等分布荷重を受ける不静定はりの最適化*

多 田 幸 生^{*1}Optimization of Statically Indeterminate Beams Subjected
to Uniformly Distributed Load

Yukio TADA

This paper gives analytical solutions of an optimization problem for beams with rectangular cross section which are supported by statically indeterminate conditions and are subjected to a uniformly distributed load. The problem is based on the inverse variational principle in which the shape and displacement that make the total potential energy stationary are considered under the condition of volume constancy. The problem becomes one of searching for the positions where the sign of the bending moment changes. The beams obtained have the property of uniform strength.

Key Words: Optimum Structural Design, Statically Indeterminate Beam, Uniformly Distributed Load, Inverse Variational Principle

1. 緒 言

材料力学の教科書において、平等強さのはりの例として片持ちばりが紹介されることが多い。これは片持ちばりが静定構造であるので、モーメント分布が外力だけから決まり、応力の計算が断面係数だけで議論できるからである。同様のことは両端支持ばりでもいえる。筆者は不静定はりについても平等強さのはりの陽な形(解析的表現)を求め、それに付随する問題について検討してきている⁽¹⁾⁽²⁾。本論文では、両端固定ばりと一端支持-他端固定のはりについて、それらが一様分布荷重を受けるときの最適形状とそのたわみの解析的な表現を求めた結果を報告する。

2. 逆変分問題

等分布荷重 q_0 を受ける長さ L の矩形断面はりの最適な形態とその変形を求める問題は逆変分原理⁽³⁾により次のように定式化される。

$$\begin{aligned} \Omega[h(x), \lambda, w(x)] \\ = \int_0^L (1/2) E (B h^3/12) (d^2 w/dx^2)^2 dx \\ - \int_0^L q_0 w dx - \lambda \left\{ \int_0^L B h dx - V_c \right\} \\ \longrightarrow \text{stationary} \quad (1) \end{aligned}$$

これは体積一定の条件の下での最大剛性設計となっている。上式で縦弾性係数 E と断面幅 B は一定とし、断

面高さ $h(x)$ を設計変数とする。また、 $w(x)$ ははりのたわみであり、 V_c は体積規定値、 λ はラグランジ乗数である。論文中では、 $h(x)$ 、 $w(x)$ などを、簡潔のために、 h 、 w と表記することもある。式(1)の停留条件は、 Ω を各変数で変分または微分して次のように得られる。

$$(E h^2/8) (w'')^2 - \lambda = 0 \quad (0 \leq x \leq L) \quad (2)$$

$$\int_0^L B h dx = V_c \quad (3)$$

$$d^2 \{ E (B h^3/12) (d^2 w/dx^2) \} / dx^2 = q_0 \quad (0 \leq x \leq L) \quad (4)$$

[両端固定ばり]

$$w(0) = w'(0) = w(L) = w'(L) = 0 \quad (5)$$

[支持-固定はり]

$$w(0) = w(L) = w'(L) = 0 \quad (6)$$

$$E I w''|_{x=0} = 0 \quad (7)$$

ただし、 I は断面2次モーメントである。

$$I = B h^3/12 \quad (8)$$

また、 w' および w'' は dw/dx および d^2w/dx^2 を略記したものである。式(2)は形状最適性の条件で、次のようにも書ける。

$$h w'' = \pm D \quad (0 \leq x \leq L) \quad (9)$$

$$D = \sqrt{8 \lambda / E} \quad (10)$$

式(9)ははりの表面における応力の絶対値がどこでも等しいこと[cf, 式(56)]、すなわち一様強さである

* 1993 年 11 月 16 日 平成 5 年度材料力学部門講演会において講演、原稿受付 1995 年 5 月 10 日。

*1 正員、神戸大学工学部 (〒657 神戸市灘区六甲台町)。

ことを表している。さらに、式(3)は体積一定の条件、式(4)と(5)もしくは(6)、(7)はつりあい式と境界条件である。以下、両端固定ばりと一端支持-他端固定はりについて検討する。

