近似法に基づく複合材構造の効率的強度最適化法*

福永 久雄^{*1}, 関根 英樹^{*1}, 古澤 正史^{*2}Efficient Strength Optimization Approach on Composite Structures
Based on Approximation Method

Hisao FUKUNAGA, Hideki SEKINE and Masafumi FURUSAWA

We present an efficient strength optimization approach on laminated composite structures under in-plane loading where layer orientation angles in addition to layer thicknesses are used as design variables. A high-quality approximation of stress components is generated by a linear approximation of stress resultants with respect to intermediate design variables. An approximation method is then applied to a minimum-weight design of laminated panels under strength constraints. The validity of the present approach is verified through several optimization examples of laminated panels.

Key Words: Optimum Design, Laminated Construction, Composite Material, Sensitivity Analysis, Lamination Parameter, Approximation Method

1. 緒 言

航空機翼構造のような大規模な複合材構造の最適構造設計では、少ない回数の有限要素法解析で効率的に最適解を得る手法を確立することが重要となる。本論文では、強度制約条件下の積層複合材構造の最小重量設計を対象として、近似法に基づく繊維配向角・層厚の効率的最適化手法を提示する。

近似法に基づく最適化においては、収束性を改善するために、原問題に対してできるだけ精度よい近似問題を作成することが重要となる。最小重量設計問題では、目的関数である重量は通常設計変数の線形関数である。一方、強度制約条件は設計変数の非線形関数であり、構造解析と感度解析で得られた情報から、この非線形特性をいかに精度よく近似するかが問題となる。

積層複合材構造の層厚のみの最適化問題では、現在のところ、層厚の逆変数を設計変数に用いた双対法による解法⁽¹⁾⁽²⁾が最も効率的であると考えられ、等方性材構造の場合と同程度の効率で最適解を求めることが

できる。ただし、逆変数を用いる手法は繊維角の最適化手法としては適用できない欠点を有する。一方、等方性材構造について、Vanderplaatsら⁽³⁾は、応力を板厚で線形近似するよりは、節点力を線形近似してその節点力より応力を計算するほうが精度よい近似となることを示している。

積層複合材構造の繊維角の最適化においては、強度制約条件と設計変数の間には強い非線形性があるため、繊維角を直接に設計変数として用いると局所的な最適点でしばしば計算がストップする。福永ら⁽⁴⁾⁽⁵⁾は繊維角に対する中間変数として変換した設計変数を用いる手法を提案するとともに、節点力近似⁽³⁾の方法を繊維角・層厚最適化問題に拡張した。この方法では、層厚最適化については双対法による解法⁽¹⁾⁽²⁾と同程度の効率性を有しており、10回程度の構造解析数で最適解が得られている。一方、繊維角最適化に関しては、直接に繊維角を設計変数とする方法よりはかなり効率性は増しているが、初期値によっては局所的最適解に陥りやすく、さらに改良を加える必要がある。

本論文で用いる手法は、近似法に基づく直接最適化法であり、近似の精度を改善するために中間的に積層パラメータを導入する。すなわち、実際の設計変数には各要素の繊維角とそれに対応する層厚を用いるが、

* 原稿受付 1995年3月20日。

^{*1} 正員、東北大学工学部 (〒980 仙台市青葉区荒巻字青葉)。^{*2} 東北大学大学院 [現:(株)リコー (〒243 厚木市下荻野1005)]。

中間的変数として積層パラメータを導入して感度解析を行うことにより近似の精度を向上させる。面内荷重を受ける積層パネルの強度制約条件下の最小重量設計問題を数値例として、本手法の近似精度および最適化結果を示し、積層パラメータを使用した近似法の有効性を示す。

