らかな場合であっても境界条件が不連続である場合には同様に特異性の問題が生ずる。ポテンシャル問題の場合、角点近傍でのポテンシャル u は一般に以下の形に級数展開されることが知られている⁽¹⁶⁾。

$$u(r, \theta) = u_{r=0} + \sum_{i=1}^{\infty} a_i r^{i\pi/\gamma} \cos \frac{i\pi\theta}{\gamma} \quad (33)$$

すなわち、 $\gamma > \pi$ ならば、 $r \rightarrow 0$ の極限において、ポテンシャル勾配 $u_{,i}$ は特異となる。

この問題に対し、有限要素法ないしは境界要素法では

図 4 特異要素と無次元座標

既に種々の特異要素が提案されているが、本報では任意の特異性の次数に対応するポテンシャル分布を精度よく表現するため、Tanaka ら⁽¹⁵⁾の特異要素を参考にポテンシャル問題に対応する特異要素を導出する。

式 (33) より角点を含む要素上のポテンシャルは、

$$u(r) = A_0 + A_1 r^{\pi/\gamma} + A_2 r^{2\pi/\gamma} + A_3 r^{3\pi/\gamma} + \dots \quad (34)$$

と表される。ただし、 γ が 2π に近づくにつれ式 (33) の級数部は奇数項がより支配的となり、 $\gamma = 2\pi$ の場合には偶数項がすべて消失する。本報ではこの点を考慮し、 $\pi \leq \gamma \leq 2\pi$ の範囲に対して同型の要素を用いることを想定して次式、

$$u(r) = A_0 + A_1 r^{\pi/\gamma} + A_2 r^{\pi/\gamma+1} \quad (35)$$

で表される 2 次の離散化要素を考える。 $\pi/\gamma = \lambda$ とし、無次元座標上で表せば、

$$u(\xi) = a_0 + a_1(\xi+1)^\lambda + a_2(\xi+1)^{\lambda+1} \quad (36)$$

ただしここでは、節点 1 ($\xi = -1$) を角点とおいた。

節点 1 ($\xi = -1$) で $u(\xi) = u_1$ 節点 2 ($\xi = 0$) で $u(\xi) = u_2$ さらに節点 3 ($\xi = 1$) で $u(\xi) = u_3$ なる条件のもとで式 (36) の係数 a_0, a_1, a_2 を決定し、さらに u_1, u_2, u_3 に関して整理すれば、無次元座標におけるポテンシャル $u(\xi)$ は以下のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \phi_1(\xi) &= A(\xi) \{ 2^{\lambda+1} - 2^\lambda \\ &\quad + (1 - 2^{\lambda+1})(\xi+1)^\lambda \\ &\quad + (2^\lambda - 1)(\xi+1)^{\lambda+1} \} \\ \phi_2(\xi) &= A(\xi) \{ 2^{\lambda+1}(\xi+1)^\lambda \\ &\quad - (2^\lambda - 1)(\xi+1)^{\lambda+1} \} \\ \phi_3(\xi) &= A(\xi) \{ -(\xi+1)^\lambda \\ &\quad + (\xi+1)^{\lambda+1} \} \\ &\quad (A(\xi) = \frac{1}{2^{\lambda+1} - 2^\lambda}) \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

$$u(\xi) = \phi_1(\xi)u_1 + \phi_2(\xi)u_2 + \phi_3(\xi)u_3 \quad (38)$$

図5 解析モデル (1)

図6 境界上のフラックス q_y の解析精度 (図5:O-A)

なお $\xi = 1$ の節点3が角点となる場合の内挿関数は、上式の $\xi + 1$ を $1 - \xi$ で置き換え、 $\phi_1(\xi)$ と $\phi_3(\xi)$ を入替えることにより得られる。

