均質化法を用いた複合材料の弾塑性解析*
(第1報, 定式化)寺田 賢二郎^{*1}, 弓 削 康 平^{*2}, 菊 池 昇^{*3}Elasto-Plastic Analysis of Composite Materials
Using the Homogenization Method
(1st Report, Formulation)

Kenjiro TERADA, Kohei YUGE and Noboru KIKUCHI

The homogenization method is applied to the analysis of a composite material whose constituents reveal elastoplastic character as well as finite deformation. Since the updating Lagrangian scheme with rate forms guarantees the *instantaneous linearity* of the governing equations, it is possible to use the separation of variables in the two-scale asymptotic expansion of the solution. Furthermore, the updating scheme also enables us to utilize the microscopic stress field, which is obtained in a localization process, in the judgement of plastic failure. A review of the general procedure for the asymptotic homogenization method supports our present discussion. Although the large deformation and small strain are assumed as the mechanical responses of both macro and microscopic structures of a composite, the periodicity assumption is not violated in a local region. Thus the total deformation of the composite can be obtained as accumulation of a series of "instantaneous" solutions.

Key Words: Composite Material, Nonlinear Problem, Plasticity, Finite Deformation Theory, Homogenization Method

1. 緒 言

1・1 複合材の力学と均質化法 不均質な材料を力学的にどう扱うのかという課題は古くから理論力学の分野で研究され, Eshelby, Hashin, Tsai, Hill⁽¹⁾らの先駆的な研究者によって1960年代から70年代前半にかけて複合材の力学として最盛期をむかえた。これは, 材料力学的なものからエネルギー原理を用いたような理論力学的なものまでさまざまな形をとっているが, 複合材を等価な均質体で置き換えることを第一の目的としているといえる。このような力学的なアプローチを含め, “等価な材料定数を求める”ための方法論は広い意味で「均質化法」と呼ばれている。本研究では, 均質化法を, 2変数によって支配方程式を記述し, 漸近展開形の解を探すもので, 数学的整合性を保持しながら微視(ミクロ)構造と巨視(マクロ)構造を結びつけることによって等価な均質体の支配方程式を誘

導する狭い意味の方法論としよう。ミクロとマクロを漸近展開の式から結びつけるという点で, これまで力学分野で議論されてきた方法論とは多少異なるものである。

均質化法は, Keller⁽²⁾が漸近展開法の一つであるマルチスケール法を用いたときの考え方を1973年にPapanicolaouらに紹介し, 複合材の力学の分野への応用を示唆したことに端を発しているとされている。それをもとにLions⁽³⁾を中心とするフランスの研究グループが, 複合材料もしくは多孔質体の力学的な問題を数学的に取扱おうとする組織的な動きを見せ, 理論的に発展を遂げてきた。初期の頃から精力的に研究を続けてきたSanchez-Palenciaの1980年の著書⁽⁴⁾のなかには, 多くの力学の分野への適用例が見られる。同じ頃, アメリカのBabuska⁽⁵⁾も理論上および数値解析の観点から精力的にこうした研究に携わり, 「均質化法(homogenization method)」は, 彼によって命名された。また, ほとんど同じ時期, 旧ソ連でも独自に研究が進められ, Bakhvalov⁽⁶⁾を中心とするグループがその発展に大きな功績を残している。

1・2 均質化法と非線形問題 均質化法がもともと複合材の力学を発端としたものであるにもかかわらず, その理論的な裏付けの多くが数学的な興味として

* 原稿受付 1995年2月16日。

^{*1} 正員, The university of Michigan, Department of Mechanical Engineering and Applied Mechanics, GSRA (Ann Arbor, MI48109-2125, USA).^{*2} 正員, 成蹊大学工学部 (〒180 武蔵野市吉祥寺北町3-3-1)。^{*3} The university of Michigan, Department of Mechanical Engineering and Applied Mechanics, (Ann Arbor, MI48109-2125, USA).

一人歩きした観も否めない。ここに挙げる文献も抽象的な数学理論を紹介するにとどまっているものが多い。工学の問題や非線形問題に対しても数学的には完結しているようであるが、直接的な適用例はあまりみられない。

Tartar⁽⁷⁾ は、非線形偏微分方程式についての均質化法の数学理論を構築しているが、局所形で記述され、変分法による定式化には至っていない。1986年までの均質化法の可能性と限界をまとめた文献(8)や、(9)にも非線形均質化法についての記述は見られない。また、Duvaut⁽¹⁰⁾ らは、いち早く均質化法の理論を数値的に実証するとともに、ポストプロセスである“局所化”(localization)過程の利点を強調した。また、その拡張を行った Léné⁽¹¹⁾ らは繊維強化材の微視的なダメージパラメータを通して考慮した数値解析アルゴリズムを紹介している。Suquet は、同様な熱力学的アプローチによって弾塑性などの非線形材料からなる複合材の均質化法を展開し、微視構造が塑性変形や破断などのダメージを受ける過程などをエネルギーの逸散過程として捉えて理論を構築している。彼の文献(12)には微視的に流れ則が成り立つという仮定のもとで、巨視的な流れ則を近似的に求める方法が一例として紹介されているが、そこでの方法論の多くは抽象的な記述にとどまっている。また、1991年に Guedes と菊池は、文献(13)の中で均質化法の有限要素解析理論とともに具体的なアルゴリズムと多くの例題を提示し、均質化法の工学分野での普及に貢献した。その後、熱弾性、浸透流れ等の問題への拡張を行い、同時に大変形を考慮した(熱)弾塑性の問題にも取り組んでいるが、均質化法の工学における非線形問題への適用には多くの問題点が残されており、その方法論はいまだ確立されているとはいえないのが現状である。

