帯板に存在する 3 個のき裂周囲の応力拡大係数について*

ハス也堤・哈里丁^{*1}, 平 出 忠 司^{*2}Stress Intensity Factors around Two Cracks Placed Symmetrically
with Respect to a Large Crack in an Elastic Strip

Hasiyet HALIDING and Tadasi HIRADE

Stress intensity factors around three cracks, which are situated perpendicular to the stress-free surfaces of an infinite elastic strip, have been determined. Two cracks which are small and of equal length, are placed ahead of a large crack so as to allow for geometrical symmetry. To solve the problem, two solutions are combined. One of them is a solution for a center crack in an infinite strip and the other is that for two collinear cracks in an infinite strip. The Schmidt method is used to satisfy the boundary conditions on the crack surfaces, while the conditions at the plane surfaces are satisfied with use of the Fourier transform method. Stress intensity factors are calculated numerically for some of these crack configurations.

Key Words: Stress Intensity Factor, Three Cracks, Strip, Schmidt Method, Integral Equation, Fracture Mechanics

1. 緒 言

材料に存在するき裂(一次き裂)のき裂端が塑性変形等によって鈍化して、き裂の進展が阻まれた場合を考える。このとき、き裂端の周囲の応力は十分に大きいので、微小な介在物、空洞などを起点にき裂(二次き裂)が発生してくることが考えられる⁽¹⁾。この二次き裂のき裂端は十分に鋭いので、応力拡大係数が大となる一次き裂側のき裂端が一次き裂の方向に進展して、あるいは、二次き裂の発生によって応力拡大係数が大きくなった一次き裂のき裂端が二次き裂側に進展して合体して、結果として、一次き裂が進展していく場合も考えられる。このような材料の破壊の様式を解明するためには、直線上に接近して存在する複数き裂の応力拡大係数を明らかにする必要がある。

直線上に存在する複数き裂周囲の応力拡大係数については、応力拡大係数のハンドブック⁽²⁾からもわかるように、多くの研究者によって解析されてきた。しかるに、これらの研究の多くは無限板に存在するき裂の

場合であり、平面境界を有する板材に対しては、わずかに帯板に存在する 2 個のき裂の解析が Delale and Erdogan⁽³⁾ によって、複数き裂を有する長方形板や帯板の解析が石田・寺田⁽⁴⁾ によって行われている程度と見受けられる。そこで、本研究では帯板の平面境界に垂直に存在する中央き裂のき裂端の先方に 2 個の小さなき裂が発生した場合を設定して応力解析を行い、応力拡大係数に及ぼす平面境界の影響とき裂相互の影響を明らかにした。

設定された問題を解くため、最初に、平面での境界条件を満足する 1 個のき裂を有する帯板の級数解と平面での境界条件を満足する 2 個のき裂を有する帯板の級数解を重ね合わせる。その後、き裂面上での境界条件をシュミット法⁽⁵⁾ を用いて満足させる。種々のき裂の配置に対して数値計算を実行して応力拡大係数を求めた。得られた結果は、一次き裂と二次き裂が結合して材料が破壊する場合の様式の解明に役立つばかりでなく、複数き裂が検出された板材の保守管理にも有用となろう。

2. 基礎式と問題の設定

図 1 に示すように、横幅 $2h$ の帯板に 3 個のき裂が存在する場合を考える。(x, y) 座標を図に示すように

* 原稿受付 1995 年 1 月 20 日。

^{*1} Xinjiang Institute of Technology, Friendship North Road 22, Urumuqi, Xinjiang, 830008, P. R. China.^{*2} 学生員, 神奈川大学大学院 (〒221 横浜市神奈川区六角橋 3-27-1)。

採用するとき、長さ $2c$ のき裂は $y=0$, $-c < x < c$ の位置に、長さ $(b-a)$ の2個のき裂は $y=0$, $a < |x| < b$ の位置に存在するものとする。 $x=\pm h$ は応力自由となる帯板の側面を示す。き裂の位置は上下左右に対称なので、き裂面に垂直に引張応力が働く場合は上側半分に対して解析を行えば十分である。

平面応力状態を設定した場合、次の重調和方程式

$$\{\partial^4/\partial x^4 + 2\partial^4/(\partial x^2 \partial y^2) + \partial^4/\partial y^4\} \phi = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

を満たす Airy の応力関数 ϕ を用いて、応力式は次式のように表示される。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xx} &= \partial^2 \phi / \partial y^2, \quad \tau_{yy} = \partial^2 \phi / \partial x^2 \\ \tau_{xy} &= -\partial^2 \phi / (\partial x \partial y) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 τ_{xx} , τ_{yy} : x, y 方向の垂直応力, τ_{xy} : せん断応力。変位 u, v と応力の関係は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \partial u / \partial x &= 1/E (\tau_{xx} - \nu \tau_{yy}) \\ \partial v / \partial y &= 1/E (\tau_{yy} - \nu \tau_{xx}) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 E : ヤング率, ν : ポアソン比, u, v : x, y 方向の変位。