3. 両端固定ばり

つりあい式(4)を2回積分すると、

$$EI(d^2w/dx^2) = (q_0/2)x^2 - R_A x + M_A \\ = (q_0/2)(x-L_1)(x-L_2) \quad (11)$$

となる。 R_A と M_A は積分定数であり、左固定端の反力と反モーメントに対応している。また、

$$L_1 + L_2 = 2R_A/q_0 \quad (12)$$

$$L_1 L_2 = 2M_A/q_0 \quad (13)$$

で決まる $x=L_1$ と $x=L_2$ は、曲げモーメントが零となり、たわみの第2次導関数 w'' の符号が変化する点である。左右対称性および力の釣り合い

$$R_A = q_0 L/2 \quad (14)$$

から、 L_1 と L_2 は

$$L_1 + L_2 = L \quad (15)$$

を満足する。以下では、たわみの第2次導関数 w'' の符号を考慮して、三つ(二つ)の区間に分けて考える。また、各関数はそれぞれの区間を表す下添字を付けて表示する。

[第1区間： $0 \leq x \leq L_1$]

この区間では

$$w_1'' > 0 \quad (16)$$

と仮定でき、式(9)より、

$$w_1'' = D/h_1 \quad (17)$$

である。これを式(11)に代入してたわみを消去し、整理すると、高さ関数

$$h_1(x) = h_0 \sqrt{(L_1-x)(L_2-x)} \quad (18)$$

$$h_0 = \sqrt{6q_0/(BED)} \quad (19)$$

が得られる。これを式(17)に戻すと、たわみの第2次導関数は次のようになる。

$$w_1''(x) = k/\sqrt{(L_1-x)(L_2-x)} \quad (20)$$

$$k = D/h_0 = D\sqrt{BED/(6q_0)} \quad (21)$$

左端の境界条件(5)を考慮してこれを積分すると、たわみの導関数およびたわみが次のように得られる。

$$w_1'(x) = k[\ln\{f(x)\} - \ln(f_0)] \quad (22)$$

$$f(x) = L - 2\{x + \sqrt{(L_1-x)(L_2-x)}\} \quad (23)$$

$$f_0 = f(0) = (\sqrt{L_2} - \sqrt{L_1})^2 \quad (24)$$

$$w_1(x) = k[(x-L/2)\ln\{f(x)/f_0\} \\ + \{f(x) - f_0\}/4 \\ + (L_2-L_1)^2\{(1/f_0) - 1/f(x)\}/4] \quad (25)$$

[第2区間： $L_1 \leq x \leq L_2$]

この区間では

$$w_2'' < 0 \quad (26)$$

と仮定でき、式(9)より、

$$w_2'' = -D/h_2 \quad (27)$$

である。これを式(11)に代入すると、高さ関数

$$h_2(x) = h_0 \sqrt{(x-L_1)(L_2-x)} \quad (28)$$

が得られる。これを式(27)に戻すと、

$$w_2''(x) = -k/\sqrt{(x-L_1)(L_2-x)} \quad (29)$$

であるから、対称性より得られる

$$w_2'(L/2) = 0 \quad (30)$$

を考慮して積分すると、

$$w_2'(x) = k[2\tan^{-1}\{p(x)\} - (\pi/2)] \quad (31)$$

$$w_2(x) = k[(2x-L)\tan^{-1}\{p(x)\} \\ + (L-x)p(x) - (\pi x/2) - c_{22}] \quad (32)$$

$$p(x) = \sqrt{(L_2-x)/(x-L_1)} \quad (33)$$

となる。 c_{22} は積分定数である。

モーメントの零点 L_1 は、 $x=L_1$ でのたわみ角の連続性

$$w_1'(L_1) = w_2'(L_1) \quad (34)$$

より得られる。すなわち、式(22)と(31)、および

$$\lim_{x \rightarrow L_1+0} \tan^{-1}\{p(x)\} = \pi/2 \quad (35)$$

から、たわみ角の連続性は次のようになる。

$$k \ln[(L_2-L_1)/f_0] = k\pi/2 \quad (36)$$

この式から式(15)を用いて L_2 を消去して整理すると、

$$(e^\pi + 1)(L_1/L)^2 - (e^\pi + 1 - e^{\pi/2})(L_1/L) \\ + (e^{\pi/2} - 1)^2/4 = 0 \quad (37)$$

