一様曲げ（流れ方向曲げ）を受ける 段ボールの弾性応力解析* (表面異材のKLをもつ両面段ボール)

松 島 理*¹, 松 島 成 夫*²

Elastic Analysis for SCF under Uniform Bending in Moment Axis Perpendicular to Machine Direction (SCF Made of Different Surface KL)

Satoru MATSUSHIMA and Shigeo MATSUSHIMA

A method of elastic analysis is studied for SCF {single-wall corrugated fiberboard made of different kraftliners (KL: KL₁ and KL₂)} under uniform bending in the moment axis perpendicular to the machine direction. The numerical calculation is performed according to this analysis method. The following results are obtained. The Maximum stress $\sigma_{k1\max}$ (maximum of absolute stress for KL) is on the outer surface of the thin KL (thickness T_{k1} of KL₁ < thickness T_{k2} of KL₂), and increases with the decrease of T_{k1} and the longitudinal elastic modulus for the KL₁. The maximum stress $\sigma_{s\max}$ for SCM (semichemical corrugating medium) is at the KL-SCM joint on the inner SCM surface of the thin KL side. Consequently, $\sigma_{s\max}$ decreases with the decrease of the wavelength and with the increase of the wave height and T_{k2} for SCM. The change of $\sigma_{s\max}$ with the change of T_{k1} is small in comparison to the change of $\sigma_{k1\max}$ within the range of change rate 0.3 ($=\Delta T_{k1}/T_{k1}$) for T_{k1} .

Key Words: Computational Mechanics, Structural Analysis, Elastic Bending, Strength of Corrugated Fiberboard, Elastic Stress Analysis, Structure Strength, Numerical Analysis

1. 緒 言

段ボール⁽¹⁾⁽²⁾は、包装用箱材、構造材、緩和材として盛んに利用されている。類似したものとして、波底を固定した波形鋼板、スレート材および樹脂材の波板などがあり、航空機体(筒形段ボール状)について研究⁽³⁾がある。したがって、荷重をうける段ボールのクラフト・ライナ(KL)および中芯(SCM)についての変形状況を力学的に明らかにすることは、段ボール工学上からみて重要なことである。

段ボールの強度⁽⁴⁾、段ボール箱の強度⁽⁵⁾⁽⁶⁾などに関する実用的研究は、すでに行われ、最近段ボールの反り⁽⁷⁾に関する研究がある。なお、幾何学的条件を基にした段ボールの引張変形強度機構に関するもの⁽⁸⁾、波板の曲げ剛性に関するもの⁽⁹⁾、面圧に関するもの⁽¹⁰⁾がある。曲げモーメント軸が流れ方向(フルートの流れ方向)にある際の弾性曲げ強度の研究⁽¹¹⁾⁽¹²⁾がある。そして、曲げモーメント軸が流れ方向に直角な向きにある際の曲げ(流れ方向曲げ)強度に関する基礎的な研究⁽¹³⁾も上下同材のKLをもつ両面段ボールについて

行われている。しかし、異なるKL材をもつ両面段ボールの流れ方向曲げについての基礎的な研究は見当たらない。したがって、異なるKLをもつ両面段ボール(すなわち、板厚方向に非対称な強度分布をもつもの)が市場において多く用いられている現状を考慮する際、このような段ボールの流れ方向の曲げ強度を明らかにすることは、段ボール工学上重要なことであると考えられる。いっぽう、前報の面圧⁽¹⁰⁾および曲げ⁽¹¹⁾の研究によると、段ボール中芯の応力状態は形状によって鋭敏に変化することがわかる。そして、厚さ方向に非対称な強度分布をもつ段ボール⁽¹²⁾の応力状態は形状によってさらに複雑に変化する。このことを考慮すると、前報⁽¹³⁾の変形制限よりもさらに厳密な議論が必要であると思われる。

以上のことより、本報では、前報より厳密な変形制限の条件を配慮しながら、前報^{(10)~(13)}にならい、中芯の形状を近似的に正弦波形、段ボールの構成素材(KL、中芯)を弾性体であるとして、段ボール板厚方向に非対称な強度分布をもつ両面段ボールの流れ方向一様曲げの応力解析の表示を導出することを試み、これによって両面段ボールの応力強度の特性の概括を議論することを試みた。