2. 積層パラメータを用いた近似解析

2.1 古典積層理論と積層パラメータ 対称積層材の古典積層理論に基づく構成関係式は次式で示される。

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 N_i , ε_j はそれぞれ合力、中央面ひずみであり、 A_{ij} は面内剛性を示す。面内剛性 A_{ij} は剛性に関する不変量 U_i ($i=1, 2, 3, 4, 5$) と積層パラメータ ξ_i を用いることにより次式で表される。

$$\begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{22} \\ A_{12} \\ A_{66} \\ A_{16} \\ A_{26} \end{Bmatrix} = h \begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_2 & 0 & 0 \\ 1 & -\xi_1 & \xi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_2 & 0 & 1 \\ 0 & \xi_3/2 & \xi_4 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_3/2 & -\xi_4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 h は積層材の板厚を示す。中央面に関する対称性を考慮すると積層パラメータは次式で定義される。

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= \int_0^1 \cos 2\theta du, & \xi_2 &= \int_0^1 \cos 4\theta du \\ \xi_3 &= \int_0^1 \sin 2\theta du, & \xi_4 &= \int_0^1 \sin 4\theta du \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

積層パラメータは繊維角分布を示す幾何学的パラメータである。一方、剛性に関する不変量 U_i は使用材料により決定される材料パラメータであり、文献(6)で定義されている。また、式(2)において面内剛性は積層パラメータの線形関数となっており、本論文ではこの特性を利用して精度よい近似問題を作成する。

2.2 応力近似 図1に示す面内荷重を受ける積層パネルに関する有限要素法の基礎式は次式で与えられる。

$$K(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{P} \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 K は面内剛性マトリックス、 $\mathbf{u}$ は節点変位ベクトル、 $\mathbf{P}$ は荷重ベクトルである。また、 K , $\mathbf{u}$ は各要素の繊維角と層厚からなる設計変数ベクトル $\mathbf{x}$ の関数である。図1において、破線は有限要素の分割図を、実線は設計変数領域を示す。各領域内では設計変数は同一とし、異なる領域では設計変数は独立とする。

各領域における繊維角と層厚が与えられたとき、中

間の設計変数として次式の積層パラメータと板厚を用いる。

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_1^{(k)} &= \sum_{i=1}^n h_i \cos 2\theta_i, & \bar{\xi}_2^{(k)} &= \sum_{i=1}^n h_i \cos 4\theta_i \\ \bar{\xi}_3^{(k)} &= \sum_{i=1}^n h_i \sin 2\theta_i, & \bar{\xi}_4^{(k)} &= \sum_{i=1}^n h_i \sin 4\theta_i \\ &&& \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

$$h^{(k)} = \sum_{i=1}^n h_i$$

ここで、 θ_i , h_i は k 番めの領域における $[\theta_1/\theta_2/\dots/\theta_n]_s$ 材の繊維角、層厚(対称面に関して上下加えた層厚)であり、 $\bar{\xi}^{(k)}$ は対応する積層パラメータである。なお、式(5)の積層パラメータは板厚分だけ式(3)と異なる。

各領域での板厚と積層パラメータを中間的設計変数 y_j で表すと、式(4)の変位の y_j に関する感度は次式で求められる。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_j} = -K^{-1} \frac{\partial K}{\partial y_j} \mathbf{u} \dots\dots\dots (6)$$

変位ベクトル $\mathbf{u}$ は式(4)の有限要素解析より既知であり、 $\partial K/\partial y_j$ を求めておけば式(6)の感度が計算できる。このとき、変位ベクトルの変動量を次式で近似する。

$$\mathbf{u}(\mathbf{y} + \Delta \mathbf{y}) = \mathbf{u}(\mathbf{y}) + \sum_{j=1}^{\bar{J}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y_j} \Delta y_j \dots\dots\dots (7)$$

$$\Delta \mathbf{y}^{(k)} = \begin{Bmatrix} \Delta \bar{\xi}_1^{(k)} \\ \Delta \bar{\xi}_2^{(k)} \\ \Delta \bar{\xi}_3^{(k)} \\ \Delta \bar{\xi}_4^{(k)} \\ \Delta h^{(k)} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^n ((h_i + \Delta h_i) \cos 2(\theta_i + \Delta \theta_i) - h_i \cos 2\theta_i) \\ \sum_{i=1}^n ((h_i + \Delta h_i) \cos 4(\theta_i + \Delta \theta_i) - h_i \cos 4\theta_i) \\ \sum_{i=1}^n ((h_i + \Delta h_i) \sin 2(\theta_i + \Delta \theta_i) - h_i \sin 2\theta_i) \\ \sum_{i=1}^n ((h_i + \Delta h_i) \sin 4(\theta_i + \Delta \theta_i) - h_i \sin 4\theta_i) \\ \sum_{i=1}^n \Delta h_i \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (8)$$

