モデル化した繊維強化複合材料の差分法による強度解析*

中 西 博^{*1}, 古 川 俊 雄^{*1}
小 谷 雅 司^{*2}, 鈴 木 恵^{*3}Elastic Analysis of Modeled Fiber-Reinforced Composite Material
by Finite Difference MethodHiroshi NAKANISHI, Toshio FURUKAWA,
Masashi ODANI and Megumu SUZUKI

Stress intensity factors of modeled fiber-reinforced composite materials are calculated by the finite difference method based on the linear two-dimensional theory of elasticity. In order to bound the region to be analyzed, cracks and fibers are periodically arrayed in an infinite region. The bounded region is conceptually divided into two regions by a square boundary centered at the crack tip. The general solution about the crack tip is employed to describe the displacement on and within the square boundary. The region outside the square is divided into finite differences. The effects of several parameters such as fiber length and crack length on the stress intensity factors are examined for two kinds of configuration.

Key Words: Elasticity, Fracture Mechanics, Stress Intensity Factor, Finite Difference Method, Fiber, Uniform Displacement

1. 緒 言

著者らは、以前に二次元等方性弾性体中のき裂の応力拡大係数を求める精度のよい差分法を提案している⁽¹⁾。それは、き裂先端近傍の応力特異性に対応できるように、き裂先端を中心とする適当な円を設け、その内部では弾性体の基礎式とき裂面の境界条件を満足する級数形の変位の一般解を用い、残りの領域には境界適合座標系⁽²⁾に基づく差分法を適用するものである。そして中央き裂を有する長方形板と内面に対称き裂を有する円筒の問題を取扱い、十分な精度の結果を得ている。

繊維強化複合材料は、構造部材として広く用いられており、繊維がき裂の挙動に及ぼす影響を知ることが重要となっている。これに関連する研究として、例えば、Greif-Sanders⁽³⁾は無限板中に単一繊維とそれに垂直な方向に存在するき裂の問題を、Muskhelishviliの複素変数手法を用いて解析し、導出される積分方程

式を数値的に解いている。また、陳・春山⁽⁴⁾は無限体中に一つの有限長さをもつ繊維がき裂に与える影響を体積力法を用いて検討している。

本研究では、繊維強化複合材料をモデル化し、き裂先端近傍での変位の一般解を利用した差分法で応力拡大係数を求める。すなわち、き裂先端を中心とする仮想正方形領域内の変位は、線形弾性論により解析的に求められている一般解で表現されるものとする。その領域外の変位は等間隔差分法を用いて求める。そのとき仮想正方形領域は差分解析の対象外となり、一般解に含まれる未知係数は境界条件として現れる。

解析領域を有限とするため、モデルは繊維とき裂が無限板中に、縦横両方向に規則的な周期で、繊維とき裂面が垂直に並んでいる2種類を考え、対称性を利用する。そして繊維とき裂先端の距離、繊維長さ、縦弾性係数比などが応力拡大係数に及ぼす影響を検討する。

2. 基 礎 理 論

二次元弾性体において、変位成分(u, v)で表した平衡方程式は、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} (\lambda+2\mu)u_{,xx} + (\lambda+\mu)v_{,xy} + \mu u_{,yy} &= 0 \\ \mu v_{,xx} + (\lambda+\mu)u_{,xy} + (\lambda+2\mu)v_{,yy} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ただし、コンマはそれに続く変数による微分を表し、

* 原稿受付 1994 年 11 月 24 日。

^{*1} 正員, 京都工芸繊維大学工学学部 (〒606 京都市左京区松ヶ崎御所海道町)。^{*2} 三菱重工業(株)神戸造船所 (〒652 神戸市兵庫区和田崎町 1-1)。^{*3} 正員, 金沢工業大学 (〒921 石川県石川郡野々市町扇が丘)。

$$\lambda = \begin{cases} \nu E / (1 + \nu)(1 - 2\nu) : \text{平面ひずみ} \\ \nu E / (1 - \nu^2) : \text{平面応力} \end{cases} \dots\dots (2)$$

$$\mu = E / 2(1 + \nu)$$

E, ν はそれぞれ縦弾性係数, ポアソン比である。

また, き裂先端を原点とする極座標 (r, θ) を用いて, $\theta = \pm \pi$ のき裂面の無負荷の条件を満足する変位は, 開口形モードにおいて, 次の級数形で表される⁽⁵⁾。