* 原稿受付 1994年10月20日。

*¹ 帝人製機(株)松山工場 (〒791 松山市北吉田町77)。

*² 正員、受媛大学工学部 (〒790 松山市文京町3番)。

2. 解析方法

2.1 中芯およびKLについて 前報⁽¹³⁾に述べたように、段ボールはKL糊付け加工の際、糊付け部付近は相当複雑に変化し、その状態は単純な関数によって表せるものとはいえないが、便宜上、Seydelの処方⁽⁹⁾にならい、中芯の形状を簡便で近似の高い正弦波形であるとする[図1(a)参照]。また、前報にならい、段ボールの曲げは、近似的に、平面ひずみ変形であるとみなす。平面ひずみの変形は平面応力のものと類似している⁽¹⁴⁾。そこで、単位幅の段ボール板の流れ方向曲げの変形を単位幅はりと同様なものと考え、KLは真直はり、中芯は曲りばりであるとする。

図1(b)に示すように、中芯の厚さおよび高さの中央位置を基準位置Oとし、Oからの波形の進行方向および高さ方向の位置を x, y で示し、波形の高さを h 、波形の長さ(波長)を L で表す。すると、中芯の紙厚の中央の位置 y_0 、ならびに、 y_0 から厚さ方向に距離 t のところにある位置 $y(x, t)$ は、各

$$y_0 = \frac{h}{2} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \quad (1\cdot a)$$

$$y = y_0 + t \cos \theta \quad (1\cdot b)$$

で表せる。ただし、 θ は中芯の接線 dy_0/dx と x 方向とのなす角度である。

(a)

(b)

図1 段ボールの曲げ状況および形態

前報⁽¹³⁾と同様に、考慮すべき基本的な形状範囲は $x = -L/4 \sim L/4$ であると考え、中芯は、近似的に、KL・中芯接合部の接線の角度(たわみ角)が真直はりと同様になる曲りばりであるとする。

段ボールに単位幅当たりモーメント M_T が働く際、図2に示すように、上下表面のKL(KL1およびKL2)には、単位幅当たりの固定モーメント M_{k01}, M_{k02} が、単位幅当たりの x 方向の荷重 W_{kx1}, W_{kx2} 、 y 方向の荷重 W_{ky1}, W_{ky2} が生じるものと考えられる。同時に、KL・中芯接合部($x = -L/4, L/4$)の中芯には、単位幅当たりの固定モーメント M_{s0} が、 x, y 方向には単位幅当たりの荷重 W_{sx}, W_{sy} が生じるものと考えられる。モーメントおよび力の釣合い条件により、 M_T および W_{sx}, W_{sy} は各関係

$$M_T = M_{k01} + M_{k02} + M_{s0} \quad (2\cdot a)$$

$$W_{sx} = W_{kx1} = W_{kx2} \quad (2\cdot b)$$

$$W_{sy} = W_{ky1} = W_{ky2} \quad (2\cdot c)$$

で表せる。

中芯に曲げモーメント M_s が働く際、位置 x, t における中芯の曲げ応力 σ_s は、曲りばり⁽¹⁵⁾の式にならって

$$\sigma_s = \frac{N}{T_s} + \left(\frac{M_s}{T_s \rho} \right) \left[1 + \frac{1}{K} \left(\frac{t}{\rho + t} \right) \right] \quad (3\cdot a)$$

$$K = \frac{1}{3} \left(\frac{T_s}{2\rho} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{T_s}{2\rho} \right)^4 + \frac{1}{7} \left(\frac{T_s}{2\rho} \right)^6 + \dots \quad (3\cdot b)$$

$$\rho = - \frac{\left[1 + \left(\frac{dy_0}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}}{\left(\frac{d^2 y_0}{dx^2} \right)} \quad (3\cdot c)$$

で表せる。ここに、 T_s は中芯の紙厚、 N は中芯単位幅当たりに働く軸力である。そして、 N および M_s は

図2 固定モーメントおよび荷重

$$N = -W_{sy} \sin \theta - W_{sx} \cos \theta \quad \cdots \cdots (4 \cdot a)$$

$$M_s = M_{s0} - W_{sx} \left(\frac{h}{2} - y \right) + W_{sy} \left(\frac{L}{4} - x \right) \quad \cdots (4 \cdot b)$$

で表せる。

中芯の x, y 方向の変位 δ_{sx}, δ_{sy} およびたわみ角 i は、周知の関係として、

$$\delta_{sx} = -\frac{1}{E_s T_s} \int_{-L/4}^{L/4} \left[N + \frac{M_s(1+K)}{K\rho} \right] \left(\frac{h}{2} - y_0 \right) d\theta \quad \cdots \cdots (5 \cdot a)$$

$$\delta_{sy} = \frac{1}{E_s T_s} \int_{-L/4}^{L/4} \left[N + \frac{M_s(1+K)}{K\rho} \right] \left(\frac{L}{4} - x \right) d\theta \quad \cdots \cdots (5 \cdot b)$$

$$i = -\frac{1}{E_s T_s} \int_{-L/4}^{L/4} \left[N + \frac{M_s(1+K)}{K\rho} \right] d\theta \quad \cdots \cdots (5 \cdot c)$$