ここで、式(7)において $\bar{J}$ は中間的設計変数の総数、 Δy_j は中間的設計変数の変動量である。

次に各要素における応力の近似値を求める。本研究では、応力の近似として合力近似に基づく手法を採用する⁽³⁾⁽⁵⁾。まず、有限要素法による各要素の合力は次式で与えられる。

$$\mathbf{N}^e(\mathbf{y}) = \mathbf{D}^e(\mathbf{y}) \boldsymbol{\varepsilon}^e(\mathbf{y}) = \mathbf{D}^e(\mathbf{y}) \mathbf{B}^e \mathbf{u}^e(\mathbf{y}) \dots\dots\dots (9)$$

ただし、 $\mathbf{N}^{eT} = (N_x, N_y, N_{xy})$, $\boldsymbol{\varepsilon}^{eT} = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy})$, $\mathbf{B}^e$ はひずみ-節点変位マトリックス、 $\mathbf{D}^e$ は式(1)の面内剛性マトリックスであり上添字 e は要素を示す。ここで、

合力 N^e は設計変数ベクトル $\mathbf{x}$ の関数であるが、中間的設計変数ベクトル $\mathbf{y}$ で表示する。

式(9)の両辺を中間的設計変数 y_j で微分して、次式が得られる。

$$\frac{\partial N^e}{\partial y_j} = \frac{\partial D^e}{\partial y_j} B^e \mathbf{u}^e + D^e B^e \frac{\partial \mathbf{u}^e}{\partial y_j} \quad \dots\dots\dots (10)$$

式(10)に式(6)を代入すると合力 N^e の導関数が求められる。この合力の導関数 $\partial N^e / \partial y_j$ を用いて、合力 N^e を中間的設計変数 y_j で線形近似する。

$$N^e(\mathbf{y} + \Delta \mathbf{y}) = N^e(\mathbf{y}) + \sum_{j=1}^J \frac{\partial N^e}{\partial y_j} \Delta y_j \quad \dots\dots\dots (11)$$

以上のように、式(4)、(6)、(10)より初期設計変数に対する $N^e(\mathbf{y})$, $\partial N^e / \partial y_j$ が求められたとき、繊維角および層厚の変動量 $\Delta \theta_i$, Δh_i に対し、中間的設計変数ベクトル $\Delta \mathbf{y}$ を用いて変位と合力の近似値を式(7)、(11)より求める。設計変数が変動したとき、式(11)の合力の近似値よりひずみおよび応力の近似値が式(12)および(13)より計算できる。

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) = D^{e-1}(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) N^e(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) \quad \dots (12)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_i^e(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) = \bar{\mathbf{Q}}_i(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) \boldsymbol{\varepsilon}^e(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}), \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad \dots\dots\dots (13)$$

ここで、

$$\bar{\mathbf{Q}}_i = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_{(i)} \quad \dots\dots\dots (14)$$

式(14)の $\bar{\mathbf{Q}}_i$ は x - y 座標(図1参照)における積層板の i 番め層の応力-ひずみマトリックスである。

3. 近似精度の評価

応力近似の適用モデルとして、図1に示すように、右上コーナ点で面内の外力($P=1$ MN)を受ける積層パネルを考える。CFRP 材からなるこの積層パネルの材料定数を表1に示す。

この積層パネルは8層対称積層からなり、有限要素分割は100要素、独立な設計変数の領域数は25である。一つの領域は4要素からなり、領域内では層厚、繊維角は共通であるが、異なる領域では独立とする。このとき、設計変数は25個の領域における4個の繊維角とそれに対応する4個の層厚の計200個となる。