本研究では、大変形・微小ひずみを仮定して、均質化法による全体構造物の非線形挙動を追うための定式化を示す。まず、均質化法の一般的手続きについて述べ、増分(または速度)形による更新 Lagrangian の定式化において、線形弾性体からなる複合材に対する均質化法を拡張できることを示す。そして、複合材の構成材料が古典的な弾塑性構成則(関連流れ則と等方ひずみ硬化)と von-Mises の降伏条件に従うような複合材を考え、漸近展開による均質化法を適用する。そこでは、Tasi-Hill 流の巨視的な降伏条件、すなわち、“均質化された”降伏条件を導くことはせずに、近似的に個々の構成材料の座標更新前の微視的応力を用いる。したがって、構造物全体の平均的な力学挙動を求めることは、更新前の“均質化された剛性”を求める問題に帰着

することが示される。ここでの応力は均質化法の利点のひとつである局所化過程によって得られるもので、その妥当性も併せて検討する。

2. 均質化法の一般的手続き

複合材を連続体とみなして、一般的な(初期値)境界値問題を考える。まず、均質化法の通常の出発点として次の仮定が置かれる。

仮定1：複合構造は周期的に全領域 Ω 内に分布している。

この仮定によって複合材のもつ力学的性質は、1周期だけ取り出すことによって完全に規定されることになる。つまり、1周期を単位として分割された領域 ω を何倍かすることによって領域 Ω の形状を再生するような幾何学的性質をもっている。次に、

仮定2：複合構造領域 ω は非常に小さい。

によって、 ω は Ω 内の物質点とみなすことができる。ここで、微小な領域 ω を Ω と同程度の大きさに拡大した領域 Y を考え、 $\omega = \varepsilon Y$ という関係を与えると、 ω を測っていた尺度 x も Y 内では $y = x/\varepsilon$ と拡大される。すなわち、 y は ε のオーダーで空間的に変化する物理量を測る尺度であるといえる。ここでの領域 εY は非常に小さな領域なので、 y は“微視的変数”、もとの尺度 x は“巨視的変数”と呼ばれている。また、拡大された領域 Y は、通常ユニットセルと呼ばれている。

さて、問題の領域 Ω は周期 εY の繰返しによって再生されるので、設定された問題の解は周期構造の繰返し数に依存する。上述の仮定のもとでは、繰返し数の逆数のオーダーをもつパラメータ ε を通して複合構造の影響が反映されるものと解釈できるので、以後、このことを式中で上付きの添字 ε で表すこととする。また、与えられた境界値問題の各量は領域 Y 内で周期的な力学挙動をすると考えられ、任意の $x \in \Omega$ について、変数 $y \in Y$ に関して Y -periodic であると言われる。

Y -periodic な関数は、いくつかの材料からなる領域 Y 内で急激に値を変えるので、あらかじめ解の形を次のように仮定する。

仮定3：考えている境界値問題の解 u^ε は、

$$u^\varepsilon = u^0(x, y) + \varepsilon u^1(x, y) + \varepsilon^2 u^2(x, y) + \dots \quad (1)$$

の形で求められる。

これは、時間的な乱れを扱うときに regular perturbation theory においてよく用いられる手法を、空間的な“乱れ”に応用したものであり、支配方程式系の解が

2変数表示による漸近展開の形で表されると想定するのである。つまり、解はパラメータ ε に関する線形結合の形をとり、各オーダの乱れの重ね合わせとして求められるのである。

こうして漸近展開形の解を支配方程式へ代入し、 ε の指数のオーダに依ってまとめる作業に移ることになるのだが、ここまでの仮定の中では ε の具体的な大きさは規定されておらず、任意である。このことは、 ε がどんなに小さくても関係式が成り立ち、各スケールの“空間”において支配方程式が成り立つことを要求する(または、ポテンシャルエネルギーが最小化されねばならない、としても同じことである)。

このようにして、各オーダの方程式について、 ε の指数が低い方程式の高いオーダの解から逐次的に解を求めていくという最終過程に移る。ここでは、線形性を利用した解の「変数分離」によって境界値問題を各領域 Y 内の微視的問題と Ω 内の巨視的問題に分けるという巧妙な手段が取られる。

以上の均質化法の一般的な手続きから、恒等的あるいは瞬間的にでも線形性が成り立つならば、どのような材料非線形性をもっているても、文献(13)で紹介されているような線形弾性体に対する均質化法と同様の方法が適用できる。非線形材料の例として2章で挙げる弾塑性体の複合材に対する均質化法においても、増分形と更新 Lagrangian 形の定式化に依れば、接線剛性の均質化の過程に置き換えることが可能になる。しかしながら、大ひずみを含むような幾何学的非線形の問題では、均質化法の数学理論でも未解決な局所不安定問題を検討しなければならないので注意が必要である。

3. 非線形複合材の均質化法の定式化

3.1 問題設定 先に定義された座標系 x と y は直交デカルト座標系であるとし、図1のような複合材の連続体モデルを想定する。この全領域に物体力 f^e が、境界 $\partial\Omega$ の一領域 Γ_t に表面力 $\hat{t}$ が作用し、残りの境界 Γ_0 には斉次の変位境界が与えられているものとする。いま、平衡状態にある応力速度は、平衡方程式