が得られるから、これを解くと

$$\eta = L_1/L = (e^{\pi/2} - 1)^2 / \{2(e^\pi + 1)\} \\ = 0.3007 \quad (38)$$

となる(付録2)。これより、 L_2 は

$$\xi = L_2/L = (e^{\pi/2} + 1)^2 / \{2(e^\pi + 1)\} \\ = 1 - \eta = 0.6993 \quad (39)$$

となる。次に、これらを $x=L_1$ でのたわみの連続性の式

$$w_1(L_1) = w_2(L_1) \quad (40)$$

すなわち、

$$\{(L_2-L_1)/2\} \ln\{(\sqrt{L_2} + \sqrt{L_1})/(\sqrt{L_2} - \sqrt{L_1})\} \\ - \sqrt{L_1 L_2} = (\pi L_2/2) + c_{22} \quad (41)$$

に代入すると、積分定数 c_{22} が

$$c_{22} = -[(\pi/4) + \sqrt{(L_1/L)(L_2/L)}]L \\ = -[(\pi/4) + (e^\pi - 1)/\{2(e^\pi + 1)\}]L \\ = -1.244L \quad (42)$$

と求まる。

体積一定の条件(3)に高さ関数(18)、(28)を代入すると、

$$V_c = 2\{\int_0^{L/2} B h dx\}$$

Fig.1 Optimum shape of clamped-clamped beam

$$= 2 B h_0 L^2 (e^\pi - 1) / \{8(e^\pi + 1)\} \quad (43)$$

となるから、高さ関数 $h_1(x)$ などの係数は

$$h_0 = 4 V_c (e^\pi + 1) / \{B L^2 (e^\pi - 1)\} \quad (44)$$

と求まる。また、式(19)より

$$D = 6 q_0 / \{B E (h_0)^2\} \quad (45)$$

であるから、

$$D = [3 q_0 B L^4 / \{8 E (V_c)^2\}] [(e^\pi - 1) / (e^\pi + 1)]^2 \quad (46)$$

であり、また、式(21)より

$$k = D / h_0 = 6 q_0 / \{B E (h_0)^3\} \quad (47)$$

であるから、たわみ関数 $w(x)$ の係数は

$$k = [3 q_0 B^2 L^6 / \{32 E (V_c)^3\}] [(e^\pi - 1) / (e^\pi + 1)]^3 \\ = 0.07233 q_0 B^2 L^6 / \{E (V_c)^3\} \quad (48)$$

となる。図1が得られた最適高さ関数 h とそのたわみ w である。図1のたわみ図の縦軸における $\bar{w}$ は

$$\bar{w} = q_0 B^2 L^7 / \{E (V_c)^3\} \quad (49)$$

である。両端点および中央点での高さはそれぞれ

$$h_1(0) = 2 h_{uni} \quad (50)$$

$$h_{uni} = V_c / (B L) \quad (51)$$

$$h_2(L/2) = \{4 e^{\pi/2} / (e^\pi - 1)\} h_{uni} \\ = 0.8691 h_{uni} \quad (52)$$

である。なお、固定端モーメントは式(13)から

$$M_A = q_0 L_1 L_2 / 2 \\ = q_0 L^2 [(e^\pi - 1) / (e^\pi + 1)]^2 / 8 \\ = 0.1051 q_0 L^2 \quad (53)$$

となる。また、中央点でのモーメントは、式(11)から $M(x) = -(q_0 L^2 / 2) \{(x/L) - n\} \{(x/L) - \xi\}$ (54) と置くと、次のようになる。

$$M_2(L/2) = q_0 L^2 e^\pi / \{2(e^\pi + 1)^2\} \\ = 0.01985 q_0 L^2 \quad (55)$$