き裂を有する帯板に引張応力が働く場合、破壊力学において有用となる応力拡大係数に着目する限り、以

Fig. 1 Three collinear cracks in an infinite strip and coordinate system

Fig. 2 A center crack in an infinite strip

下の境界条件を適用して解析を行えばよい。

$$\tau_{xx} = 0, \quad \tau_{xy} = 0, \quad x = \pm h, \quad 0 \leq y < \infty \quad \text{において} \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\tau_{xy}^0 = 0, \quad |x| < h, \quad y = 0 \quad \text{において} \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\tau_{yy}^0 = -p, \quad |x| < c, \quad a < |x| < b, \quad y = 0 \quad \text{において} \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$v^0 = 0, \quad c < |x| < a, \quad b < |x| \leq h, \quad y = 0 \quad \text{において} \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここで、 p : 一定値, 上付添字“0”を添えられた応力などは $y=0$ 上の値であることを示す。

3. 解の構成

境界条件式(4), (5), (6), (7)を満足する解を求めるため、2種類の解を組み合わせる。図2に示すように、幅 $2h$ の板に長さ $2c$ の1個のき裂が存在する場合の解を Solution 1 とする。Solution 1 に対する境界条件は次のようになる。

$$\tau_{xx1} = 0, \quad \tau_{xy1} = 0, \quad x = \pm h, \quad 0 \leq y < \infty \quad \text{において} \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$\tau_{xy1}^0 = 0, \quad |x| < h, \quad y = 0 \quad \text{において} \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\tau_{yy1}^0 = -p, \quad |x| < c, \quad y = 0 \quad \text{において} \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$v_1^0 = 0, \quad c < |x| \leq h, \quad y = 0 \quad \text{において} \quad \dots\dots\dots (11)$$

ここで、下付添字“1”は Solution 1 の解であることを示す。

次に図3に示すように、2個の等長き裂を有する板の解を Solution 2 とする。Solution 2 の境界条件を記せば、次のようになる。

$$\tau_{xx2} = 0, \quad \tau_{xy2} = 0, \quad x = \pm h, \quad 0 \leq y < \infty \quad \text{において} \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\tau_{xy2}^0 = 0, \quad |x| < h, \quad y = 0 \quad \text{において} \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$\tau_{yy2}^0 = -p, \quad a < |x| < b, \quad y = 0 \quad \text{において} \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$v_2^0 = 0, \quad |x| < a, \quad b < |x| \leq h, \quad y = 0 \quad \text{において} \quad \dots\dots\dots (15)$$

Fig. 3 Two equal cracks in an infinite strip

ここで、下付添字“2”を有する応力などは、Solution 2の解であることを示す。

4. 解 析

最初に、Solution 1を求める。式(1)を満足する Airy の応力関数 ϕ_1 を次式のように設定する。

$$\phi_1 = 2 \int_0^\infty [A_1(\xi) + yB_1(\xi)] \exp(-\xi y) \cos(\xi x) d\xi + 2 \int_0^\infty [C_1(\zeta) \cosh(\zeta x) + D_1(\zeta)x \sinh(\zeta x)] \cos(\zeta y) d\zeta \quad (16)$$

ここで、 $A_1(\xi)$, $B_1(\xi)$, $C_1(\zeta)$, $D_1(\zeta)$: 未定係数。式(16)を式(2)に代入すれば

$$\tau_{xx1} = 2 \int_0^\infty \{A_1(\xi)\xi^2 + [\xi^2 y - 2\xi]B_1(\xi)\} \exp(-\xi y) \cos(\xi x) d\xi - 2 \int_0^\infty \{C_1(\zeta) \cosh(\zeta x) + D_1(\zeta)x \sinh(\zeta x)\} \zeta^2 \cos(\zeta y) d\zeta \quad (17\cdot a)$$

$$\tau_{yy1} = -2 \int_0^\infty [A_1(\xi) + B_1(\xi)y] \xi^2 \exp(-\xi y) \cos(\xi x) d\xi + 2 \int_0^\infty \{C_1(\zeta) \zeta \cosh(\zeta x) + D_1(\zeta)[2 \cosh(\zeta x) + x\zeta \sinh(\zeta x)]\} \zeta \cos(\zeta y) d\zeta \quad (17\cdot b)$$

$$\tau_{xy1} = 2 \int_0^\infty [-\xi A_1(\xi) + (1 - \xi y)B_1(\xi)] \xi \exp(-\xi y) \sin(\xi x) d\xi + 2 \int_0^\infty \{\zeta C_1(\zeta) \sinh(\zeta x) + D_1(\zeta)[\sinh(\zeta x) + x\zeta \cosh(\zeta x)]\} \zeta \sin(\zeta y) d\zeta \quad (17\cdot c)$$