Fig. 1 Composite structure with periodic microstructure

を満たしているので、

$$\nabla_x \cdot \mathbf{s}^{\varepsilon^T} + \rho_0 \dot{\mathbf{f}}^{\varepsilon} = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega^{\varepsilon} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \mathbf{s}^{\varepsilon^T} \mathbf{N} = \hat{\mathbf{T}}_1 & \text{on } \Gamma_t \\ \dot{\mathbf{u}}^{\varepsilon} = \mathbf{0} & \text{on } \Gamma_0 \end{cases} \quad (3)$$

なる速度形の境界値問題を設定する。ここで、公称応力 $\mathbf{s}^e$ 、境界上の法線ベクトル $\mathbf{N}$ 、応力ベクトル $\hat{\mathbf{T}}_1$ 、変位ベクトル $\mathbf{u}^e$ 、密度 ρ_0 等は時刻 $t=t_0$ の基準配置を参照して定義されているものとする。公称応力は、第2種 Piola-Kirchhoff 応力 $\mathbf{S}^e$ とは、 $\mathbf{s}^e = \mathbf{J}^e (\mathbf{F}^e)^{-1} \boldsymbol{\sigma}^e$ と

$$\mathbf{S}^e = \mathbf{J}^e (\mathbf{F}^e)^{-1} \boldsymbol{\sigma}^e (\mathbf{F}^e)^{-T} \quad (4)$$

によって Cauchy 応力 $\boldsymbol{\sigma}^e$ を通して結びつけられるので、 $\mathbf{S}^e$ と $\mathbf{s}^e$ の関係として

$$\mathbf{s}^e = \mathbf{S}^e \mathbf{F}^{\varepsilon^T} \quad (5)$$

を見い出すことができる。したがって、式(2)と式(3)は、

$$\nabla_x \cdot (\dot{\mathbf{S}}^e \mathbf{F}^{\varepsilon^T} + \mathbf{S}^e \dot{\mathbf{F}}^{\varepsilon^T}) + \rho_0 \dot{\mathbf{f}}^{\varepsilon} = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega^{\varepsilon} \quad (6)$$

$$\begin{cases} (\dot{\mathbf{S}}^e \mathbf{F}^{\varepsilon^T} + \mathbf{S}^e \dot{\mathbf{F}}^{\varepsilon^T})^T \mathbf{N} = \dot{\hat{\mathbf{T}}}_1 & \text{on } \Gamma_t \\ \dot{\mathbf{u}}^{\varepsilon} = \mathbf{0} & \text{on } \Gamma_0 \end{cases} \quad (7)$$

と書き直すことができる。ここに、 $\mathbf{F}^e$ は変形こう配テンソルであり、Green-Lagrange のひずみ $\mathbf{E}^e$ を用いて、この境界値問題の仮想仕事式は、基準形態 Ω_0 において次のようになる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^e} \mathbf{S}^e : \delta \dot{\mathbf{E}}^e d\Omega + \int_{\Omega^e} \mathbf{S}^e (\dot{\mathbf{F}}^{\varepsilon^T} \delta \dot{\mathbf{F}}^{\varepsilon}) d\Omega \\ & \quad \forall \delta \dot{\mathbf{u}}^e, \delta \dot{\mathbf{E}}^e, \delta \dot{\mathbf{F}}^e \\ & = \int_{\Omega^e} \rho_0^e \dot{\mathbf{f}}^e \cdot \delta \dot{\mathbf{u}}^e d\Omega + \int_{\Gamma_t} \hat{\mathbf{T}}_1 \cdot \delta \dot{\mathbf{u}}^e dS \quad (8) \end{aligned}$$

ここで、 $\mathbf{S}^e$ の対称性が考慮してあり、 $:$ は2階のテンソルの内積を表す。この仮想仕事式は、後述する弾塑性体の応力速度・ひずみ速度関係式(構成式)を導入することによって速度を未知変数として解くことが可能になる。

3.2 更新 Lagrangian による定式化⁽¹⁴⁾ 更新 Lagrangian 形の定式化を可能にするために、現時刻 t を基準配置とした、時刻 $\tau (\geq t)$ での状態を考えて、各量を添字 t を用いた相対的なもの書き直しておく。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^e} \dot{\mathbf{S}}_t^e(\tau) : \delta \dot{\mathbf{E}}_t^e(\tau) d\Omega \\ & + \int_{\Omega^e} \mathbf{S}_t^e(\tau) : (\dot{\mathbf{F}}_t^{\varepsilon^T}(\tau) \delta \dot{\mathbf{F}}_t^e(\tau)) d\Omega \\ & = \int_{\Omega^e} \rho_{0,t}^e(\tau) \dot{\mathbf{f}}_t^e(\tau) \cdot \delta \dot{\mathbf{u}}_t^e(\tau) d\Omega \\ & + \int_{\Gamma_t} \hat{\mathbf{T}}_{1,t}(\tau) \cdot \delta \dot{\mathbf{u}}_t^e(\tau) dS \quad (9) \end{aligned}$$