で表される⁽¹⁵⁾。ただし、 E_s は中芯の縦弾性係数である。

前報⁽¹³⁾と同様に、両 KL の曲げモーメント M_{k1} および M_{k2} は、KL・中芯接合部の固定モーメント M_{k01} および M_{k02} と荷重 W_{sy} によるモーメントとの和

$$M_{ki} = M_{k0i} - W_{kyi} x_i \quad (i=1, 2) \quad \cdots \cdots (6)$$

で表される。 x_1 および x_2 は両 KL における各 KL・中芯接合部からの x 方向の距離である。これに伴う両 KL に生じる曲げ応力 σ_{k1}, σ_{k2} は各

$$\sigma_{ki} = \frac{M_{ki}}{I_{ki}} Y + \frac{W_{kxi}}{T_{ki}} \quad (i=1, 2) \quad \cdots \cdots (7)$$

で表される。ただし、 T_{k1} および T_{k2} は KL₁ および KL₂ の厚さ、 Y は中立面から KL 内の着目点までの距離であり、 I_{k1} および I_{k2} は KL₁ および KL₂ の単位幅当たりの断面二次モーメント

$$I_{k1} = \frac{T_{k1}^3}{12} + \left(Y_0 - \frac{T_{k1}}{2} \right)^2 T_{k1} \quad \cdots \cdots (8 \cdot a)$$

$$I_{k2} = \frac{T_{k2}^3}{12} + \left(T_T - Y_0 - \frac{T_{k2}}{2} \right)^2 T_{k2} \quad \cdots \cdots (8 \cdot b)$$

である。 Y_0 は中立面から KL₁ の外表面までの距離、 T_T は段ボール全体の厚さ

$$T_T = T_s + h + T_{k1} + T_{k2}$$

である。

$x = -4/L \sim 4/L$ 間に生じる x 方向および y 方向の KL₁ および KL₂ の厚さの中央の変位 $\delta_{kx1}, \delta_{kx2}$ (伸び) および $\delta_{ky1}, \delta_{ky2}$ (たわみ) は、近似的に、各

$$\delta_{kxi} = \frac{L}{2E_{ki}} \sigma_{ki} + \frac{L W_{kxi}}{2E_{ki} T_{ki}} \quad (i=1, 2) \quad \cdots \cdots (9 \cdot a)$$

$$\delta_{kyi} = \frac{L^2}{8E_{ki} I_{ki}} \left[M_{k0i} - \frac{W_{kyi} L}{3} \right] \quad (i=1, 2) \quad \cdots \cdots (9 \cdot b)$$

で表される。ただし、 E_{k1} および E_{k2} は KL₁ および KL₂ の縦弾性係数である。

2.2 未知数の決定について 以上の諸関係式を

みると、各素材に働く曲げモーメント M_{k01}, M_{s0} 、荷重 W_{k01}, W_{sx} の値および中立面の位置を示す Y_0 の値などが不明である。そこで、これらの不明な値の決定についての議論を行う。

前報⁽¹³⁾に用いた変形制限は、式(5・b)の δ_{sy} と式(9・b)の δ_{ky1} との等値性、ならびに、中芯の傾き式(5・c)の i 値と KL の i 値[後述の式(10・a)]との等値性であった。すなわち、前報では、 y 方向の変位ならびに i についての制限を用いた。しかし、前報^{(10)~(12)}により、段ボール中芯の応力は形状変化によって鋭敏に変わることがわかる。曲げを受ける段ボール中芯は、曲りばりの変形と同様に、長さを変える挙動を示すものと考えられる。また、前報⁽¹³⁾により、流れ方向曲げを受ける段ボールの KL・中芯接合部における段ボール厚さ方向の荷重 W_{sy} は零であり、流れ方向のものは小さいながらもある特定の値をとることがわかる。このことより、変形制限は段ボール厚さ方向のものより、流れ方向のものが強く働いているものと考えられる。また、KL・中芯接合に基づく段ボール構造は流れ方向の変位制限によって価値付けられているものであり、その厚さ方向の変位制限は、単に、流れ方向の制限による変形の調整、付随として生じるものであると考えられる。以上のことより、流れ方向曲げを受ける段ボールの中芯の変形制限は段ボールの厚さ方向よりも、流れ方向の変形制限を用いるほうが妥当なように思われる。そこで、流れ方向の変形およびたわみ角の制限を考慮し、応力表示の導出を行う。