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{Bmatrix} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{2\mu} r^{n/2} \begin{Bmatrix} F_n(\theta) \\ G_n(\theta) \end{Bmatrix} \dots\dots (3)$$

ここで, u_0, v_0 は剛体変位,

$$\begin{aligned} F_n(\theta) &= \left\{ \kappa + \frac{n}{2} + (-1)^n \right\} \cos \frac{n}{2} \theta \\ &\quad - \frac{n}{2} \cos \left(\frac{n}{2} - 2 \right) \theta \\ G_n(\theta) &= \left\{ \kappa - \frac{n}{2} - (-1)^n \right\} \sin \frac{n}{2} \theta \\ &\quad + \frac{n}{2} \sin \left(\frac{n}{2} - 2 \right) \theta \end{aligned} \dots\dots (4)$$

$$\kappa = \begin{cases} 3 - 4\nu : \text{平面ひずみ} \\ (3 - \nu) / (1 + \nu) : \text{平面応力} \end{cases}$$

また, 応力拡大係数は式(3)の A_1 により表され,

$$K_I = \sqrt{2\pi} A_1 \dots\dots (5)$$

3. 解析法

3・1 き裂先端近傍の一般解の利用 図1に示すように, き裂先端を中心として一辺の長さ $2a$ の正方形領域を設ける。その領域内の変位は, 式(3)の級数の最初の N 項で表されるとする。すなわち,

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{Bmatrix} + \sum_{n=1}^N \frac{A_n}{2\mu} r^{n/2} \begin{Bmatrix} F_n(\theta) \\ G_n(\theta) \end{Bmatrix} \dots\dots (6)$$

また, 外部の領域の変位に関しては, 差分法を用いて解析する。その際, 境界条件として, 仮想正方形境界上で変位の連続性より, 式(6)を与える。また, 仮想境界の一つ外側の格子線上での変位の連続性を残差の二乗和を最小になるように満足させる。すなわち,

図1 仮想正方形境界

$$\sum_{m=1}^M \left[(u_0 - u_m) F_{1k}(\theta_m) + (v_0 - v_m) G_{1k}(\theta_m) + \sum_{n=1}^N \frac{A_n}{2\mu} r_m^{n/2} \{ F_{1n}(\theta_m) F_{1k}(\theta_m) + G_{1n}(\theta_m) G_{1k}(\theta_m) \} \right] r_m^{k/2} = 0$$

$$(k=1, 2, \dots, N) \dots\dots (7)$$

ここで, r_m, θ_m, u_m, v_m は仮想境界の一つ外側の格子線上での値であり, M はその総数である。また, この条件と仮想境界上の条件を組み合わせると, 変位こう配, すなわち応力の連続性の条件も最小二乗の意味で満足すると考えられる。またその式により, 式(6)における N 個の未知係数に対応する N 個の式が得られたことになる。

3・2 解析モデル 本研究では, 繊維が応力拡大係数に及ぼす影響について検討を行うが, 解析領域を有限にするため, 次のようなモデル化を行う。すなわち, 長さ $2L$, 幅 $2d$ の繊維と長さ $2c$ のき裂が無限板中に, 縦方向は $2H$, 横方向は $2W$ の周期で規則的に並んでおり, かつ繊維とき裂面が垂直である2種類の場合を考える。図2(a), (b)に示すように, モデル1は繊維がき裂延長線上にある場合であり, モデル2は繊維がき裂面の上下に位置する場合である。形状の対称性から, それぞれの図の斜線部分の有限領域について解析を行うことができる。