そして、 $\tau \rightarrow t$ の極限をとることにより、 $\mathbf{F}_t^e(t) = \mathbf{I}$ となって、更新 Lagrangian 形の仮想仕事式

$$\int_{\Omega} \dot{\mathbf{S}}_i^e : \delta \mathbf{D}_i^e d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_i^e : \{(\mathbf{L}_i^e)^T \delta \mathbf{L}_i^e\} d\Omega \\ \forall \delta \dot{\mathbf{u}}^e, \delta \dot{\mathbf{E}}^e, \delta \dot{\mathbf{F}}^e \\ = \int_{\Omega} \rho_i^e \dot{\mathbf{f}}_i^e \cdot \delta \dot{\mathbf{u}}_i^e d\Omega + \int_s \dot{\mathbf{T}}_{1i}^e \cdot \delta \dot{\mathbf{u}}_i^e ds \quad \dots\dots (10)$$

を得る。ここで、 $\mathbf{L}_i^e$ は速度こう配テンソル、 $\mathbf{D}_i^e$ はその対称部分であり、微小ひずみを仮定して

$$\dot{\mathbf{E}}_i^e(t) = \mathbf{D}_i^e(t) \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$\dot{\mathbf{F}}_i^e(t) = \mathbf{L}_i^e \mathbf{F}_i^e(t) = \mathbf{L}_i^e \quad \dots\dots\dots (12)$$

などの関係式を用いた。また、 $\dot{\mathbf{S}}_i^e$ はTruesdellの応力速度と呼ばれ、

$$\boldsymbol{\tau}_i^e(\tau) = \mathbf{J}_i^e(\tau) \boldsymbol{\sigma}_i^e(\tau) \quad (t \leq \tau) \quad \dots\dots\dots (13)$$

で定義される相対 Kirchhoff 応力を導入することにより、その Oldrord の応力速度 $\dot{\boldsymbol{\tau}}_{i(o)}^e$ に等しいことが知られている。すなわち、Truesdell 応力速度は Cauchy 応力の Oldrord 速度 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{i(o)}^e$ とともに、

$$\dot{\mathbf{S}}_i^e(t) = \dot{\boldsymbol{\tau}}_{i(o)}^e(t) = \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{i(o)}^e + \boldsymbol{\sigma}_i^e \text{tr } \mathbf{D}_i^e \quad \dots\dots\dots (14)$$

と表される。Oldrord 速度 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{i(o)}^e$ と Jaumann 速度 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{i(j)}^e$ との関係式

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{i(j)}^e = \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{i(o)}^e + \mathbf{D}_i^e \boldsymbol{\sigma}_i^e + \boldsymbol{\sigma}_i^e \mathbf{D}_i^e \quad \dots\dots\dots (15)$$

を用いて表示しておくと、

$$\dot{\mathbf{S}}_i^e(t) = \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{i(j)}^e - \mathbf{D}_i^e \boldsymbol{\sigma}_i^e - \boldsymbol{\sigma}_i^e \mathbf{D}_i^e + \boldsymbol{\sigma}_i^e \text{tr } \mathbf{D}_i^e \\ = \dot{\boldsymbol{\tau}}_{i(j)}^e - \mathbf{D}_i^e \boldsymbol{\sigma}_i^e - \boldsymbol{\sigma}_i^e \mathbf{D}_i^e \quad \dots\dots\dots (16)$$

となる。 $\dot{\boldsymbol{\tau}}_{i(j)}^e$ は相対 Kirchhoff 応力の Jaumann 速度で構成則導入の際に用いる。また、 $\dot{\mathbf{E}}_i^e = \mathbf{F}_i^T \mathbf{D}_i^e \mathbf{F}_i^e$ と $\mathbf{F}_i^e = \mathbf{I}$ から、

$$\dot{\mathbf{e}}_i^e \equiv \mathbf{D}_i^e = \dot{\mathbf{E}}_i^e \quad \dots\dots\dots (17)$$

である。以後、下付の添字 i は省略する。

3・3 弾塑性構成式 複合材中の個々の弾塑性体の応力速度・ひずみ速度関係式(構成式)を導入する際に、次の仮定を置く。

- (1) 等方ひずみ硬化モデルとして扱える。
- (2) 構成材料は関連流れ則に従い、大変形に拡張できる。
- (3) 複合構造は全体構造に比べて非常に小さく、局所的に周期を保ちながら領域 Ω に広がっているとみなせる。
- (4) 弾性ひずみは微小である。

また、関連流れ則において塑性ポテンシャルと同一視される降伏関数の関数としては、von-Mises もを用いる。

求めたい解は、2変数表示の漸近展開形

$$\dot{\mathbf{u}}^e = \dot{\mathbf{u}}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon \dot{\mathbf{u}}^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon^2 \dot{\mathbf{u}}^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots \\ \dots\dots\dots (18)$$

の形として求められる。ここで、 Y -periodic な関数 $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ の微分演算は、

$$\nabla \cdot \phi^e(\mathbf{x}) = \nabla_x \cdot \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \frac{1}{\varepsilon} \nabla_y \cdot \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \dots (19)$$

で与えられ、下付の添字 x と y は、微分の際の変数を明示するものである。式(17)をひずみ速度の定義式に代入することによって

$$\mathbf{D}(\dot{\mathbf{u}}^e) = \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{D}_y(\dot{\mathbf{u}}^0) + [\mathbf{D}_x(\dot{\mathbf{u}}^0) + \mathbf{D}_y(\dot{\mathbf{u}}^1)] \\ + \varepsilon [\mathbf{D}_x(\dot{\mathbf{u}}^1) + \mathbf{D}_y(\dot{\mathbf{u}}^2)] + \dots \quad \dots\dots\dots (20)$$