前報⁽¹³⁾で述べたように、純曲げ変形の際、KL・中芯接合部の KL の流れ方向の傾き i は、中芯の山部または谷部を基準として流れ方向に左右対称な分布をなし、KL・中芯接合部のたわみ角 i およびたわみ $\delta_{ky1}, \delta_{ky2}$ は、各

$$i = \frac{1}{E_{ki} I_{ki}} \left[\frac{M_{k0i} L}{2} + \frac{W_{kyi} L^2}{8} \right] \quad (i=1, 2) \quad \cdots \cdots (10 \cdot a)$$

$$\delta_{ky1} = \delta_{ky2} \quad \cdots \cdots (10 \cdot b)$$

で表され、式(9・b)、(10・a)、(10・b)、ならびに、KL の特性、すなわち、 $I_{k1} > 0, I_{k2} > 0, E_{k1} > 0, E_{k2} > 0$ により、関係

$$W_{ky1} = W_{ky2} = 0 \quad \cdots \cdots (11 \cdot a)$$

$$\frac{M_{k01}}{E_{k1} I_{k1}} = \frac{M_{k02}}{E_{k2} I_{k2}} \quad \cdots \cdots (11 \cdot b)$$

が得られ、モーメントの釣合い条件式(2・a)および式(11・b)より、 M_{k01} は

$$M_{k01} = \frac{E_{k1} I_{k1} (M_T - M_{s0})}{(E_{k1} I_{k1} + E_{k2} I_{k2})} \quad \cdots \cdots (12)$$

であることがわかる。中芯は正弦波状に曲がった形をし、 x 方向の伸び力、すなわち、流れ方向の軸力は KL の引張力に比べ非常に小さい値であると考えられる。また、段ボールの引張強度に関する結果⁽⁸⁾も、中芯の流れ方向の伸びの強度への寄与は、KL の強度に比べ、非常に、小さいものであることを示している。そこで、ここでは、KL の曲げ張力に比べ、 W_{sx} の値が小さい場合を取り上げ考える。すると、 x 方向の力の釣合い条件は、式(7)より、関係

$$\int_{Y_0-T_{k1}}^{Y_0} \sigma_{k1} dy = \int_{T_T-Y_0-T_{k2}}^{T_T-Y_0} \sigma_{k2} dy$$

で表されるものと考えられ、この関係および式(12)より、 Y_0 は

$$Y_0 = \left[\frac{2E_{k2}T_T T_{k2} + E_{k1}T_{k1}^2 - E_{k2}T_{k2}^2}{2(E_{k1}T_{k1} + E_{k2}T_{k2})} \right] \dots (13 \cdot a)$$

であることがわかる。

式(2・c)および式(11・a)より、 $W_{sy}=0$ で、中芯に働く荷重は W_{sx} のみであり、 W_{sx} は中芯各部に軸力およびモーメントを起こす働きをすると同時に、強い x 方向の変位制止の働きをなすものである。このことおよび上述の変形制限の配慮より、 x 方向の変形制限を考える。図2の幾何学条件より、中芯の厚さ中央の位置が $y_0=Y_0$ となる位置 x_0

$$x_0 = \frac{L}{4} \left(\frac{2Y_0 - T_{k1}}{T_T - T_{k1}} - 1 \right) \dots (13 \cdot b)$$

を基準にすると、KL₁ の $x_0 \sim L/4$ 間の伸び $\delta_{kx1}(x_0 \sim L/4)$ と KL₂ の $-L/4 \sim x_0$ 間の伸び $\delta_{kx2}(-L/4 \sim x_0)$ は

$$\delta_{kx1} = \frac{L-4x_0}{4E_{k1}} \left(\sigma_{k1} + \frac{W_{k1}}{T_{k1}} \right) \dots (14 \cdot a)$$

$$\delta_{kx2} = \frac{-L-4x_0}{4E_{k2}} \left(\sigma_{k2} + \frac{W_{k2}}{T_{k2}} \right) \dots (14 \cdot b)$$

で表され、中芯の x 方向の $-L/4 \sim L/4$ 間の伸び δ_{sx} はその δ_{kx1} と δ_{kx2} との和に等しく

$$\delta_{sx}(x=-L/4 \sim L/4) = \delta_{kx1}(x=x_0 \sim L/4) + \delta_{kx2}(x=-L/4 \sim x_0) \dots (14 \cdot c)$$