角点を含む要素上では、解析領域 Ω もしくは補助領域 $\bar{\Omega}$ に対応するポテンシャルが必ず式 (33) の分布に従う。すなわち、角点を含む要素上での $\varphi(Q) = u(Q) - \bar{u}(Q)$ の内挿に対して上記の特異要素を用いればよい。また、境界が滑らかであってもフラックスの分布が不連続となる場合にはその前後の要素に対し特異要素による離散化を施す必要がある。

5. 考 察

5.1 特異要素の精度検討 まず始めに特異要素の有効性を確認するため、図5に示される正方形領域でフラックスが一様な系の解析を行った。図6は角点を含む特異要素内のフラックス q_y の誤差分布であり、特異要素中のパラメータ λ を 1.0 から 0.6 まで変化させた場合の結果を示してある。

一般の2次要素に相当する $\lambda = 1.0$ の結果に示されるように、特異性のオーダーを正しく与えない限り精度のよい解は期待できないことがわかる。 $\lambda = 2/3$ で最良の精度を得ていることから、特異要素により角点近傍の二重極分布を精度よく近似できることが確かめられる。

図7 解析モデル (2)

図8 境界上のフラックス q_y の分布 (図7:A-B)

5.2 外部問題 次に外部問題の解析結果について示す。正方形境界を有する外部問題 (図7) について、辺 A-B 上のフラックス q_y の解析結果を図8に示した。なお、無限遠方におけるポテンシャルの条件として、 $u(r) \propto \ln(r/10a)$ を仮定し、基本解 u^* を、

$$u^*(P, Q) = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{r}{10a} \quad (39)$$

に置き換えている。

また、図中の参考値は境界要素法 (直接法) による解析結果であり、角点前後の要素に対し、Tanaka⁽¹⁵⁾ らによる応力型の特異要素を用いた。両者の結果とも若干の離散化誤差が認められるものの、ほぼ同レベルの結果が得られていることから、本報で示した方法により妥当な結果を得ているものと判断できる。

5.3 滑らかな境界上に特異点を有する問題 次に図9に示すように滑らかな境界上に特異点を有する系について解析を行った。角部に隣接する要素、ならびに特異点 (図9-A) の前後にのみ特異要素で離散化した。

表1は、 x 軸上 (A-B) におけるポテンシャルの解析結果であり、比較可能な点について等角写像法による Whiteman⁽¹⁷⁾ らの解と比較した。本解析の結果は、要素分割が比較的粗いにも関わらず、等角写像法による結果にはほぼ一致した結果が得られている。なお、参考までに

図9 解析モデル (3)

表1 境界上のポテンシャル u の分布 (図9:A-B)

x	u	
	Present	Whiteman et.al ⁽¹⁷⁾
7.25	575	576
7.50	609	609
7.75	634	635
8.00	656	656
9.00	728	728
11.00	844	844
13.00	949	949

図10 x 軸上のフラックス q_y の分布 (図9)

x 軸上のフラックス q_y についての解析結果を図10に示しておく。

5.4 翼まわりの完全流体の流れ 次に、開いた境界に対する解析の一例として、一様流速の完全流体中における平板翼 (図11) および円弧翼 (図14) の問題について解析を行った。翼上の擾乱ポテンシャルの分布を図12、図15に、また翼上面における接線方向流速の解析結果を図13および図16にそれぞれ示し、複素速度ポテンシャルにより求めた厳密解と比較した。

平板翼、円弧翼の両者とも厳密解にほとんど一致した解析結果が得られており、翼端で無限大となる流速分布が精度よく得られていることが確かめられる。

図11 解析モデル (4)

図12 境界上の擾乱ポテンシャル φ の分布 (図11) 図13 境界上の流速 V_x の分布 (図11)