前述のように、はり表面に生じる応力 σ はどこでも一樣で、断面係数を Z とするとき、

$$|\sigma| = |M|/Z = |EI w''|/Z = E h |w''|/2 = E D / 2 \quad (56)$$

より、式(46)から

$$|\sigma| = (3/16) [(e^\pi - 1) / (e^\pi + 1)]^2 q_0 B L^4 / (V_c)^2 \\ = 0.1577 q_0 B L^4 / (V_c)^2 \quad (57)$$

となる。また、はり中央点での最大たわみは

$$w_2(L/2) = \{\sqrt{n\xi} - (1/2) + n\} k L$$

$$= [(e^\pi - 1 - 2e^{\pi/2}) / \{2(e^\pi + 1)\}] k L \\ = 0.01875 q_0 B^2 L^7 / \{E (V_c)^3\} \quad (58)$$

となる。次に、逆変分原理の最適性の条件を満たすはりでは、式(9)と(3)から、はりのひずみエネルギーが

$$S = \int_0^L (1/2) E (B h^3 / 12) (d^2 w / dx^2)^2 dx \\ = \int_0^L (E B h / 24) D^2 dx = (E D^2 / 24) V_c \quad (59)$$

となることより、そのひずみエネルギーは

$$S = (3/512) [(e^\pi - 1) / (e^\pi + 1)]^4 (q_0)^2 B^2 L^8 / \{E (V_c)^3\} \\ = 0.004146 (q_0)^2 B^2 L^8 / \{E (V_c)^3\} \quad (60)$$

となる。

参考のために、一樣断面はりについての値を示す。一樣断面の両端固定はりでは、最大曲げモーメントは両端点に生じる $\bar{M}_A = q_0 L^2 / 12$ である⁽⁴⁾ から、最大応力もそこで生じ、

$$\bar{\sigma}_{max} = \bar{M}_A / Z_{uni} = 6 \bar{M}_A / \{B (h_{uni})^2\} \\ = (1/2) q_0 B L^4 / (V_c)^2 \quad (61)$$

である。上式中、下添字 uni は一樣断面のものであることを表しており、その断面高さ h_{uni} は式(51)で与えられる。また、中央点での最大たわみは、 $\bar{w}_{max} = q_0 L^4 / (384 E I_{uni})$ である⁽⁴⁾ から

$$\bar{w}_{max} = (1/32) q_0 L^4 / \{E B (h_{uni})^3\} \\ = (1/32) q_0 B^2 L^7 / \{E (V_c)^3\} \\ = 0.03125 q_0 B^2 L^7 / \{E (V_c)^3\} \quad (62)$$

である。そして、たわみが、 $\bar{w} = q_0 x^2 (L - x)^2 / (24 E I_{uni})$ である⁽⁴⁾ から、ひずみエネルギーは、

$$S = (1/2) \int_0^L q_0 w dx \quad (63)$$

に代入すると、次のようになる。

$$S = (1/1440) (q_0)^2 L^5 / (E I_{uni}) \\ = (1/120) (q_0)^2 L^5 / \{E B (h_{uni})^3\} \\ = (1/120) (q_0)^2 B^2 L^8 / \{E (V_c)^3\} \\ = 0.008333 (q_0)^2 B^2 L^8 / \{E (V_c)^3\} \quad (64)$$

式(57)、(60)と式(61)、(64)を比較すると、逆変分原理に基づく設計によって応力が緩和される一樣強さ、最大剛性のはりが得られていることがわかる。

4. 一端支持-他端固定はり

左端が単純支持されている場合について、式(7)を考慮してつりあい式(4)を積分すると、

$$E I (d^2 w / dx^2) = (q_0 / 2) x^2 - R_A x \\ = (q_0 / 2) x (x - L_3) \quad (65)$$

$$L_3 = 2 R_A / q_0 \quad (66)$$

となる。前章と同様に、 R_A は左支持点での反力であり、 $x = L_3$ は、曲げモーメントの符号が変化する場所である。そこで、以下の二つの部分に分けて、先と同様に進める。

[第1区間： $0 \leq x \leq L_3$]