E_L (GPa)	E_T (GPa)	G_{LT} (GPa)	ν_L	
142	10.8	5.49	0.3	
F_L (GPa)	F_L' (GPa)	F_T (GPa)	F_T' (GPa)	F_{LT} (GPa)
1.589	1.341	0.057	0.212	0.08

Fig. 1 Laminated panel under in-plane loading

Fig. 2 Approximate shear stress resultant versus layer thickness variation

Fig. 3 Approximate shear stress resultant versus layer angle variation

Fig. 4 Approximate displacement versus the variation of layer thickness and layer angle

1層が5mmからなる $[10/30/60/80]_s$ 積層材について、図1のA～C領域の層厚がそれぞれ一様に α 倍だけ変動したとき、a～cの要素のせん断合力の正解(FEM解)と近似解の比較を図2に示す。せん断合力は、 $\alpha=1$ (変動なし)のときの対応するせん断合力で規格化している。合力の線形近似による評価はかなり精度よい結果を与えており、合力は層厚と線形に近い関係にあることがわかる。

同様に、A～C領域の最外層である 10° 層の繊維角が変動したときの近似合力の精度を図3に示す。この図より、中間的設計変数に積層パラメータを用いることで、繊維角による線形近似($\Delta\theta=0^\circ$ での接線近似)に比べ、各要素のせん断合力はかなり精度よく近似されていることがわかる。

Fig. 5 Flow chart for optimization

次に、図1の外力を受ける場合について、荷重点変位(荷重方向の変位を δ とする)の近似精度を調べる。図4に、 $[10/30/60/80]_s$ 積層材のA領域の要素の層厚を一様に α 倍したとき、および、A領域の最外層(10° 層)の繊維角が変動したときの荷重点変位の正解(FEM解)と近似解の比較を示す。荷重点変位の近似解は層厚および積層パラメータによる式(7)の線形近

似に基づいている。層厚に関する近似はあまりよい精度を与えないのに対し、繊維角変動に対しては変位変動が小さいこともあるが、かなりよい近似となっていることがわかる。

4. 近似法による最適化

4.1 最適化問題の定式化と解法 図1に示す積層パネルについて、強度制約条件のもとで最小重量を与える繊維角、板厚分布を求める。このとき最適化問題は次のように定式化される。

[目的関数] $W = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J h_{ij} \dots \dots \dots (15)$

[制約条件]
$$\left. \begin{aligned} g_\sigma &= \frac{\sigma}{F} - 1 \leq 0 \\ g_\delta &= \frac{\delta}{\delta_0} - 1 \leq 0 \\ h_{ij}^l &\leq h_{ij} \leq h_{ij}^u \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (16)$$

Fig. 6 Iteration history ([10/30/60/80]_s)

ここで、目的関数は重量最小であり、設計変数は図1に示す各領域の繊維角、層厚である。また、制約条件には、各有限要素内の各層について最大応力説に基づく強度基準を適用する。式(16)の F は繊維方向座標における基準となる強度であり、表1に示すCFRP材の強度を用いる。また、強度条件に加え、荷重点変位の制約条件 g_δ を考慮する場合も検討する。いずれの場合も、層厚の下限値は $h_{ij}^l = 0.125 \text{ mm}$ とした。

図5に強度特性最適化のフローチャートを示す。まず、設計変数ベクトルの初期値に対応する構造について有限要素解析と感度解析を行う。感度解析については積層パラメータと板厚に関する感度を求める。この解析から得られた情報をもとに近似最適化問題を作成する。制約条件の評価においては、合力を積層パラメータで線形近似し、この近似合力より各層の応力を式

Fig. 7 Comparison of convergence histories for three initial laminate configurations (strength constraint)

Fig. 8 Optimal laminate configuration

(13)より求め式(16)の制約条件を算出する。また、変位制約条件を考慮するときには、荷重点変位について式(7)の近似式より式(16)の制約条件を算出する。

最適化は近似問題について行われるため、最適化過程では直接に有限要素解析を必要としない。この最適化で得られた近似的な最適積層構成に対し、有限要素法解析により収束を判定し、収束していない場合には再度感度解析を行い、新たな近似問題を作成する。このステップを収束するまで繰返し、最適解を求める。なお、最適化手法として許容方向法⁽⁷⁾を用いた。