境界条件式(9)を適用すれば式(17・c)より、 $B_1(\xi)$ は次のように $A_1(\xi)$ で表示できる。

$$B_1(\xi) = \xi A_1(\xi) \quad (18)$$

次の関係式を用いて

$$\left. \begin{aligned} f(y) &= 2/\pi \int_0^\infty \left[\int_0^\infty f(y) \cos(\zeta y) dy \right] \cos(\zeta y) d\zeta \quad [f(y) \text{ が偶関数の場合}] \\ f(y) &= 2/\pi \int_0^\infty \left[\int_0^\infty f(y) \sin(\zeta y) dy \right] \sin(\zeta y) d\zeta \quad [f(y) \text{ が奇関数の場合}] \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

境界条件式(8)を整理すれば、次のようになる。

$$C_1(\zeta) \cosh(\zeta h) + D_1(\zeta)h \sinh(\zeta h) = -4/\pi \int_0^\infty \xi^3/(\xi^2 + \zeta^2)^2 A_1(\xi) \cos(h\xi) d\xi \quad (20\cdot a)$$

$$C_1(\zeta)\zeta \sinh(\zeta h) + D_1(\zeta)[\sinh(\zeta h) + h\zeta \cosh(\zeta h)] = 4/\pi \int_0^\infty \xi^4/(\xi^2 + \zeta^2)^2 A_1(\xi) \sin(h\xi) d\xi \quad (20\cdot b)$$

式(20・a), (20・b)を $C_1(\zeta)$, $D_1(\zeta)$ について解いて

$$C_1(\zeta) = -4/\pi \{h \sinh(\zeta h)/[\cosh(\zeta h) \sinh(\zeta h) + \zeta h]\} \int_0^\infty \xi^4/(\xi^2 + \zeta^2)^2 A_1(\xi) \sin(h\xi) d\xi - 4/\pi \{\sinh(\zeta h) + h\zeta \cosh(\zeta h)/[\cosh(\zeta h) \sinh(\zeta h) + \zeta h]\} \int_0^\infty \xi^3/(\xi^2 + \zeta^2)^2 A_1(\xi) \cos(h\xi) d\xi \quad (21\cdot a)$$

$$D_1(\zeta) = 4/\pi \{\cosh(\zeta h)/[\cosh(\zeta h) \sinh(\zeta h) + \zeta h]\} \int_0^\infty \xi^4/(\xi^2 + \zeta^2)^2 A_1(\xi) \sin(h\xi) d\xi + 4/\pi \{\zeta \sinh(\zeta h)/[\cosh(\zeta h) \sinh(\zeta h) + \zeta h]\} \int_0^\infty \xi^3/(\xi^2 + \zeta^2)^2 A_1(\xi) \cos(h\xi) d\xi \quad (21\cdot b)$$

式(16)を変位式 u , v に代入して、式(18)を適用して、 $y=0$ の変位 v_1^0 を求めれば

$$Ev_1^0 = 4 \int_0^\infty \xi A_1(\xi) \cos(\xi x) d\xi \quad (22)$$

式(22)の左辺を積分表示すれば

$$Ev_1^0 = E/\pi \int_0^\infty \bar{v}_1^0 \cos(\xi x) d\xi \quad (23)$$

式(22)と式(23)より、 $A_1(\xi)$ を求めると

$$A_1(\xi) = E\bar{v}_1^0/(4\xi\pi) \quad (24)$$

式(24)を式(21)に代入すると

$$C_1(\zeta) = E \int_0^\infty k_3(\xi) \bar{v}_1^0 \cos(h\xi) d\xi + E \int_0^\infty k_4(\xi) \bar{v}_1^0 \sin(h\xi) d\xi \quad (25\cdot a)$$

$$D_1(\zeta) = E \int_0^\infty k_1(\xi) \bar{v}_1^0 \cos(h\xi) d\xi + E \int_0^\infty k_2(\xi) \bar{v}_1^0 \sin(h\xi) d\xi \quad (25\cdot b)$$

ここで、 $k_1(\xi)$, $k_2(\xi)$, $k_3(\xi)$, $k_4(\xi)$ は付録Aに示す。この段階ですべての応力と変位は $\bar{v}_1^0$ で表示できる。例えば、 y

$=0$ 上の応力 τ_{yy1}^0 を書けば

$$\begin{aligned} \tau_{yy1}^0 = E \int_0^\infty \bar{v}_1^0 \Big\{ & -\xi/(2\pi) \cos(\xi x) + 2 \cos(h\xi) \int_0^\infty [\zeta^2 \cosh(\zeta x) k_3(\xi) + k_1(\xi)(2 \cosh(\zeta x) \\ & + x\zeta \sinh(\zeta x))] d\zeta + 2 \sin(h\xi) \int_0^\infty [\zeta^2 \cosh(\zeta x) k_4(\xi) + k_2(\xi)(2 \cosh(\zeta x) + x\zeta \sinh(\zeta x))] d\zeta \Big\} d\xi \end{aligned} \quad (26)$$

き裂の外側の境界条件式(11)を満足させるために, $y=0$ の変位 v_1^0 を, き裂端の応力特異性を考えて, 次のように級数展開する.

$$\begin{aligned} E\pi v_1^0 &= \sum_{n=1}^\infty d_n \cos\{(2n-1)\sin^{-1}(x/c)\} \quad 0 \leq |x| < c \text{ に対して} \\ &= 0 \quad c < |x| \leq h \text{ に対して} \end{aligned} \quad (27)$$

ここで, d_n : 未定係数.