6. 結 論

二次元問題に対する二重層ポテンシャル法の定式化について種々の改良を行うと共に、解析結果を示して一連の考察を行った。以下に本研究の結論をまとめる。

1. 境界上で恒等的に成立する条件式との重ねあわせにより二重層ポテンシャル法で用いる積分方程式を正則化し、通常の高次要素を用いた離散化で十分に高精度な結果を得た。
2. 二重極とともに一定密度の単一極を境界上に分布させる方法により二重層ポテンシャル法の外部領域問題への適用を可能とした。

図 14 解析モデル (5)

図 15 境界上の撓乱ポテンシャル φ の分布 (図 14) 図 16 境界上の流速 V_s の分布 (図 14)

3. 角部および境界条件の不連続部における二重極を内挿するための特異要素を導出し、その有効性を確認した。
4. 特異性を有する種々の境界値問題に対し本解析法を適用し、その有効性を確認した。

なお、本解析法は二重層ポテンシャル法の定式化として、任意境界を有する二次元単連結領域への解析法を述べているに過ぎない。残された課題として、三次元問題における積分方程式の正則化法および多重連結領域に対する定式化等が挙げられる。これらの問題について今後さらに検討することが重要であると思われる。

文 献

- (1) Jaswon, M.A. and Symm, G.T., *Integral Equation Methods in Potential Theory and Elastostatics*, (1977), Academic Press, 9.
- (2) 例えば、西谷・陳, 体積力法, (1982), 培風館, 28.
- (3) Nishimura, N., Kobayashi, S., A Regularized Boundary Integral Equation Method for Elastodynamic Crack Problems, *Comp. Mech.*, **4**, (1989), 319.
- (4) 岸田・藤村, 三次元線形境界値問題の一解法, 機論, **48-427A**(1982), 358.
- (5) 岸田・佐々木・石田・野口, 層ポテンシャルによる三次元き裂の弾性応力解析, 機論, **53-489, A**(1987), 878.
- (6) 岸田・佐々木・富永, 間接仮想境界積分法の三次元偏平切欠問題への適用, **55-519, A**(1989), 2266.
- (7) 高久田・渋谷・小泉, き裂問題の積分方程式による解法について, 機論, **50-454, A**(1984), 1183.
- (8) Rudolphi, T.J., Krishnasamy, G., Schmerr, L.W. and Rizzo, F.J., On the Use of Strongly Singular Integral Equations for Crack Problems, *Proc. 10th Int. Conf. Boundary Elements*, (1988), 249.
- (9) Krishnasamy, G., Rudolphi, T.J. and Rizzo, F.J., Continuity Requirements for Density Functions in the Integral Equation Method, *Comp. Mech.*, **9**, (1992), 267.
- (10) 松本・田中・本藤, 境界要素法によるき裂問題の解析法に関する考察, 機構論, **930-71**, 827.
- (11) Lachat, J.C. and Watson, J.O., Effective Numerical Treatment of Boundary Integral Equation: A Formulation for Three Dimensional Elastostatics, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **10**, (1976), 991.
- (12) 荒井・足立・宇治橋・松本, 境界要素法による弾性平板曲げ問題解析の高精度化, 機論, **59-564, A**(1993), 1860.
- (13) 荒井・足立・松本, 一様勾配条件に基づく境界要素解析の高精度化, 機論, **61-581, A**(1995), 161.
- (14) Ghosh, N., Rajiyah, H., Ghosh, S. and Mukherjee, S., A New Boundary Element Method Formulation for Linear Elasticity, *J. Appl. Mech.*, **53**, (1986), 69.
- (15) Tanaka, M. and Itoh, H., A New Family of Crack Elements for Stress Intensity Factor Computation in Elastostatic by Boundary Element Method, *Boundary Elements VIII*, ed. by Tanaka, M. and Brebbia, C.A., **1**, (1986), Springer-Verlag, 131.
- (16) 文献 (1), p.164.
- (17) Whiteman, J.R. and Papamichael, N., Treatment of Harmonic Mixed Boundary Problems by Conformal Transformation Methods, *J. Appl. Math. Phys.* (ZAMP), **23**, (1972), 655.