が得られる。ここで、例えば $\mathbf{D}_y(\dot{\mathbf{u}}^1)$ は、

$$\mathbf{D}_y(\dot{\mathbf{u}}^1) = \frac{1}{2} (\nabla_y \dot{\mathbf{u}}^1 + \dot{\mathbf{u}}^1 \nabla_y) \quad \dots\dots\dots (21)$$

である。したがって、各オードのひずみ速度を

$$\begin{cases} \mathbf{D}^{-1} = \dot{\mathbf{e}}^{-1} = \mathbf{D}_y(\dot{\mathbf{u}}^0) \\ \mathbf{D}^0 = \dot{\mathbf{e}}^0 = \mathbf{D}_x(\dot{\mathbf{u}}^0) + \mathbf{D}_y(\dot{\mathbf{u}}^1) \\ \mathbf{D}^1 = \dot{\mathbf{e}}^1 = \mathbf{D}_x(\dot{\mathbf{u}}^1) + \mathbf{D}_y(\dot{\mathbf{u}}^2) \\ \dots \end{cases} \quad \dots\dots\dots (22)$$

と定義しておく。

方程式が成り立つ現時刻において、全応力は既知であるので、漸近展開を施す必要はない。ただし、時刻 $t + \Delta t$ における全真応力は

$$\boldsymbol{\sigma}^e(t + \Delta t) = \boldsymbol{\sigma}^e(t) + \dot{\boldsymbol{\sigma}}^e(t) \Delta t \quad \dots\dots\dots (23)$$

のように計算される。降伏判定の際には、この全応力で評価するべきだが、弾性の範囲内では真応力 $\boldsymbol{\sigma}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ が $\boldsymbol{\sigma}^e$ のよい近似を与えることが知られている。したがって、個々の構成材料は初期降伏の前、または除荷の際には、漸近展開式

$$\boldsymbol{\sigma}^e = \frac{1}{\varepsilon} \boldsymbol{\sigma}^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \boldsymbol{\sigma}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon \boldsymbol{\sigma}^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots \\ \dots\dots\dots (24)$$

における、零階のオードの応力 $\boldsymbol{\sigma}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ を用いるのが妥当であるといえる。式(24)は弾性係数テンソルを $\mathbf{c}_e^e$ として線形弾性体の構成則

$$\boldsymbol{\sigma}^e = \mathbf{c}_e^e \boldsymbol{\varepsilon}_e^e \quad \dots\dots\dots (25)$$

を用いて、式(21)と同様にして $\boldsymbol{\varepsilon}_e^e$ の漸近展開を求めることによって得られる。ここに、添字 e は弾性変形に関することを示すものである。

はじめに挙げた構成式に関する仮定から、Cauchy (真) 応力の Jaumann 速度 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{(j)}^e$ を用いて、大変形に拡張された Prandtl-Reuss の式は

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{(j)}^e = \mathbf{c}_e^e \left(\mathbf{D}^e - \alpha \frac{\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}'^e \cdot \mathbf{c}_e^e \mathbf{D}^e)}{4H'^e(\bar{\sigma}^e)^2 + \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}'^e \cdot \mathbf{c}_e^e \boldsymbol{\sigma}'^e)} \boldsymbol{\sigma}'^e \right) \\ \dots\dots\dots (26)$$

と表されるであろう。ここに、

$$\boldsymbol{\sigma}'^e = \boldsymbol{\sigma}^e - \frac{1}{3} (\text{tr } \boldsymbol{\sigma}^e) \mathbf{I} \quad \dots\dots\dots (27)$$

$$\bar{\sigma}^e = \sqrt{\frac{3}{2} \text{tr}[(\boldsymbol{\sigma}'^e)^2]} \quad \dots\dots\dots (28)$$

であり、ひずみ硬化係数 H^e も一軸ひずみ硬化曲線の接線係数 E_f^e を使って

$$H^e = \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\epsilon}^p} = \frac{E^e E_f^e}{E^e - E_f^e} \dots\dots\dots (29)$$

で定義する。また、 α は塑性のとき 1 で、それ以外 0 であるような指標で、ひずみ速度(または応力速度)の関数である。塑性判定において真応力 $\sigma^0(x, y)$ を用いることは上で述べたが、降伏した状態の全応力とは連続でなければならない。したがって、塑性変形中も真応力増分 $\dot{\sigma}^0 \Delta t$ の漸近展開における零階のオーダーの増分を用いるべきである。すなわち、速度(増分)形の構成式と漸近展開式(24)に依って得られる現時刻での全真応力

$$\sigma^0(t + \Delta t) = \sigma^0(t) + \dot{\sigma}^0(t) \Delta t \dots\dots\dots (30)$$

を、式(26)中の各量を表す式(27)、(28)に用いるのである。すなわち、降伏関数は

$$F(\sigma^0, \bar{\sigma}^0) = 0 \dots\dots\dots (31)$$

の形をしていて、von-Mises の降伏条件による場合、

$$\sqrt{\frac{3}{2} \text{tr}(\sigma_{ij}^0 \sigma_{ij}^0)} \leq \bar{\sigma} = H^e(\bar{\epsilon}^0) \dots\dots\dots (32)$$