3・3 解析領域の格子分割と境界条件 3・2節で述べた解析領域の差分格子の分割例を二つのモデルに対して, 図3(a), (b)に示す。図における最外格子は, 境界条件式に中心差分を適用するために設けた仮想格子である。また, き裂先端近傍には一般解を用いるため, 正方形領域を設け, その内部の格子点は除外する。なお, 繊維内部においては格子間隔を母材のその半分とする。そのため, 繊維と母材の境界上で, 図4の点F, Gのような2種類の形の点ができる。これらの点の処理についてはいくつかの方法が考えられる⁽⁶⁾。ここでは, 点Fは4個の隣接点としてA, B, C, Dをもつぎみの粗い格子の点として処理し, 点Gの値は, 点E, B, Fおよび点B, F, Dの値から二次の内挿をそれぞれ行った後平均をとる方法を用いる。

上面に一樣変位を与えることにより, 一軸引張りの状態を表し, 上下左右の対称条件などから境界条件式が求められる。また, 繊維と母材との界面では変位と応力の連続性から境界条件式が得られる。

3・4 計算手順 計算手順を示すと, 次のようになる。基礎微分方程式(1)を中心差分で表示し, 仮想正方形境界上で式(6)を, またその一つ外側の格子点で式(7)を満足させる。さらに外側実境界での境界条

件をあわせて、 $u_m, v_m (m=1, 2, \dots, M_t; M_t$ は全格子点数) と $A_{ln} (n=1, 2, \dots, N)$ および u_0, v_0 に関する連立一次方程式が得られ、それを解くことにより応力拡大係数は式(5)により直接求められる。その連立方程式の解法として、ここでは反復法の一つであるSOR法⁽⁷⁾を用いる。

4. 計算結果と考察

4.1 解の収束性と精度の検討 まず、本研究における解の収束性と精度を検討する。精度のよいといわれている選点法を用いた石田の解⁽⁶⁾と比較するため、図2の斜線部分において繊維部分と母材の弾性定数を等値し、横(x)方向境界を自由境界条件に変更して、一様変位を受ける中央き裂のある有限板の問題を取扱う。なお、応力拡大係数を次式で無次元化する。

(a) モデル1

(b) モデル2

図2 繊維強化複合材料のモデル

$$\bar{K}_I = \frac{K_I}{\sigma_0 \sqrt{\pi c}} \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここで、 σ_0 は平均応力である。

図5は縦横比 $H/W=1.0$ 、き裂長さ $c/W=0.5$ 、格子間隔 $h/W=0.05$ のときの応力拡大係数と式(6)における変位の級数解の項数 N の関係を示したものである。この図より、仮想境界の一边の長さ $2a$ によらず、項数 N が7以上で収束し、破線で示した石田の解とよい一致を示すことがわかる。なお、種々の縦横比とき裂長さについても検討を行い、 $N \geq 7$ で収束することを確認している。

(a) モデル1

(b) モデル2

図3 差格子分割

図4 母材と繊維の境界上の格子分割

図5 応力拡大係数と項数の関係

図6は縦横比 $H/W=1.0$, 近似項数 $N=7$ のときの応力拡大係数と格子間隔 h の逆数の関係を示したものである。いずれのき裂長さの場合も解は安定しており、破線で示した石田の解と比べてほとんど差がなく、とくに $W/h \geq 20$ では相対誤差0.2%程度で一致している。

以上の結果より、近似項数 $N=7$, 格子間隔 $h/W=0.05$ を採用することにする。

4・2 モデル1の解析結果と考察 図3(a)に示したモデル1について、繊維とき裂先端の距離、繊維長さ、縦弾性係数比などが応力拡大係数に及ぼす影響を調べる。母材と繊維のポアソン比はともに0.3とし、平面ひずみ問題とする。なお、無次元化を行うための