式(27)のように変位を級数展開すれば, 境界条件式(11)は自動的に満足される. 式(27)をフーリエ変換して

$$E\pi \bar{v}_1^0 = \sum_{n=1}^\infty d_n (2n-1)/\xi J_{2n-1}(c\xi) \quad (28)$$

ここで, $J_{2n-1}(c\xi)$: ベッセル関数.

変位を式(27)のように展開すれば, Solution 1 の解は未定係数 d_n のみによって表される. 例えば, τ_{yy1}^0 を記せば

$$\begin{aligned} \tau_{yy1}^0 &= \sum_{n=1}^\infty d_n (2n-1) \Big\{ -1/2\pi \int_0^\infty J_{2n-1}(c\xi) \cos(\xi x) d\xi + 2 \int_0^\infty \Big\{ J_{2n-1}(c\xi) \cos(h\xi)/\xi \int_0^\infty [\zeta^2 \cosh(\zeta x) k_3(\xi) \\ &+ \zeta\{2 \cosh(\zeta x) + x\zeta \sinh(\zeta x)\} k_1(\xi)] d\zeta \Big\} d\xi + 2 \int_0^\infty \Big\{ J_{2n-1}(c\xi) \sin(h\xi)/\xi \int_0^\infty [\zeta^2 \cosh(\zeta x) k_4(\xi) \\ &+ \zeta\{2 \cosh(\zeta x) + x\zeta \sinh(\zeta x)\} k_2(\xi)] d\zeta \Big\} d\xi \Big\} \end{aligned} \quad (29)$$

次に, Solution 2 を求めよう. Solution 1 の場合の ϕ_1 の下付添字 1 を 2 にしたものを Airy の応力関数 ϕ_2 とする. Solution 1 の場合と同様に, 境界条件式(12), (13)を満足させる.

き裂の外側の境界条件式を満足させるため, $y=0$ の変位 v_2^0 を, 式(27)の場合と同様に, き裂端の応力特異性を考慮して, 次のように級数展開する.

$$\begin{aligned} E\pi v_2^0 &= \sum_{n=1}^\infty d'_n 1/2n \sin\{(a+b-2|x|)/(b-a)-n\pi/2\} \quad a < |x| < b \text{ に対して} \\ &= 0 \quad 0 \leq |x| < a, \quad b < |x| \leq h \text{ に対して} \end{aligned} \quad (30)$$

ここで, d'_n : 未定係数. 式(30)のように変位を級数展開すれば, 境界条件式(15)は自動的に満足される. 式(30)をフーリエ変換して

$$E\pi \bar{v}_2^0 = \sum_{n=1}^\infty d'_n 1/\xi \sin\{(a+b)\xi/2 - n\pi/2\} J_n\{(b-a)\xi/2\} \quad (31)$$

このように級数展開すれば, Solution 2 の解は未定係数 d'_n のみによって表される. 例えば, τ_{yy2}^0 を記せば

$$\begin{aligned} \tau_{yy2}^0 &= \sum_{n=1}^\infty d'_n \int_0^\infty 1/\xi \sin\{(a+b)\xi/2 - n\pi/2\} J_n\{(b-a)\xi/2\} \Big\{ -\xi/2\pi \cos(\xi x) \\ &+ 2 \cos(h\xi) \int_0^\infty \{\zeta^2 \cosh(\zeta x) k_3(\xi) + \zeta[2 \cosh(\zeta x) + x\zeta \sinh(\zeta x)] k_1(\xi)\} d\zeta \\ &+ 2 \sin(h\xi) \int_0^\infty \{\zeta^2 \cosh(\zeta x) k_4(\xi) + \zeta[2 \cosh(\zeta x) + x\zeta \sinh(\zeta x)] k_2(\xi)\} d\zeta \Big\} d\xi \end{aligned} \quad (32)$$