である。ここに、 $H^e(\bar{\epsilon}^0)$ は個々の構成材料の弾塑性応力・ひずみ一軸応答関数である。このようにして得られる式(26)の近似を、あらためてインデックス表示で書くと、

$$\dot{\sigma}_{ij}^0 = \left(c_{ijlm}^{ee} - \alpha \frac{C_{ijpq}^{ee} \sigma_{pq}^0 C_{rsim}^{ee} \sigma_{rs}^0}{4H^e(\bar{\sigma}^0)^2 + \sigma_{pq}^0 C_{pqrs}^{ee} \sigma_{rs}^0} \right) \dot{\epsilon}_{lm}^0 \dots\dots\dots (33)$$

となる。ここで、 $\dot{\epsilon}_{lm}^0 = D_{lm}^0$ を用いた。関数 α の存在により、この応力速度・ひずみ速度関係式(33)は、厳密に言えば線形ではない。しかしながら、有限要素法において差分近似を導入した際に、関数 α は 2 時刻での全応力の関数に置き換えられる。よって、ひずみ増分に関する線形性は成り立つものと仮定して議論を進めることにする。こうして、2 章で述べたように、未知変数である速度関数の漸近展開式(18)の各項の変数分離が可能となる。

また、式(33)内の Cauchy 応力の Jaumann 速度の代わりに相対 Kirchhoff 応力のそれで置き換えることにする。つまり、

$$\dot{\tau}_{ij}^0 = c^{ee} \dot{\epsilon}^e \dots\dots\dots (34)$$

とする。この二つの応力速度間には

$$\dot{\tau}_{ij}^0 = \dot{\sigma}_{ij}^0 + \sigma^e \text{tr} \dot{\epsilon}^e \dots\dots\dots (35)$$

なる関係があるので、弾性変形を無視できる場合には、塑性変形の非圧縮性を仮定することと等価である。仮想仕事式(10)内の Truesdell 応力速度には、式(16)と

同様の関係

$$\begin{aligned} \dot{S}^0(t) &= \dot{\sigma}_{ij}^0 - \dot{\epsilon}^0 \sigma^0 - \sigma^0 \dot{\epsilon}^0 + \sigma^0 \text{tr} \dot{\epsilon}^0 \\ &= \dot{\tau}_{ij}^0 - \dot{\epsilon}^0 \sigma^0 - \sigma^0 \dot{\epsilon}^0 \dots\dots\dots (36) \end{aligned}$$

を見出すことができる。こうすることで、仮想仕事式の対称性が保持され、変分原理に基づく有限要素法の定式化が可能となる。言うまでもなく、ここでの全応力 σ^0 も前述のものと同一である。

3・4 微視的方程式と巨視的方程式の誘導 仮想仕事式(10)は、式(36)などを用いて、

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega^e} (\dot{\tau}_{ij}^0 - \dot{\epsilon}^e \sigma^e - \sigma^e \dot{\epsilon}^e) : \delta \dot{\epsilon}^e d\Omega \\ &+ \int_{\Omega^e} \sigma^e : \{L^{er} \delta L^e\} d\Omega \quad \forall \delta \dot{\epsilon}^e, \delta \dot{u}^e \\ &= \int_{\Omega^e} \rho^e \dot{f}^e \cdot \delta \dot{u}^e d\Omega + \int_s \hat{T}_1 \cdot \delta \dot{u}^e ds \dots\dots\dots (37) \end{aligned}$$

となる。さらに、構成式(34)と

$$b^e \dot{\epsilon}^e \equiv \dot{\epsilon}^e \sigma^e + \sigma^e \dot{\epsilon}^e \dots\dots\dots (38)$$

で定義される演算子を用いると

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega^e} a^e \dot{\epsilon}^e : \delta \dot{\epsilon}^e d\Omega \\ &+ \int_{\Omega^e} \sigma^e : \{L^{er} \sigma^e\} d\Omega \quad \forall \delta \dot{u}^e \\ &= \int_{\Omega^e} \rho^e \dot{f}^e \cdot \delta \dot{u}^e d\Omega + \int_s \hat{T}_1 \cdot \delta \dot{u}^e ds \dots\dots\dots (39) \end{aligned}$$

となる。ここに、

$$a^e \equiv c^e - b^e \dots\dots\dots (40)$$

である。

速度ならびにひずみ速度の漸近展開形式(18)と式(20)をそれぞれ式(39)に代入すると、線形弾性体とまったく同様の手順で、微視的方程式

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} [a(D_x(\dot{u}^0) + D_y(\dot{u}^1)) D_y(\dot{w})] d\Omega \quad \forall \dot{w} = \dot{w}(y) \\ &+ \int_{\Omega} \sigma^0 (D_x(\dot{u}^0) + D_y(\dot{u}^1))^T D_y(\dot{w}) d\Omega = 0 \dots\dots\dots (41) \end{aligned}$$

と巨視的方程式

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} a(D_x(\dot{u}^0) + D_y(\dot{u}^1)) : D_x(\dot{v}) d\Omega \quad \forall \dot{v} = \dot{v}(x) \\ &+ \int_{\Omega} \sigma^0 (D_x(\dot{u}^0) + D_y(\dot{u}^1))^T D_x(\dot{v}) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \rho^0 \dot{f} \cdot \dot{v} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \hat{T}_1(t) \cdot \dot{v} ds \dots\dots\dots (42) \end{aligned}$$