で表されるものと考えられる。したがって、式(5・a)、(5・c)および式(14・a)、(14・b)、(14・c)より、KL・中芯接合部の x 方向の変位およびたわみ角 i についての関係

$$a_1 W_{sx} + b_1 M_{s0} = c_1 \dots (15 \cdot a)$$

$$a_2 W_{sx} + b_2 M_{s0} = c_2 \dots (15 \cdot b)$$

が得られる。ただし、 $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ は各

$$a_1 = -\frac{1}{E_s T_s} \int_{-L/4}^{L/4} \left[\cos \theta - B_0(\theta) \left(\frac{h}{2} - y_0 \right) \right] \times \left(\frac{h}{2} - y_0 \right) d\theta - R_k$$

$$b_1 = \frac{1}{E_s T_s} \int_{-L/4}^{L/4} \left[B_0(\theta) \left(\frac{h}{2} - y_0 \right) \right] d\theta + C_0 Y_{00}$$

$$B_0(\theta) = \frac{(1+K)}{\rho K}$$

$$R_k = \frac{L-4x_0}{4E_{k1}I_{k1}} + \frac{L+4x_0}{4E_{k2}I_{k2}}$$

$$C_0 = \frac{1}{E_{k1}I_{k1}} + \frac{1}{E_{k2}I_{k2}}$$

$$Y_{00} = \left(\frac{L}{4} - x_0 \right) \left(Y_0 - \frac{T_{k1}}{2} \right) - \left(x_0 + \frac{L}{4} \right) \left(T_T - Y_0 - \frac{T_{k2}}{2} \right)$$

$$c_1 = M_T C_0 Y_{00} \dots (16 \cdot a)$$

$$a_2 = \frac{1}{E_s T_s} \int_{-L/4}^{L/4} \left[\cos \theta + B_0(\theta) \left(\frac{h}{2} - y_0 \right) \right] d\theta$$

$$b_2 = \frac{1}{E_s T_s} \int_{-L/4}^{L/4} B_0(\theta) d\theta + \frac{L C_0}{2}$$

$$c_2 = L M_T C_0 / 2 \dots (16 \cdot b)$$

で表されるものである。これらの関係より、 δ_{sx} および i の制限を用いた際の W_{sx} および M_{s0} は各

$$W_{sx} = \frac{b_2 c_1 - b_1 c_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \dots (17)$$

$$M_{s0} = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \dots (18)$$

で表されることがわかる。

KL については、式(8・a)および式(8・b)より I_{k1}, I_{k2} の値がわかり、式(17)および式(18)より W_{sx} および M_{s0} が、式(2・a)および式(12)より M_{k1}, M_{k2} の値がわかれば、式(7)より各 KL の応力 σ_{k1}, σ_{k2} の値を明らかにすることができる。また、中芯については、式(17)および式(18)より W_{sx} および M_{s0} の値がわかり、式(3・a)によって σ_s の値を明らかにすることができる。

3. 結果と考察

前報⁽¹³⁾にならって、便宜上、 $E_s=1, E_{k2}=1$ [N/m²]と、 $M_T=1$ [μN]と単位化して議論する。なお、実際に用いられている段ボールの形状⁽¹⁷⁾に合わせ、おもに、 $T_s=0.24$ mm, 0.36 mm, $L=9.2$ mm, $h=4.6$ mm, $T_{k1}=T_{k2}(=0.30$ mm) および $T_{k1}=0.72 T_{k2}$ であるとし、これを中心として応力の概況を議論する。この $0.72 T_{k2}$ の設定は、KL⁽¹⁸⁾と中芯⁽¹⁹⁾との坪量の比例換算によって定めた。

諸段ボールの KL の応力絶対値の最大値 $\sigma_{k1 \max}$ は薄い KL₁ 側の外表面位置にあり、中芯の絶対値の最大値 $\sigma_{s \max}$ は前報のように KL₁・中芯接合部の中芯内表面にあることがわかり、また、 σ_{k1} および σ_{k2} の値は前報のものと同様であるが、 σ_s の値は前報のものの6割程度の大きさになることがわかった。得られた $\sigma_{k1 \max}, \sigma_{s \max}$ および M_{k01}, M_{s0} などの値を表1に示