5. Solution 1 と Solution 2 の結合

Solution 1 と Solution 2 を重ね合わせた解は境界条件式(4), (5), (7)を満足するが, き裂の内側の境界条件式(6)を満たさない. 今, τ_{yy1}^0 と τ_{yy2}^0 を重ね合わせて, τ_{yy}^0 を求めれば

$$\begin{aligned} \tau_{yy}^0 &= \tau_{yy1}^0 + \tau_{yy2}^0 = \sum_{n=1}^\infty d_n (2n-1) \Big\{ -1/2\pi \int_0^\infty J_{2n-1}(c\xi) \cos(\xi x) d\xi + 2 \int_0^\infty \Big\{ \int_0^\infty [\cos(h\xi)/\xi J_{2n-1}(c\xi) M_1(\zeta, x) \\ &+ \sin(h\xi)/\xi J_{2n-1}(c\xi) M_2(\zeta, x)] d\zeta \Big\} d\xi \Big\} + \sum_{n=1}^\infty d'_n \Big\{ -1/2\pi \int_0^\infty J_n\{(b-a)\xi/2\} \sin\{(a+b)\xi/2 - n\pi/2\} \cos(\xi x) d\xi \\ &+ 2 \int_0^\infty \Big\{ \int_0^\infty [\cos(h\xi)/\xi J_n\{(b-a)\xi/2\} \sin\{(a+b)\xi/2 - n\pi/2\} M_1(\zeta, x) \end{aligned}$$

$$+\sin(h\xi)/\xi J_n\{(b-a)\xi/2\}\sin\{(a+b)\xi/2-n\pi/2\}M_2(\xi, x)d\xi\} \dots\dots\dots (33)$$

ここで, $M_1(\xi, x)$, $M_2(\xi, x)$ は付録 B に示す.

さて, 無限積分 $\int_0^\infty J_n(\alpha\xi)\{\cos(\beta\xi), \sin(\beta\xi)\}d\xi$ は次の閉じた形で与えられる⁽⁶⁾.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty J_n(\alpha\xi)\{\cos(\beta\xi), \sin(\beta\xi)\}d\xi &= 1/(\alpha^2+\beta^2)^{1/2}[\cos\{n\sin^{-1}(\beta/\alpha)\}, \sin\{n\sin^{-1}(\beta/\alpha)\}] \quad \alpha > \beta \text{ に対して} \\ &= \{-\alpha^n \sin(n\pi/2), \alpha^n \cos(n\pi/2)\}/[(\beta^2-\alpha^2)^{1/2}\{\beta+(\beta^2-\alpha^2)^{1/2}\}^n] \quad \alpha < \beta \text{ に対して} \\ &\dots\dots\dots (34) \end{aligned}$$

き裂の内側の境界条件式(6)に式(33)を適用し, 式(34)を用いて整理すれば, 次式を得る.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^\infty d_n g_n(x) + \sum_{n=1}^\infty d'_n h_n(x) &= -p \\ 0 \leq x < c \text{ において} &\dots\dots\dots (35\cdot a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^\infty d_n k_n(x) + \sum_{n=1}^\infty d'_n l_n(x) &= -p \\ a < x < b \text{ において} &\dots\dots\dots (35\cdot b) \end{aligned}$$

ここで, $g_n(x)$, $h_n(x)$, $k_n(x)$, $l_n(x)$ は付録 C に示す.

$g_n(x)$, $h_n(x)$ は $x \rightarrow c$ に対して, $k_n(x)$, $l_n(x)$ は $x \rightarrow a$, $x \rightarrow b$ に対して, それぞれ特異性を有する. この特異性を除去するために, 式(35・a)の両辺に $(c-x)^{1/2}$, 式(35・b)の両辺に $\{(b-x)(x-a)\}^{1/2}$ をかけて

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^\infty d_n G_n(x) + \sum_{n=1}^\infty d'_n H_n(x) &= -U(x) \\ 0 \leq x < c \text{ において} &\dots\dots\dots (36\cdot a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^\infty d_n K_n(x) + \sum_{n=1}^\infty d'_n L_n(x) &= -V(x) \\ a < x < b \text{ において} &\dots\dots\dots (36\cdot b) \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} G_n(x) &= g_n(x)(c-x)^{1/2} \\ K_n(x) &= k_n(x)\{(b-x)(x-a)\}^{1/2} \\ H_n(x) &= h_n(x)(c-x)^{1/2} \\ L_n(x) &= l_n(x)\{(b-x)(x-a)\}^{1/2} \\ U(x) &= p(c-x)^{1/2}, \quad V(x) = p\{(b-x)(x-a)\}^{1/2} \\ &\dots\dots\dots (37) \end{aligned}$$

式(36)は未定係数 d_n , d'_n について, シュミット法を用いて解くことができる. 未定係数 d_n , d'_n が求められたのですべての応力, 変位は計算できることになる.

6. シュミット法

今, 直交条件

$$\int_a^b P_m(x)P_n(x)dx = N_n\delta_{mn} \dots\dots\dots (38)$$

$$N_n = \int_a^b P_n^2(x)dx \dots\dots\dots (39)$$

を満足する関数 $P_n(x)$ を次のように構成する.