この区間では,

$$w_1'' < 0 \quad (67)$$

と仮定できるから, 式(9) より

$$w_1'' = -D/h_1 \quad (68)$$

である. これを式(65)に代入すると, 高さ関数形

$$h_1(x) = h_0 \sqrt{x(L_3 - x)} \quad (69)$$

が得られる. これを式(68)に戻すと,

$$w_1''(x) = -k / \sqrt{x(L_3 - x)} \quad (70)$$

であるから, 左端境界条件(6)を考慮して積分すると,

$$w_1'(x) = k [2 \tan^{-1}\{r(x)\} - c_{11}] \quad (71)$$

$$r(x) = \sqrt{(L_3 - x)/x} \quad (72)$$

$$w_1(x) = k [(2x - L_3) \tan^{-1}\{r(x)\} - x r(x) - c_{11}x + \pi L_3/2] \quad (73)$$

が得られる. c_{11} は積分定数である.

[第2区間: $L_3 \leq x \leq L$]

この区間では

$$w_2'' > 0 \quad (74)$$

と仮定でき, 式(9) から,

$$w_2'' = D/h_2 \quad (75)$$

である. これを式(65)に代入して高さ関数を求めると

$$h_2(x) = h_0 \sqrt{x(x - L_3)} \quad (76)$$

となる. これを式(75)に戻すと,

$$w_2''(x) = k / \sqrt{x(x - L_3)} \quad (77)$$

であるから, 右端境界条件(6)を考慮して積分すると

$$w_2'(x) = k \ln|v(x)/v(L)| \quad (78)$$

$$v(x) = (x/L) - (1/2)z + \sqrt{(x/L)\{(x/L) - z\}} \quad (79)$$

$$w_2(x) = kL [\{(x/L) - (1/2)z\} \ln|v(x)/v(L)| + (1/2)\{v(L) - v(x)\} + z^2\{1/v(x) - 1/v(L)\}/8] \quad (80)$$

$$z = L_3/L \quad (81)$$

が得られる. z は L_3 の無次元量である.

積分定数 c_{11} は $x = L_3$ におけるたわみ角の連続性

$$w_1'(L_3) = w_2'(L_3) \quad (82)$$

から z (つまり L_3)によって表される. すなわち, 式(71)と(78)から次のようになる.

$$c_{11} = -\ln[(1/2)z/v(L)] = \ln\{(2 - z + 2\sqrt{1 - z})/z\} \quad (83)$$

次に, $x = L_3$ におけるたわみの連続性

$$w_1(L_3) = w_2(L_3) \quad (84)$$

から

$$kL_3[(\pi/2) - c_{11}] = kL[-(1/2)z \ln\{2v(L)/z\} + \sqrt{1 - z}] \quad (85)$$

でなければならない. これに式(83)を代入し, 整理すると,

$$z\pi/2 = (1/2)z \ln\{2v(L)/z\} + \sqrt{1 - z} \quad (86)$$

Fig.2 Optimum shape of hinged-clamped beam

となるので, z は次式を満足せねばならない.

$$z = F(z) \quad (87)$$

$$F(z) = [z \ln\{(1 + \sqrt{1 - z})/z\} + 2\sqrt{1 - z}] / \pi \quad (88)$$

そこで, 繰返しアルゴリズム

$$z^{t+1} = F(z^t) \quad \text{: 上添字は繰返し回数} \quad (89)$$

を適用すると, 収束解, $z = 0.6548951$ が得られる.

次に, 体積一定の条件(3)に高さ関数式(69), (76)を代入し, 式(86)を利用して, それを整理すると, 高さ関数の係数が次のように求まる.

$$h_0 = V_c / (BL^2g) \quad (90)$$

$$g = \sqrt{1 - z} / 2 = 0.2937281 \quad (91)$$

また, たわみ関数の係数は, 式(47)と(90)より, この g を用いて

$$k = 6g^3q_0B^2L^6 / \{E(V_c)^3\} = 0.1521q_0B^2L^6 / \{E(V_c)^3\} \quad (92)$$

となる. 式(66)より左支持点の反力は以下となる.

$$R_A = (q_0L/2)z = 0.3274q_0L \quad (93)$$

これより, 右固定端での反力, 反モーメントは

$$R_B = (q_0L/2)(2 - z) = 0.6726q_0L \quad (94)$$

$$M_B = (q_0L^2/2)(1 - z) = 0.1726q_0L^2 \quad (95)$$

となる.