表 1 得られた固定モーメントおよび荷重

Material and Shape ($E_{k2}=1\text{N/mm}^2$ $T_{k2}=0.30\text{mm}$)					KL		SCM		Lateral Load
T_s mm	L mm	h mm	E_{k1} N/mm ²	T_{k1} mm	$\sigma_{k1\max}$ N/mm ²	M_{k01} μN	$\sigma_{s\max}$ N/mm ²	M_{s0} μN	W_{sx} $\mu\text{N/mm}$
0.24	9.2	4.6	1	0.30	0.6472	0.4999	0.0121	$1.07 \cdot 10^{-4}$	$-1.04 \cdot 10^{-5}$
0.24	9.2	4.6	1	0.216	0.9072	0.5810	0.0140	$1.24 \cdot 10^{-4}$	$-1.24 \cdot 10^{-5}$
0.36	9.2	4.6	1	0.30	0.6328	0.4998	0.0183	$3.47 \cdot 10^{-4}$	$-3.24 \cdot 10^{-5}$
0.36	9.2	4.6	1	0.216	0.8861	0.5809	0.0212	$4.01 \cdot 10^{-4}$	$-4.01 \cdot 10^{-5}$
0.24	4.6	4.6	1	0.30	0.6477	0.5000	0.00644	$3.97 \cdot 10^{-5}$	$-4.08 \cdot 10^{-6}$
0.24	4.6	4.6	1	0.216	0.9072	0.5811	0.00744	$4.59 \cdot 10^{-5}$	$-5.99 \cdot 10^{-6}$
0.24	9.2	9.2	1	0.30	0.3421	0.5000	0.00137	$1.09 \cdot 10^{-5}$	$-6.07 \cdot 10^{-7}$
0.24	9.2	9.2	1	0.216	0.4772	0.5813	0.00157	$1.25 \cdot 10^{-5}$	$-8.67 \cdot 10^{-7}$
0.24	9.2	4.6	0.72	0.30	0.6477	0.5811	0.0138	$1.25 \cdot 10^{-4}$	$-1.51 \cdot 10^{-5}$
0.36	9.2	4.6	0.72	0.30	0.6328	0.5810	0.0208	$3.94 \cdot 10^{-4}$	$-4.77 \cdot 10^{-5}$

す。

表 1 より, M_{s0} の値は M_{k01} のものに比べ 10^{-4} 程度に小さく, $\sigma_{s\max}$ の値も $\sigma_{k1\max}$ の $1/(20 \sim 50)$ 程度に小さいことがわかり, また, T_{k1} の 3 割程度の減少 ΔT_{k1} に伴い, $\sigma_{k1\max}$ は 5 割程度の増加が生じ, M_{s0} , W_{sx} , $\sigma_{s\max}$ は 2, 3 割程度の増加が生じることがわかる。

T_s の増加によって, $\sigma_{k1\max}$ は減少するのに対し, $\sigma_{s\max}$ は増加する傾向を示すことがわかる。表 1 の $\sigma_{k1\max}$ および $\sigma_{s\max}$ の $L=4.6\text{ mm}$ と $L=9.2\text{ mm}$ との差異および $h=4.6\text{ mm}$ と $h=9.2\text{ mm}$ との差異をみると, $\sigma_{k1\max}$ は L の減少によってごくわずかに増加し, h の増加によって大きく減少することがわかり, $\sigma_{s\max}$ は L の減少および h の増加によって大きく減少することがわかる。

E_{k1} の 3 割程度の減少 ΔE_{k1} に伴い, $\sigma_{k1\max}$ はごくわずかに増加するが, E_{k1} による $\sigma_{s\max}$ の増加 $\Delta \sigma_{s\max}$ は T_{k1} の際と同様になる。すなわち, $T_{k1}=0.30\text{ mm}$, $E_{k1}=1$ の場合, $\Delta E_{k1}/E_{k1}=\Delta T_{k1}/T_{k1}$ の際の $\sigma_{s\max}$ の増加 $\Delta \sigma_{s\max}(\Delta E_{k1})$, $\Delta \sigma_{s\max}(\Delta T_{k1})$ は互いにほぼ等しく,

$$\Delta \sigma_{s\max}(\Delta E_{k1}) \approx \Delta \sigma_{s\max}(\Delta T_{k1})$$

であることがわかる。

以上のことより, 中芯の応力 σ_s は段ボールの構成材の形状によって微妙に変化することがわかる。そこで, 式(3・a)により, 中芯の応力 σ_s と x との関係を求め, これを図 3 ($T_{k1}=0.72 T_{k2}=0.216\text{ mm}$: $T_{k1}=T_{k2}=0.30\text{ mm}$)に示す。図より, x の増加に伴って, $t=-T_s/2$ の σ_s の値は順次大きく減少し, $t=T_s/2$ のものは増加することがわかる。また, $T_{k1}=0.72 T_{k2}$ のものは $T_{k1}=T_{k2}$ のものと同様に变化する。そして,

図 3 曲げ応力 σ_s と x の関係

$\sigma_{s\max}x=L/4$ の内表面に生じることがわかる。また, $t=T_s/2$ の σ_s は $x=5/L, 3L/10$ または $4L/5, 7L/10$ (すなわち, KL_1 側の KL ・中芯接合部より流れ方向に $\pm L/20$ 離れた位置)付近に弱い極大が生じることがわかる。