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^n M_{in}K_i(x)/M_{nn} \dots\dots\dots (40)$$

ここで, M_{in} は次式で定義される行列式 Δ_n の余因子である.

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ d_{n1} & \dots & \dots & d_{nn} \end{vmatrix} \\ d_{in} &= \int_a^b K_i(x)K_n(x)dx \dots\dots\dots (41) \end{aligned}$$

式(36・b)の最初の級数を $P_n(x)$ の級数で表せば, 次式を得る.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^\infty d_n K_n(x) &= \sum_{n=1}^\infty \epsilon_n P_n(x) \\ &= -V(x) - \sum_{n=1}^\infty d'_n L_n(x) \dots\dots\dots (42) \end{aligned}$$

ここで, ϵ_n : 未定係数. 式(42)の第2の等式より,

$$\begin{aligned} \epsilon_n &= -1/N_n \int_a^b V(x)P_n(x)dx - \sum_{i=1}^\infty \alpha_{ni}d'_n \\ \alpha_{ni} &= -1/N_n \int_a^b P_n(x)L_i(x)dx \dots\dots\dots (43) \end{aligned}$$

また, 式(40)と式(42)の最初の等式より,

$$\begin{aligned} d_n &= \gamma_n^0 + \sum_{i=1}^\infty \gamma_{ni}d'_n \\ \gamma_n^0 &= -\sum_{j=n}^\infty M_{nj}/(N_j M_{jj}) \int_a^b V(x)P_j(x)dx \\ \gamma_{ni} &= -\sum_{j=n}^\infty M_{nj}/(N_j M_{jj}) \int_a^b P_j(x)L_i(x)dx \\ &\dots\dots\dots (44) \end{aligned}$$

式(44)を式(36・a)に代入して,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^\infty d'_n Y_n(x) &= -U^*(x) \quad 0 \leq x < c \\ Y_n(x) &= H_n(x) + \sum_{i=1}^\infty \gamma_{in}G_i(x) \\ U^*(x) &= U(x) + \sum_{i=1}^\infty \gamma_i^0 G_i(x) \dots\dots\dots (45) \end{aligned}$$

式(45)から d'_n を求めるため, 直交条件

$$\begin{aligned} \int_0^c Q_m(x)Q_n(x)dx &= K_n\delta_{mn} \\ K_n &= \int_0^c Q_n^2(x)dx \dots\dots\dots (46) \end{aligned}$$

を満たす関数 $Q_n(x)$ を次のように構成する.

$$Q_n(x) = \sum_{i=1}^n L_{in}Y_i(x)/L_{nn} \dots\dots\dots (47)$$

ここで, L_{in} は次式で定義される行列式 Δ'_n の余因子

である。

$$\Delta'_n = \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1n} \\ e_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ e_{n1} & \cdots & \cdots & e_{nn} \end{vmatrix}$$

$$e_{nj} = \int_0^c Y_j(x) Y_n(x) dx \quad \cdots \cdots \cdots (48)$$

式(45), (47)より

$$d'_n = \sum_{j=n}^{\infty} q_j L_{nj} / L_{jj} \quad \cdots \cdots \cdots (49)$$

ここで,

$$q_j = -1/K_j \int_0^c U^*(x) Q_j(x) dx \quad \cdots \cdots \cdots (50)$$

7. 応力拡大係数

線形破壊力学では、き裂先端の応力から定義されてくる応力拡大係数を求めることが重要となる。 $y=0$ 上の τ_{yy}^0 は式(33)で与えられる。式(33)に式(34)の積分公式を適用すれば、応力拡大係数は次のように容易に求めることができる。

$$K_{Ic} = \{2\pi(x-c)\}^{1/2} \tau_{yy}^0|_{x=c+}$$

Fig. 4 Stress intensity factor K_{Ic} for $a/c=1.1$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} d_n (2n-1) (-1)^{n-1} / 2(\pi c)^{1/2}$$

$$K_{Ia} = \{2\pi(a-x)\}^{1/2} \tau_{yy}^0|_{x=a-}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} d'_n (-1) / 2\{2\pi(b-a)\}^{1/2}$$

$$K_{Ic} = \{2\pi(x-b)\}^{1/2} \tau_{yy}^0|_{x=b+}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} d'_n (-1)^n / 2\{2\pi(b-a)\}^{1/2} \quad \cdots \cdots \cdots (51)$$

8. 数値計算結果

数値計算は、倍精度で行った。ポアソン比 ν は解析過程には生じるが、応力表示式には無関係となる。式(36)にシュミット法を適用して未定係数 d_n, d'_n を求めるためには、付録Cの $g_n(x), h_n(x), k_n(x), l_n(x)$ の無限積分を精度よく求めなければならない。無限積分の上限の値は ξ に対しては $(\xi c)=40.0$ とし、 ζ に対しては $(\zeta c)=16.0$ としたが、被積分関数は十分収束していることを確認している。シュミット法は無限級数を $n=10$ で打ち切って適用しているが、式(36)の左右の値が良好に一致することを確認している。