を得る。ここで、 $\dot{u}^0$ は x のみの関数であり、全体構造物の平均的な挙動を表すことは、自然に誘導される。また、式(41)における $\dot{w}(y) = \delta u^1(y)$ は、 Y -periodic な許容関数で、式(42)においては $\dot{v}(x) = \delta u^0(x)$ としてある。

さて、次に「変数分離」の過程に移るが、以後は便宜的にインデックス表示を用いることにする。領域 Y 内で定義され、複合構造の特性を表す Y -periodic な関

数 χ^{hh} についての方程式

$$\begin{aligned} & \int_Y a_{ijlm} D_{yilm}(\chi^{hh}) D_{yij}(\dot{w}) dy \\ & + \int_Y (\sigma_{ij}^0 D_{yij}(\chi^{hh}) D_{yij}(\dot{w})) dy \quad \forall \dot{w}_i(\mathbf{y}) \\ & = \int_Y (a_{ijkh} D_{yij}(\dot{w}) + \sigma_{ph}^0 D_{ykh}(\dot{w})) dy \quad \cdots \cdots (43) \end{aligned}$$

の解の存在を認めると、線形性に注意して、微視的方程式(40)の解は、

$$\dot{u}_i^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\chi_i^{hh}(\mathbf{y}) D_{xkh}(\dot{\mathbf{u}}^0) + \tilde{u}_i^1(\mathbf{x}) \quad \cdots \cdots (44)$$

の形をしていることが確かめられる。ここに、 χ_i^{hh} は材料とユニットセルの幾何形状に依存する Y -periodic な関数で、特性変位関数(characteristic deformation)と呼ばれ、 $\tilde{u}_i^1$ は、 Y 内では定数である。また、式(44)がユニットセル内の方程式(41)の解であることを知るには、関数 $\Phi(x, y)$ に対する積分公式、

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega^\varepsilon} \Phi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) d\Omega = \frac{1}{|Y|} \int_Y \int_Y \Phi(x, y) dy d\Omega \quad \cdots \cdots (45)$$

も適用しなければならないこともつけ加えておく。

このようにして、微視的方程式(41)は、ユニットセルの式(43)を解くことに置き換えられ、巨視的方程式(42)は、式(44)と積分公式(45)を用いることで、

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[\frac{1}{|Y|} \int_Y (a_{ijkh} - a_{ijlm} D_{yilm}(\chi^{hh})) dy \right] \\ & \times D_{xij}(\dot{\mathbf{v}}) D_{xkh}(\dot{\mathbf{u}}^0) d\Omega + \int_{\Omega} \left[\frac{1}{|Y|} \int_Y (\sigma_{jh}^0 \delta_{ik} \right. \\ & \left. - \sigma_{jp}^0 D_{yip}(\chi^{hh})) dy \right] D_{xij}(\dot{\mathbf{v}}) D_{xkh}(\dot{\mathbf{u}}^0) d\Omega \\ & = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{|Y|} \int_Y \rho dy \right] \dot{f}_p \dot{v}_p d\Omega \\ & + \int_{\Gamma} \dot{T}_{1p} \dot{v}_p ds_x \quad \forall \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) \quad \cdots \cdots (46) \end{aligned}$$

と整理される。また、これは、

$$\begin{cases} a_{ijkh}^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y (a_{ijkh}^0 - a_{ijlm}^0 D_{yilm}(\chi^{hh})) dY \\ \pi_{ijkh}^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y (\delta_{ik} \sigma_{jh}^0 - \sigma_{jp}^0 D_{yip}(\chi^{hh})) dY \\ \rho^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y \rho^0 dY \end{cases} \quad \cdots \cdots (47)$$

で定義される各量を計算したのちに得られる

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (a_{ijkh}^H + \pi_{ijkh}^H) D_{xij}(\dot{\mathbf{v}}) D_{xkh}(\dot{\mathbf{u}}^0) d\Omega \\ & = \int_{\Omega} \rho^H \dot{f}_p \dot{v}_p d\Omega + \int_{\Gamma} \dot{T}_{1p}(t) \dot{v}_p ds_x \quad \forall \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) \\ & \quad \cdots \cdots (48) \end{aligned}$$

と書き直しておく。これは、平均的な速度 $\dot{\mathbf{u}}^0$ についての仮想仕事式である。

3.5 局所化 微視的および巨視的な方程式の両

方の解を用いて局所的な応力速度を Y 内で求める過程である。求めた応力速度は真の全応力に加算され、次の時刻 $t + \Delta t$ での塑性判定等に用いられる。

まず、ある物質点 $\mathbf{x}$ における式(48)の解 $\dot{\mathbf{u}}^0$ と式(43)の解 χ^{hh} を用いて、ひずみ速度が

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{lm}^0 &= D_{xlm}(\dot{\mathbf{u}}^0) + D_{yilm}(\dot{\mathbf{u}}^1) \\ &= D_{xlm}(\dot{\mathbf{u}}^0) - D_{yilm}(\chi_i^{hh}) D_{xkh}(\dot{\mathbf{u}}^0) \quad \cdots \cdots (49) \end{aligned}$$

と計算される。そして、構成則(34)

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^e = c_{ijlm} \dot{\varepsilon}_{lm}^0 \quad \cdots \cdots (50)$$