図2は得られた最適高さ関数 h とそのたわみ w を表している. 右固定端および左部断面極大点での断面高さは次のようになる.

$$h_2(L) = 2h_{uni} \quad (96)$$

$$h_1(L_3/2) = \{z/(2g)\}h_{uni} = \{z/\sqrt{1 - z}\}h_{uni} = 1.115h_{uni} \quad (97)$$

また, 式(65)より, 左部断面極大点でのモーメントは次のようになる.

$$-EI_1w_1''|_{x=L_3/2} = (q_0L^2/8)z^2 = 0.05361q_0L^2 \quad (98)$$

はりに生じる応力は, 式(45)と(90)から

$$D = 6g^2q_0BL^4 / \{E(V_c)^2\} \quad (99)$$

より, 式(56)および(91)を用いると,

$$|\sigma| = ED/2 = (3/4)(1 - z)q_0BL^4 / (V_c)^2 = 0.2588q_0BL^4 / (V_c)^2 \quad (100)$$

で与えられる.

このはりの最大たわみは

$$w_1'(x_p) = 0 \quad (101)$$

となる点, すなわち, 式(71)より,

$$\tan^{-1}\{r(x_p)\} = c_{11}/2 \quad (102)$$

となる点 $x = x_p$ において生じる. 式(102)と(83)および(79)から

$$r_p = r(x_p) = \tan[(1/2)\ln\{2v(L)/z\}] \quad (103)$$

と置くと, 式(72)の $r(x)$ の定義から

$$p = x_p/L = z/\{(r_p)^2 + 1\} = 0.3999 \quad (104)$$

が求まる. このとき, 式(73)と式(102)から

$$w_1(x_p) = kL\{[z(\pi - c_{11})/2] - p r_p\} \quad (105)$$

すなわち, 最大たわみは

$$w_1(x_p) = 0.2681kL \\ = 0.04077q_0B^2L^7/\{E(V_c)^3\} \quad (106)$$

となる. そして, ひずみエネルギーは, 式(59)より

$$S = EV_c D^2/24 = (3/2)g^4(q_0)^2B^2L^8/\{E(V_c)^3\} \\ = 0.01117(q_0)^2B^2L^8/\{E(V_c)^3\} \quad (107)$$

である.

比較のために, 一様断面の一端支持-他端固定はりのデータを示す. 最大曲げモーメントは固定端における $M_B = q_0L^2/8$ である⁽⁴⁾ から, 最大応力は

$$\sigma_{\max} = 6M_B/(B(h_{\text{uni}})^2) \\ = (3/4)q_0BL^4/(V_c)^2 \quad (108)$$

である. そして, 変位が $\tilde{w} = q_0x(L-x)^2(2x+L)$ で与えられる⁽⁴⁾ から, 最大たわみは, $x = x_u = \{(1+\sqrt{33})/16\}L$ で生じる

$$\tilde{w}_{\max} = \{(39+55\sqrt{33})/65536\}\{q_0L^4/(EI_{\text{uni}})\} \\ = \{3(39+55\sqrt{33})/16384\}[q_0L^4/\{EB(h_{\text{uni}})^3\}] \\ = 0.06499q_0B^2L^7/\{E(V_c)^3\} \quad (109)$$

である. また, ひずみエネルギーは, 式(63)より

$$S = (1/640)(q_0)^2L^5/(EI_{\text{uni}}) \\ = (3/160)(q_0)^2L^5/\{EB(h_{\text{uni}})^3\} \\ = (3/160)(q_0)^2B^2L^8/\{E(V_c)^3\} \\ = 0.01875(q_0)^2B^2L^8/\{E(V_c)^3\} \quad (110)$$

である.

式(100), (107)と式(108), (110)を比較すると, 本設計によって, 応力が緩和され, 剛性の高い形状が得られていることがわかる.