図6 応力拡大係数と格子間隔の逆数の関係

図7 応力拡大係数と高さの関係

図8 応力拡大係数と幅の関係

代表長さには繊維半幅 d を用い、比較のための一様材の結果は破線で示すことにする。

応力拡大係数に及ぼす影響因子として、繊維のほか、にそのき裂の上下に位置するき裂が考えられる。図7は応力拡大係数と高さ H との関係を示したものであり、 $H/d \geq 18$ で上下のき裂の影響がなくなり、繊維がき裂に及ぼす影響のみを検討することができると考えられる。それで以後の計算では $H/d=20$ とする。

図8は応力拡大係数と幅 W および応力拡大係数とき裂-繊維間距離 $(W-c-d)$ の関係を示したものである。幅が大きくなる、すなわちき裂と繊維が離れるにつれて応力拡大係数は大きくなり、一様材の結果に近づき、繊維の影響が小さくなる様子がわかる。

図9は応力拡大係数と繊維長さ L の関係を示したものであり、 $L/d=0, 20$ はそれぞれ一様材、長繊維を表している。繊維長さが長くなるにつれ、応力拡大係数は下がり、その影響は縦弾性係数比が大きいほど強くなっていることがわかる。

次に、応力拡大係数に対するき裂長さ c の影響を図10に示す。いずれの繊維長さにおいても、き裂-繊維間

図9 応力拡大係数と繊維長さの関係

図10 応力拡大係数とき裂長さの関係

距離が短くなると強化作用が大きいことがわかる。

図 11 は応力拡大係数と縦弾性係数比 E_f/E_m の関係を示したものであり、添字の f, m はそれぞれ繊維、母材を表している。 $E_f/E_m=1$ は一様材における値を示し、この図よりいずれの繊維長さに対しても同様の傾向が見られ、縦弾性係数比が小さい間は、急激に応力拡大係数が小さくなるが、次第に低下の割合は減少し、ある一定値に近づく、すなわち縦弾性係数比には臨界値があることがわかる。

最後に、き裂の延長線上 ($y=0$) の応力 σ_y の変化を図 12 に示す。縦軸は σ_y を平均応力 σ_0 で無次元化したものであり、横軸はき裂先端からの距離で、一点鎖線で示される跳躍部分が、母材と繊維の界面である。この図から、モデル 1 では荷重の大部分を繊維が負担す

図 11 応力拡大係数と縦弾性係数比の関係

図 12 き裂延長線上の応力 σ_y の変化

図 13 応力拡大係数と幅の関係

るため、母材中の応力は一様材に比べて値が低くなっていることがわかる。このことから、き裂延長線上の繊維により応力拡大係数が下げられている。

4.3 モデル 2 の解析結果と考察 図 3 (b) に示したモデルについて繊維が応力拡大係数に及ぼす影響を調べる。この場合の計算条件などはモデル 1 と同じである。

まず、繊維とき裂の影響を明確にするために、き裂の相互干渉の影響を調べる。図 13 に応力拡大係数と幅の関係を示す。この図より、 $W/d \geq 20$ では横方向のき裂の影響はあまりないと考えられ、繊維がき裂に及ぼす影響のみを検討することができると考えられる。よって、以後の計算においては $W/d=20$ として、繊維-き裂間距離、縦弾性係数比などについて検討する。

図 14 に応力拡大係数と高さの関係を示す。この図において、応力拡大係数はある高さにおいて極大値を示しており、その傾向はき裂長さが短いときに顕著である。このときに考えられる影響としては、繊維の影響とそのき裂の上下にあるき裂の相互干渉が考えられる。後者の影響は応力拡大係数の値を下げる事が知られているので、高さを大きくしたときに応力拡大係数が上がる原因は、き裂の相互作用による影響が小さくなるためであると考えられる。このことを確認するために、き裂-繊維間距離が応力拡大係数に及ぼす影