を通じて相対 Kirchhoff の応力速度が得られる。続いて

$$\dot{S}_{ij}^0(t) = \dot{\varepsilon}_{ij}^e - \dot{\varepsilon}_{ip}^0 \sigma_{pj}^0 - \sigma_{ip}^0 \dot{\varepsilon}_{pj}^0 \quad \cdots \cdots (51)$$

を用いて Truesdell の応力速度が得られるので、第2種 Piola-Kirchhoff 応力が

$$S_{ij}^0(t + \Delta t) = S_{ij}^0(t) + \dot{S}_{ij}^0(t) \Delta t \quad \cdots \cdots (52)$$

によって計算される。真応力との関係式(4)は $\mathbf{F}^e = \mathbf{I}$ と $J^e = 1$ に注意すると $\mathbf{S}^e = \boldsymbol{\sigma}^e$ であるので最終的に

$$\sigma_{ij}^0(t + \Delta t) = S_{ij}^0(t + \Delta t) \quad \cdots \cdots (53)$$

として真の全応力が計算される。これは、次の時刻での von-Mises の降伏条件式(32)に用いられ、速度形の仮想仕事式の既知量として用いられる。微視的な変位(44)も同様に計算され、

$$u_i^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = u_i^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dot{u}_i^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta t \quad \cdots \cdots (54)$$

として次の時刻での領域 Y 、すなわちユニットセルの相対的形状が更新されることになる。

3.6 注意 考えている材料は非線形であり、各時刻でユニットセルの形状が更新されるので、周期性の仮定が危うくなる。しかしながら、実際の複合構造領域 εY は微小であり、ユニットセルに有限変形が生じていても局所的な周期性が成り立っているとしても差支えない。ただし、全領域において無限に多くのユニットセルの特性関数を評価する必要があるため、数値解析のうえでの困難が生じる。したがって、なんらかの近似的手段が必要になる。具体的な数値解析のアルゴリズムについては、続報にその詳細を述べることにする。

最後に、均質化法における複合構造単位に対する仮定、“周期的”であることと“微小である”ことは、今のところはずすことのできない必要条件である。これらの仮定を置かない均質化法の確立が期待される。

4. 結 語

非線形材料よりなる複合材に対して均質化法を適用した。1章で記述した通常の均質化法における基本仮定(1)、(2)、(3)によって、線形弾性体に対するものと同様の操作で定式化が可能であることが示された。

典型的な非線形材料として弾塑性体を想定し、大変形、微小ひずみを考慮した速度形の更新 Lagrangian 形の支配方程式を用いた。未知関数の漸近展開式をこれに入れることによって、均質化材料定数等の平均物性値を得ることができることを示した。そこでは、瞬間的な線形性が成り立つことを利用した。

また、塑性の判定には真応力の漸近展開の零階のオーダーのものを用いてもよいことが示された。すなわち、材料の複合構造が全体構造物の非線形力学挙動に及ぼす影響は、この微視的な応力によって反映されることになる。この微視的応力は均質化法のポストプロセスである局所化によって得られるもので、1周期を単位とする複合構造が小さいときにより近似を与える。

文 献

- (1) 例えば, Hashin, Z., Analysis of composite materials-A survey, *J. Appl. Mech.*, **50**(1983), 481-505(およびその参考文献).
- (2) 例えば, Keller, J. B. and Kogelman, S., Asymptotic solutions of initial value problems for nonlinear partial differential equations, *SIAM J. Appl. Math.*, **18**(1970), 748-758.
- (3) 例えば, Benssousan, A., Lions, J. L. and Papanicolaou, G., *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, (1978), North Holland, Amsterdam.
- (4) Sanchez-Palencia, E., Non-homogeneous Media and Vibration Theory, *Lecture Note in Physics*, No. 127 (1980), Berlin, Springer.
- (5) 例えば, Babuška, I., Homogenization Approach in Engineering, Lecture Note in Economics and Mathematical Systems, *Computing Methods in Applied Sciences and Engineering*, **134**(1976), 137-153, Springer, Berlin.
- (6) Bakhvalov, N. and Panasenko, G., *Homogenization : Averaging Processes in Periodic Media*, (1984), Kluwer Academic Pub.
- (7) Tartar, L., Nonlinear constitutive relations and homogenization, in *Contemporary developments in continuum mechanics and partial differential equations*, (1978), 472-484, North-Holland, Amsterdam.
- (8) Sanchez-Palencia, E., Homogenization in mechanics. A survey of solved and open problems, *Rendiconti del Seminario Matematico*, **44**-1(1986), 1-45.
- (9) Lions, J. -L., On some homogenization problems, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, **62**-5(1982), T251-T262.
- (10) 例えば, Duvaut, G. and Nuc, M., A New Method of Analysis of Composite Structure, *Ninth European Rotor Craft Forum*, Paper No. 88, (1983), Stresa, Italie.
- (11) 例えば, Léne, F., Damage Constitutive relations for composite materials, *Eng. Fract. Mech.*, **25**-5-6(1986), 713-728.
- (12) Suquet, P. -M. (Sawczuk, A. and Bianchi, G.編), Local and global aspects in the mathematical theory of plasticity, in *Plasticity Today*, (1985), 279-309 London; New York: Elsevier Applied Science Pub.
- (13) Guedes, J. M. and Kikuchi, N., Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **83**(1990), 143-198.
- (14) 久田, 非線形有限要素法のためのテンソル解析の基礎, (1992), 丸善.