なお, σ_s と t との関係を求めた。段ボールの厚さ T_T に比べると, 厚さ T_{k1} および T_{k2} は非常に小さい。そのため t による σ_{k1} および σ_{k2} の変化は極めてわずかなことが示された。これに対し, σ_s と t との関係を示す図 4 より, t の増加によって σ_s の値の変化は負の値から逆に正の値へと大きく変わることがわかる。そして, 図 3, 4 より, 特に, その変化は位置 $x=\pm L/4$ すなわち $y_0=\pm h/2$ 付近のものが顕著であることがわかる。

L および h の変化に伴う $\sigma_{s\max}$ と x との関係を議

論するために、 L および h を変化させ、 $L=h$ とした際の $\sigma_{s \max}$ と x との関係を求めた。これを図 5, 6 に示す。同図および図 3 より、 L および h の変化による $\sigma_{s \max}$ の変化は上述のように L の減少および h の増加によって大きく生じるが、 $\sigma_{s \max}$ の x による変化傾向の相違は生じないことがわかる。また、図 5, 6 より、 $L=h$ では $t=-T_{k1}/4$ で $x=5/L$, $3L/10$ または $4L/5$, $7L/10$ の位置(すなわち、 KL_1 側の KL ・中芯接合部より流れ方向に $\pm L/20$ 離れた位置)に $\sigma_{s \max}$ の極小が現れることがわかる。

中立面の位置 Y_0 を求める際、 KL の曲げに伴う張力($\sigma_{k1 \max} T_{k1}$)に比べ、 W_{sx} の影響は小さいものとしたが、得られた結果も矛盾なく、 $\sigma_{k1 \max} T_{k1}$ に比べ W_{sx} の値は 10^{-3} 程度に小さい。また、前報の段ボールの厚さ方向の変形制限を考慮した応力値をみると、 $T_{k1}=T_{k2}$ の際の本表示の $\sigma_{k1 \max}$ は前報のものと同様な値を示すが、本表示の $\sigma_{s \max}$ は 6 割程度に小さい。このことより、本結果は、前報のものより、より妥当な値を示しているものと考えられる。

本報のような曲げを受ける段ボールの変形は変形条

件の取扱いや厳密さによって大きく変化する。けれども、形状および変形進行状態が簡単ではないために、その変形を議論するための手掛りを得ることは容易ではない状況がしばしば生じる。本報はこのための一つの試み、処方でもある。

4. 結 言

本研究において、厚さ方向に強度状態が非対称的に分布する両面段ボール(異なる上下表面のクラフト・ライナ(KL_1 , KL_2)を用いたもの)の一様曲げ変形(モーメント軸が流れ方向に直角な向き)における各素材(KL および中芯)の弾性曲げ応力を算定するための解析処方、すなわち、解析表示を導出した。

そして、この解析表示によって、各素材の応力の算定を行い、応力の概況を議論した。この表示による算定に当たっては、おもに、働く単位幅当たりの曲げモーメントを $M_T=1$ [μN]、 KL_2 の縦弾性係数を $E_{k2}=1$ [N/m^2] と単位化し、また KL_1 の厚さを $T_{k1}=0.216$ mm, 0.30 mm, KL_2 の厚さを $T_{k2}=0.30$ mm, KL_1 の縦弾性係数を $E_{k1}=1, 0.72$, 中芯の波長を $L=4.6$ mm, 9.2 mm, 高さを $h=4.6$ mm, 9.2 mm, 縦弾性係数を $E_s=1$ とした際の両面段ボールを取り上げ、 KL_1 の面が凸になるような曲げ設定を行った。算定の結果によって、次のようなことが明らかになった。

- (1) T_{k1} および E_{k1} が 3 割程度減少した際、中芯に働く単位幅当たりの横荷重 W_{sx} および固定モーメント M_{s0} の増加は 2, 3 割程度になる。
- (2) 両面段ボールの KL 曲げ応力の絶対値の最大値 $\sigma_{k1 \max}$ は薄い KL (KL_1) 側の外表面にあるが、中芯の曲げ応力の最大値 $\sigma_{s \max}$ は薄い KL 側の KL ・中芯接合部の内表面に生じる。
- (3) 薄い KL 側の $\sigma_{k1 \max}$ はその KL の厚さの減

図 4 曲げ応力 σ_s と t の関係

図 5 曲げ応力 σ_s と x の関係 ($L=h=4.6$ mm)

図 6 曲げ応力 σ_s と x の関係 ($L=h=9.2$ mm)