4・2 最適化計算例 図1の $P=1\text{ MN}$ の荷重下で $[10/30/60/80]_s$ 積層材について最適化過程における重量と繰返し回数の関係を図6に示す。縦軸は、いちばんクリティカルな制約条件で規準化した重量を示す。設計変数に層厚のみと、層厚に加え繊維角も用いた場合の最適化の比較を示す。ここで、すべての層厚の初期値は5 mmとする。最適化計算では1回のiterationにおいて、1回の有限要素法解析と感度解析を行っている。設計変数の可動範囲については、層厚は下限値(0.125 mm)のみを設定し、繊維角は最大で $\pm 10^\circ$ と設定した。 $[10/30/60/80]_s$ 材に対し、層厚のみの最適化において重量は初期値の19%程度まで軽減され、さらに繊維角も最適化することにより初期値の17%程度の重量となる。

層厚・繊維角を設計変数に用いた場合について、 $[0/45/-45/90]_s$ 、 $[10/30/60/80]_s$ 、 $[-30/30/-60/60]_s$ の3種類の初期繊維角に対する収束状況の比較を図7に示す。初期設定角度が非常に異なる積層構成に対し最終重量はほぼ近い値に収束しており、本手法が繊維角の最適化にかなり有効に機能していることがわかる。また、図8に $[10/30/60/80]_s$ の初期積層構成に対し最適化計算で得られた層厚・繊維角分布を示す。層厚に関してはプライ数(1プライ=0.125 mm)で表示しており、特にプライ数の多い層を薄墨部で示す。力線の流れに沿うように繊維が向き、層厚が大きくなっていることがわかる。

制約条件として各要素の強度条件に加え荷重点の変位条件を用いたときの収束状況を図9に示す。変位条件の許容値として、 $[0/45/-45/90]_s$ 材の初期値に対する荷重方向変位を指定した。図4に示すように、層厚の変位に関する近似精度はあまりよくないため、1回の近似最適化において層厚で最大90%、繊維角で最大 10° の可動範囲を設定した。数回程度の繰返し数で収束しており、最終重量は3種類の積層材ともほぼ近い値に収束している。

Fig. 9 Comparison of convergence histories for three initial laminate configurations (strength and displacement constraints)

5. 結 言

本論文では、CFRP 積層パネルの強度制約条件下における最小重量設計問題を例に、近似法を用いた効率的解法を提案した。近似法を用いた最適化では、その近似精度が有効な最適解を得るための重要な問題となる。本研究で得られた主要な結論は以下のとおりである。

(1) 応力近似において、合力の線形近似より各層の応力を求めた。このとき、中間的設計変数として積層パラメータを導入し、この積層パラメータについての合力の線形近似を行うことで精度よい近似問題が作成できた。

(2) 層厚に加え繊維角を設計変数に用いた強度制約条件下の最適化では、数回程度の少ない繰返し回数で最適解が求められた。また、初期積層構成の異なる3種類の積層材の最適化でも、最適化後の最終重量はほぼ同じ値をとる。このように本手法が大規模な複合材構造の最適設計に対して有効であることが示された。

文 献

- (1) Schmit, L. A. and Fluery, C., *AIAA J.*, **18**(1980), 1252-1260.
- (2) Schmit, L. A. and Fluery, C., *AIAA J.*, **18**(1980), 1515-1524.
- (3) Vanderplaats, G. N. and Salajegheh, E., *AIAA J.*, **27**(1989), 352-358.
- (4) Fukunaga, H. and Vanderplaats, G. N., *Comput. Struct.*, **40**(1991), 1429-1439.
- (5) Fukunaga, H. and Vanderplaats, G. N., *JSME Int. J.*, **34**(1991), 171-177.
- (6) Tsai, S. W. and Hahn, H. T., *Introduction to Composite Materials*, (1980), 65-276, Technomic Publ.
- (7) Vanderplaats, G. N. and Sugimoto, H., *Comput. Struct.*, **24**(1986), 13-21.