図 14 応力拡大係数と高さの関係

図 15 応力拡大係数とき裂-繊維間距離の関係

響を図 15 に示す。この図から、繊維がき裂から遠ざかると、応力拡大係数が小さくなることがわかる。つまり、繊維は応力拡大係数の値を上げる働きを考えると、またその影響はき裂が短く、その先端が繊維端に近いほど大きいことがわかる。なお、図 14 でいずれのき裂長さに対しても、 $H/d \geq 20$ で応力拡大係数はあまり変化していないため、以後の計算では $H/d=20$ を採用する。

図 16 に応力拡大係数とき裂長さの関係を示す。き裂長さが短いときは、き裂先端と繊維端との距離が近く、繊維長さが長いほどその距離は近くなるため、応力拡大係数の値が大きいが、き裂長さが長くなるにつれて次第に繊維端の影響は小さくなっている。

図 17 に応力拡大係数と縦弾性係数比の関係を示す。この図からも、繊維によって応力拡大係数の値が高められている様子がわかる。またこの場合もモデル 1 と同様に臨界値が存在することがわかる。

最後に、き裂面に近い断面 ($y/d=2$) と繊維端に近い断面 ($y/d=6$) における σ_y の分布を図 18 に示す。この図から、き裂面の上下にある繊維がき裂先端 ($x/d=5$) 近傍の応力を高めている様子がうかがわれる。この影響のために、モデル 2 において応力拡大係数の値が引き上げられている。

図 16 応力拡大係数とき裂長さの関係

図 17 応力拡大係数と縦弾性係数比の関係

5. 結 言

本研究は差分法を用いて、モデル化した繊維強化複合材料の強度解析を行った。き裂先端近傍には、応力の特異性を考慮して仮想正方形境界を設け、その内部には線形弾性問題として解かれた変位の一般解を用い、外部には差分法を用いて応力拡大係数を求めた。繊維複合材料のモデル化は、き裂とき裂面に対して垂直な繊維とが周期的に並んでいるとし、その繊維の配列の異なる二つのモデル

モデル 1: 繊維がき裂延長線上に存在するモデル

モデル 2: 繊維がき裂面上下に存在するモデル

について解析を行った。それらの結果をまとめると次のようになる。

(1) モデル 1 におけるき裂の左右にある繊維は、荷重の大部分を負担するため、母材中の応力は一樣材に比べて小さくなり、応力拡大係数の値を下げる働きをすることがわかる。

(2) 一方、モデル 2 におけるき裂の上下にある繊維は、それとは逆にき裂近傍の応力を高めることから、応力拡大係数の値を上げる働きをすることがわかる。

(3) それぞれのモデルにおいて、繊維長さが長いほど応力拡大係数の値に対して強い影響を与え、また、き裂と繊維の距離が近いほど、強く影響することがわかる。

(4) それぞれのモデルにおいて、繊維と母材の縦弾性係数比は、小さい間は変化が大きいが、次第にその変化の割合は減少し、ある値以上では変化がなく、縦弾性係数比には臨界値があることがわかる。

本研究では、繊維の板厚方向の寸法を考慮せず、二次元問題に近似して解析を行った。この問題を三次元問題として取扱うことは非常に興味のあることであるが、現時点では困難である。上述の結果は、厳密には三次元である繊維強化の問題に対して、一定の示唆を与えるものと考えられる。

図 18 き裂-繊維間の任意断面における応力 σ_y の変化

文 献

- (1) 中西・ほか3名, 機論, **52**-474, A(1986), 291.
 - (2) Thompson, J. F., ほか2名, *J. Comput. Phys.*, **24**-3 (1977), 274.
 - (3) Greif, R. and Sanders, J. L. Jr., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **32**-1(1965), 59.
 - (4) 陳・春山, 機論, **59**-560, A(1993), 903.
 - (5) 例えば, 岡村, 線形破壊力学入門, (1976), 196, 培風館.
 - (6) フォーサイス・ワソー, (藤野訳), 偏微分方程式の差分法による近似解法(下), (1968), 445, 吉岡書店.
 - (7) 戸川, マトリクスの数値計算, (1971), 64, オーム社.
 - (8) Isida, M., *Int. J. Fract. Mech.*, **7**-3(1971), 301.
-