5. 結 言

本論文では, 等分布荷重を受ける矩形断面不静定はりの最適断面高さ分布とたわみ関数を準解析的に検討した. 問題は曲げモーメント符号の変化点を求める問題に帰着され, 集中荷重の場合⁽¹⁾⁽²⁾のような「解無し」の問題は生じなかった. はりの最適化問題は, こ

れまでも提案されてきているように, 種々の数値的な方法で解くことができる. しかし, このような解析的な形で解を得ておくことにより, 問題をより一般的に捉えることができる. 他のはり, 例えば円形断面はりの最適化は, もちろん数値的には可能である. しかし, 式(20)~(25)の過程のように, 最適性の条件より得られるたわみの第2次導関数からたわみを求めるとき, 解析的な解の存在は数式積分の可能性に依存している. この問題については今後の課題としたい.

参 考 文 献

- (1) 多田幸生, 集中荷重を受ける両端固定はりの最適化(解析的考察), 機論, 59-567, A (1993-11), 2770-2775.
- (2) 多田幸生, 集中荷重を受ける一端支持=他端固定はりの最適化(解析的考察), 機論, 61-585, A (1995-5), 1001-1005.
- (3) Horák, V., Inverse Variational Principles of Continuum Mechanics, (1969), Rozprawy CSAV.
- (4) 平修二(監修), 現代材料力学, (1970), 79, オーム社.

(付録1: 片持ちばり)

等分布荷重を受ける長さ L^* , 体積 V^* の片持ちばりの最適化問題の解を示す. この問題は静定問題であるので, 容易に解くことができる. 左端 ($x=0$) を固定端, 右端 ($x=L^*$) を自由端とすると, 問題は逆変分原理によって次のように定式化される.

$$\Omega[h(x), \lambda, w(x)] \\ = \int_0^{L^*} (1/2)E(Bh^3/12)(d^2w/dx^2)^2 dx \\ - \int_0^{L^*} q_0 w dx - \lambda \{ \int_0^{L^*} Bh dx - V^* \} \\ \longrightarrow \text{stationary} \quad (71)$$