少に伴い増加する。そして、KLの厚さが3割程度減少する際、5割程度の応力増加が生じる。これに伴う $\sigma_{s\max}$ の増加は2, 3割程度である。

(4) T_{k1} , E_{k1} , T_s を一定とした場合、 T_{k1} , E_{k1} の減少 ΔT_{k1} , ΔE_{k1} によって生じる $\sigma_{s\max}$ の増加 $\Delta\sigma_{s\max}$ (ΔT_{k1}), $\Delta\sigma_{s\max}$ (ΔE_{k1})は、 $\Delta T_{k1}/T_{k1} = \Delta E_{k1}/E_{k1}$ である際、ほぼ等しくなる。すなわち、 $\Delta\sigma_{s\max}(\Delta T_{k1}) = \Delta\sigma_{s\max}(\Delta E_{k1})$ になる。

(5) KLの厚さ方向位置変化に伴う応力の変化は小さいが、中芯の内外表面間に生じる変化は大きい。特に、KL・中芯接合部では、絶対値の大きい負値から逆に大きな正値へと変化する。

以上のことより、強度の異なる上下面のKLをもつ両面段ボールの流れ方向曲げの強度は、KLのみによって定まるとは限らず、KLおよび中芯の形状および強度がわずかに異なる際においてもKLおよび中芯の応力は微妙に変化することがわかる。

本報は、平面ひずみと平面応力との応力状態の類似性により、平面応力状態下の変形を示すはりの計算処方を用いて議論したものである。したがって、本結果によって変形を議論した際、段ボールの変形は鞍形状のものになると考えられ、諸素材の縦弾性係数 E およびポアソン比 ν を $(1-\nu^2)/E$ および $(1-\nu)/\nu^{(14)}$ にし、曲げモーメント軸方向の垂直応力 σ_z を零とせず、 $\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$ ($=\nu\sigma_{k1}$ または $\nu\sigma_{k2}$, $\nu\sigma_s$)⁽²⁰⁾とすれば、平面ひずみ状態の変形が得られるものと考えられる。

本報の結果は、前報^{(10)~(13)}と同様、加工時に生じる構成素材の強度並びに形状の変化などの考慮はおこなっていないものではあるが、合理的に変形に関する強

度形状の設定を行うに当たって価値ある基礎資料になるものと思われる。

文 献

- (1) 例えば、段ボール実用百科編集委員会編、段ボール実用百科、(1970)、21、一律書房。
- (2) レンゴー株式会社編、段ボール技術、(1971)、16、包装新聞社。
- (3) 例えば、渋谷、航空学会誌、7-61(1940)、393; 8-71(1941)、267。林、航空学会誌、8-79(1941)、1131。
- (4) 例えば、文献(1)の537ページ。文献(2)の310ページ。Koning, J. W. Jr. and Stern, R., *Tappi*, 60-12(1977), 128。
- (5) 例えば、文献(1)の548ページ。文献(2)の316ページ。Maltenfort, G. G., *Tappi*, 53-11(1970), 1076。Gratagasis, P., *Tappi*, 58-11(1975), 102。Morris, R. M. Jr. and Vallow, G. P., 58-11(1975), 110。
- (6) 例えば、紙業タイムス社編、新・紙加工便覧、(1980)、797、紙業タイムス社。
- (7) 石淵・ほか4名、機論、59-557, A(1993), 156。
- (8) 松島・ほか3名、紙パ技協誌、36-3(1982), 377。
- (9) Timoshenko, S. P. and Krieger, S. W., *Theory of Plates and Shells*, (1959), 366, McGraw-Hill Co.
- (10) 松島・ほか2名、紙パ技協誌、42-5(1988), 480。松島・ほか2名、紙パ技協誌、43-6(1989), 602。松島・ほか2名、紙パ技協誌、44-5(1990), 605。
- (11) 松島・ほか3名、紙パ技協誌、45-4(1991), 480。松島・ほか3名、紙パ技協誌、46-5(1992), 668。
- (12) 松島・ほか3名、紙パ技協誌、47-4(1993), 517。松島・ほか3名、紙パ技協誌、48-4(1994), 600。
- (13) 松島(理)・松島(成)、機論、60-576, A(1994), 1814。
- (14) 例えば、清家、材料力学、(1978)、23、共立出版。
- (15) 例えば、黒木、材料力学、(1967)、150、森北出版。
- (16) 例えば、白鳥、材料の力学、(1973)、98、朝倉書店。
- (17) 文献(1)の64ページ。
- (18) 例えば、文献(6)の783ページ。
- (19) 例えば、文献(1)の126ページ。
- (20) 例えば、文献(15)の97ページ。