本論文の解析の信頼性を確認するため、2種類の特別な場合に対して応力拡大係数を求めてみる。最初に、

Fig. 6 Stress intensity factor K_{Ib} for $a/c=1.1$

Fig. 5 Stress intensity factor K_{Ia} for $a/c=1.1$

Fig. 7 Stress intensity factor K_{Ic} for $a/c=1.2$

二次き裂が極めて小さい場合を考える。すなわち, $h/c = 2.0$, $a/c = 1.45$, $b/c = 1.55$ として応力拡大係数を求めれば

$$K_{Ic}/\{p(\pi c)^{1/2}\} = 1.1834(1.1867)$$

$$K_{Ia}/\{p(\pi c)^{1/2}\} = 0.35783$$

$$K_{Ib}/\{p(\pi c)^{1/2}\} = 0.34672$$

を得る。ここで, () 内の値は, 石田によって与えられている1個の中央き裂を有する帯板の値⁽⁷⁾である。次に, 中央の一次き裂が極めて小さい場合を考える。

Fig. 8 Stress intensity factor K_{Ia} for $a/c=1.2$

Fig. 9 Stress intensity factor K_{Ib} for $a/c=1.2$

Fig. 10 Stress intensity factor K_{Ic} for $a/c=1.5$

すなわち, $a/\{(b-a)/2\} = 2.5$, $b/\{(b-a)/2\} = 4.5$, $h/\{(b-a)/2\} = 5.0$, $c/\{(b-a)/2\} = 0.125$ として応力拡大係数を求めれば

$$K_{Ic}/[p\{\pi(b-a)/2\}^{1/2}] = 0.4290$$

$$K_{Ia}/[p\{\pi(b-a)/2\}^{1/2}] = 1.127(1.126)$$

$$K_{Ib}/[p\{\pi(b-a)/2\}^{1/2}] = 1.221(1.218)$$

を得る。ここで, () 内の値は, 中央き裂が存在しない場合に対して Delale and Erdogan によって与えられた値⁽³⁾である。以上のように対応する両者の値が良好に一致するので, 本論文の解析の信頼性は保証されたものとみなしてよいことがわかる。

応力拡大係数 K_{Ic} , K_{Ia} , K_{Ib} を $a/c = 1.1, 1.2, 1.5$, $(b-a)/c = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ に対して計算した結果を図4~12に示す。これらの図から, 次の事柄がわかる。

(1) a/c の値が1.0に近づくに従って, K_{Ic} , K_{Ia} , K_{Ib} の値は増大するが増加率は K_{Ia} が最大となる。すなわち, 二次き裂が一次き裂に接近して発生した場合, または, 二次き裂が一次き裂側に進展した場合, K_{Ia} の値は急激に増大する。この現象は h/c の値によって左右されることはない。

(2) h/c の値が減少するにつれて, K_{Ic} , K_{Ia} , K_{Ib}

Fig. 11 Stress intensity factor K_{Ia} for $a/c=1.5$

Fig. 12 Stress intensity factor K_{Ib} for $a/c=1.5$

の値は増大するが, その増加率は a/c の値が小さいほど大きい. すなわち, 二次き裂が一次き裂に接近して発生した場合, あるいは, 二次き裂が一次き裂側に進展した場合, 応力自由平面の影響は顕著となる.

9. 結 論

帯板の平面に垂直に存在する3個のき裂周囲の応力拡大係数を2種類の級数解を重ね合わせることによって解いた. 応力自由平面の境界条件をフーリエ変換で, き裂面での境界条件をシュミット法で満足させた. 数値計算を実行して応力拡大係数を求め, 材料の保守管理に有用となるデータを与えた. また, 二次き裂の一次き裂側の応力拡大係数は, 二次き裂の発生位置にも, 応力自由平面にも顕著に影響されることを明らかにした.

付 録 A

$$\begin{aligned} k_1(\xi) &= \sinh(h\xi)\xi^2/\{\pi^2[\cosh(h\xi)\sinh(h\xi)+h\xi](\xi^2+\zeta^2)^2\} \\ k_2(\xi) &= \cosh(h\xi)\xi^3/\{\pi^2[\cosh(h\xi)\sinh(h\xi)+h\xi](\xi^2+\zeta^2)^2\} \\ k_3(\xi) &= -[\sinh(h\xi)+h\xi\cosh(h\xi)]\xi^2/\{\pi^2[\cosh(h\xi)\sinh(h\xi)+h\xi](\xi^2+\zeta^2)^2\} \\ k_4(\xi) &= -h\sinh(h\xi)\xi^3/\{\pi^2[\cosh(h\xi)\sinh(h\xi)+h\xi](\xi^2+\zeta^2)^2\} \end{aligned}$$