Ω の停留条件は

$$(Eh^2/8)(w'')^2 - \lambda = 0 \quad (0 \leq x \leq L^*) \quad (72)$$

$$\int_0^{L^*} Bh dx = V^* \quad (73)$$

$$d^2\{E(Bh^3/12)(d^2w/dx^2)\}/dx^2 = q_0 \\ (0 \leq x \leq L^*) \quad (74)$$

$$w(0) = w'(0) = 0 \quad (75)$$

$$EIw''|_{x=L^*} = 0, \quad (EIw'')'|_{x=L^*} = 0 \quad (76)$$

である. 境界条件(76)を考慮してつりあい式(74)を積分すると, つりあい式は

$$EIw'' = (q_0/2)(L^* - x)^2 \quad (77)$$

となる. 最適性の条件(72)より

$$w'' = D/h \quad (78)$$

であるから, これを式(77)に代入すると, 高さ関数は

$$h = h_0(L^* - x) \quad (79)$$

となる。したがって、式(78)より

$$w'' = k / (L^* - x) \quad (710)$$

である。よって、式(75)を考慮して積分していくと、たわみ角とたわみの関数形が次のように得られる。

$$w' = k \ln\{L^* / (L^* - x)\} \quad (711)$$

$$w = k[(L^* - x) \ln\{(L^* - x) / L^*\} + x] \quad (712)$$

式(79)を体積一定条件(73)に代入すると、係数 h_0 が

$$h_0 = 2 V^* / \{B (L^*)^2\} \quad (713)$$

と求まる。したがって、

$$h(0) = h_0 L^* = 2 V^* / (B L^*) = 2 h_{uni} \quad (714)$$

$$h_{uni} = V^* / (B L^*) \quad (715)$$

である。式(45)と式(713)より、

$$D = 3 q_0 B (L^*)^4 / \{2 E (V^*)^2\} \quad (716)$$

であり、式(47)と式(713)より

$$k = D / h_0 = 3 q_0 B^2 (L^*)^6 / \{4 E (V^*)^3\} \quad (717)$$

である。よって、自由端のたわみとたわみ角は

$$w(L^*) = \lim_{x \rightarrow L^*} w(x)$$

$$= k L^* = 3 q_0 B^2 (L^*)^7 / \{4 E (V^*)^3\} \quad (718)$$

$$w'(L^*) = \lim_{x \rightarrow L^*} w'(x) = -\infty \quad (719)$$

である。また、応力は、どこでも一様で、式(56)から

$$\sigma = E D / 2 = 3 q_0 B (L^*)^4 / \{4 (V^*)^2\} \quad (720)$$

である。はりのひずみエネルギーは、式(59)から

$$\begin{aligned} S &= E D^2 V^* / 24 \\ &= 3 (q_0)^2 B^2 (L^*)^8 / \{32 E (V^*)^3\} \end{aligned} \quad (721)$$

である。

(付録2：双片持ちばり)

本文の式(37)の解として

$$L_1 / L = 1 / 2 \quad (722)$$

も得られる。これを式(15)および(18)に代入すると、

$$h_1(x) = h_0 \{(L / 2) - x\} \quad (723)$$

となる。しかし、第3章では、 $L - 2 L_1$ が第2区間(中央部)の長さであるから、この解は第3章の議論に矛盾する。

ところで、付録1より、一様分布荷重を受ける片持ちばりの最適形状は、断面高さが固定端から線形に減少し、その自由端で断面積が零となるものであることがわかっている〔式(79)〕。今、中央部 ($x = L / 2$) で断面積が零となる〔例えば、式(723)のような〕両端固定ばりを考えると、これは、その中央部がヒンジとなる両端固定ばりであるから、自由端で断面積が零となる二つの片持ちばりが結合したものと考えることができる。そこで、第3章で得られた解と、このよ

App. Fig. 1 Optimum shape of twin-cantilevers

うな双片持ちばりとの解を比較する必要がある。

式(79)と(713)より、長さ $L^* = L / 2$ 、体積 $V^* = V_c / 2$ の等分布荷重を受ける片持ちばりの最適形状は、

$$h_1(x) = h_0 \{(L / 2) - x\} \quad (724)$$

$$h_0 = 4 V_c / (B L^2) \quad (725)$$

である。よって、式(723)は片側片持ちばりとしての最適形状となっている。また、

$$h_1(0) = h_0 L / 2 = 2 V_c / (B L) = 2 h_{uni} \quad (726)$$

である。このはりの先端 ($x = L / 2$) におけるたわみは、式(718)より

$$\begin{aligned} w_1(L / 2) &= 3 q_0 B^2 L^7 / \{64 E (V_c)^3\} \\ &= 0.046875 q_0 B^2 L^7 / \{E (V_c)^3\} \end{aligned} \quad (727)$$

である。このはりは、付録1より逆変分原理の最適性の条件を満たすから、応力はどこでも一様で、式(720)より

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 3 q_0 B L^4 / \{16 (V_c)^2\} \\ &= 0.1875 q_0 B L^4 / (V_c)^2 \end{aligned} \quad (728)$$

である。この値は第3章の解〔式(57)〕と比べると少し大きい。さらに、片側片持ちばりのひずみエネルギーは、式(721)から

$$S_1 = 3 (q_0)^2 B^2 L^8 / \{1024 E (V_c)^3\} \quad (729)$$

である。二つの片側片持ちばりが先端部で結合した双片持ちばりを考えると、その総ひずみエネルギーは

$$S = 2 S_1 \quad (730)$$

であるから、

$$\begin{aligned} S &= 3 (q_0)^2 B^2 L^8 / \{512 E (V_c)^3\} \\ &= 0.005859 (q_0)^2 B^2 L^8 / \{E (V_c)^3\} \end{aligned} \quad (731)$$

で与えられる。したがって、第3章の解のひずみエネルギー〔式(60)〕と比較すると、双片持ちばりのひずみエネルギーは少し大きいので、最大剛性設計という意味では、第3章の解が真の解であることになる。付図1に双片持ちばりの最適形状とそのたわみを示す。図および式(719)からわかるように、たわみ角はヒンジ部 ($x = L / 2$) において不連続である。