付 録 B

$$\begin{aligned} M_1(\zeta, x) &= \zeta\{\zeta k_3(\xi)\cosh(\zeta x)+k_1(\xi)[2\cosh(\zeta x)+x\zeta\sinh(\zeta x)]\} \\ M_2(\zeta, x) &= \zeta\{\zeta k_4(\xi)\cosh(\zeta x)+k_2(\xi)[2\cosh(\zeta x)+x\zeta\sinh(\zeta x)]\} \end{aligned}$$

付 録 C

$$\begin{aligned} g_n(x) &= (2n-1)\left[-1/2\pi(c^2-x^2)^{-1/2}\cos\{(2n-1)\sin^{-1}(x/c)\}\right. \\ &\quad \left.+2\int_0^\infty\{\cos(h\xi)/\xi J_{2n-1}(c\xi)\int_0^\infty M_1(\zeta, x)d\zeta\}d\xi+2\int_0^\infty\{\sin(h\xi)/\xi J_{2n-1}(c\xi)\int_0^\infty M_2(\zeta, x)d\zeta\}d\xi\right] \\ h_n(x) &= -1/4\pi\{[(b-a)/2]^n/[(x+a)(x+b)]^{1/2}\{(a+b+2x)/2+[(x+a)(x+b)]^{1/2}\}^n \\ &\quad +[(b-a)/2]^n/[(b-x)(a-x)]^{1/2}\{(a+b-2x)/2+[(b-x)(a-x)]^{1/2}\}^n\} \\ &\quad +2\int_0^\infty[\cos(h\xi)/\xi J_n\{(b-a)\xi/2\}\sin\{(a+b)\xi/2-(n\pi/2)\}\int_0^\infty M_1(\zeta, x)d\zeta]d\xi \\ &\quad +2\int_0^\infty[\sin(h\xi)/\xi J_n\{(b-a)\xi/2\}\sin\{(a+b)\xi/2-(n\pi/2)\}\int_0^\infty M_2(\zeta, x)d\zeta]d\xi\} \\ k_n(x) &= (2n-1)\left[-1/2\pi\{c^{2n-1}(x^2-c^2)^{-1/2}\{x+(x^2-c^2)^{1/2}\}^{-(2n-1)}\sin[(2n-1)\pi/2]\}\right. \\ &\quad \left.+2\int_0^\infty[\cos(h\xi)/\xi J_{2n-1}(c\xi)\int_0^\infty M_1(\zeta, x)d\zeta]d\xi+2\int_0^\infty[\sin(h\xi)/\xi J_{2n-1}(c\xi)\int_0^\infty M_2(\zeta, x)d\zeta]d\xi\right] \\ l_n(x) &= -1/4\pi\{\cos(n\pi/2)[[(b-a)/2]^n\cos(n\pi/2)/[(x+b)(x+a)]^{1/2}\{(a+b+2x)/2+[(x+a)(x+b)]^{1/2}\}^n \\ &\quad +\sin\{n\sin^{-1}[(a+b-2x)/(b-a)]/[(b-x)(a-x)]^{1/2}\}+\sin(n\pi/2)[[(b-a)/2]^n\sin(n\pi/2) \\ &\quad /[(x+b)(x+a)]^{1/2}\{(a+b+2x)/2+[(x+a)(x+b)]^{1/2}\}^n\}-\cos\{n\sin^{-1}[(a+b-2x)/(b-a)] \\ &\quad /[(b-x)(a-x)]^{1/2}\}+2\int_0^\infty[\cos(h\xi)/\xi J_n\{(b-a)\xi/2\}\sin\{(a+b)\xi/2-(n\pi/2)\}\int_0^\infty M_1(\zeta, x)d\zeta]d\xi \\ &\quad +2\int_0^\infty[\sin(h\xi)/\xi J_n\{(b-a)\xi/2\}\sin\{(a+b)\xi/2-(n\pi/2)\}\int_0^\infty M_2(\zeta, x)d\zeta]d\xi\} \end{aligned}$$

文 献

- (1) 岡村, 線形破壊力学入門, (1976), 136-141, 培風館.
- (2) Murakami, Y. (編), *Stress Intensity Factors Handbook*, 1(1987), 187-228, Pergamon Press.
- (3) Delale, F. and Erdogan, F., The Problem of Internal and Edge Cracks in an Orthotropic Strip, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **44**(1977), 237-242.
- (4) 石田・寺田, 内部き裂を持つ有限板の応力拡大係数, 機論, **43**-374(1977), 3636-3641.
- (5) Yau, W. F., Axisymmetric Slipless Indentation of an Infinite Elastic Cylinder, *SIAM J. Appl. Math.*, **15**(1967), 219-227.
- (6) 森口・宇田川・一松, 数学公式III, (1987), 202, 岩波書店.
- (7) Isida, M., Analysis of Stress Intensity Factors for the Tension of a Centrally Cracked Strip with Stiffened Edges, *Eng. Fract. Mech.*, **5**(1973), 647-665.