異材接合端部における熱応力分布の特性*

($\log r$ 型 $\Leftrightarrow r^{p-1}$ 型の特異性の変化に対する熱応力分布の変化)

井 上 忠 信^{*1}, 古 口 日出男^{*2}

Characteristics of Distribution of Thermal Stresses Near Apex in Dissimilar Materials (Change of Distribution of Thermal Stresses on Variation of Singularity of Type $\log r \leftrightarrow r^{p-1}$)

Tadanobu INOUE and Hideo KOGUCHI

In the previous papers, characteristics of stress fields near the apex in dissimilar materials formed from several isotropic homogeneous wedges with arbitrary angles subjected to surface traction or thermal load were theoretically clarified. The stress fields near the apex are defined by a linear combination of the singular solutions Kr^{p-1} of type r^{p-1} on root p of an eigenequation in $0 < \text{Re}(p) < 1$ or $K_\theta \log r$ of type $\log r$ on a double root $p=1$, no singularity ones Kr^{p-1} on root p in $\text{Re}(p) > 1$ and the particular solution K_{pa} on root $p=1$. The singularity of type $\log r$ appears at the boundary where characteristics of stress fields vary from no singularity solutions to singular solutions of type r^{p-1} or its reverse ($\text{Re}(p) > 1 \leftrightarrow 0 < \text{Re}(p) < 1$). For variations $\text{Re}(p) > 1 \leftrightarrow 0 < \text{Re}(p) < 1$ of root p , the distributions of stress intensity K_j on $p=p_j$ and K_{pa} on $p=1$ are changed at the boundary. Moreover, it is shown that characteristics of stress fields cannot be determined by only the roots of the eigenequation.

Key Words: Stress Intensity Factor, Elasticity, Composite Material, Thermal Stress, Eigenvalue, Residue, Poles, Stress Singularity, Thermoelastic Theory

1. 緒 言

著者らは、既報⁽¹⁾において異材接合体の接合端部における熱応力の特性を熱弾性論を用いて明らかにした。そして、異材接合体に対する熱応力の適切なパラメータを定義した。接合端部における応力場は、 r^{p-1} 型の特異解(特異性を示す特性方程式の根 $0 < \text{Re}(p) < 1$ による解)、 $\log r$ 型の特異解(重根 $p \rightarrow 1$ による解)、特異性消失解(特異性を示さない根 $\text{Re}(p) > 1$ による解)、特解(常に特性方程式の根 $p=1$ による解)の一次結合の形で表されることを示した。前報⁽²⁾においては、各理論解(特異解、特異性消失解、特解)に対するそれぞれの分布を示し、特異性消失解および特解が接合端部の応力場に与える影響を調べた。そして、特異性を示す場合の応力場でも特異解だけでなく、特異性消失解および特解も考慮する必要があることをFEMの結果も交えて明らかにした。

一般に、異材接合体の応力場の特性は、特性方程式の根によって決定される。この根は、接合体を形成す

る材料の端部角度と弾性定数(ヤング率, ポアソン比)に依存する。従って、特異性消失条件を考える場合には、これらのパラメータの変化に対する根を検討すればよいことがわかる。大路ら⁽³⁾は半平面を形成する2相異材接合体に対して、 $\log r$ 型の特異性が生じる条件を調べ、端部角度とヤング率の変化に対する特異性消失条件を示している。

特異性が消失する場合 ($\text{Re}(p) > 1$) あるいは発生する場合 ($0 < \text{Re}(p) < 1$) に対して、応力場の特性は図1のように変化する。すなわち、解が特異性消失解から r^{p-1} 型の特異解に変化する場合あるいはその逆の場合(根 p が

図1 端部角度および材料定数に対する根の変化

* 原稿受付 1994 年 12 月 28 日.

^{*1} 正員, 長岡技術科学大学大学院 (〒940-21 長岡市上富岡町 1603-1).

^{*2} 正員, 長岡技術科学大学工学部.

図3 温度変化 ΔT を受ける半平面を有する2相接合体

ここで、 ρ は接合端部からの距離 r を一樣な温度変化を受ける距離 a で除した無次元数である。

$$\rho = \frac{r}{a} \quad (r \ll a) \quad \dots\dots\dots (10)$$

式(7)の第1項目は根 p_i による解（ p_i が範囲 $0 < \text{Re}(p) < 1$ にある時は r^{p-1} 型の特異解， $\text{Re}(p) > 1$ にある時は特異性消失解）であり，第2項目は常に特性方程式の根 $p=1$ による解(特解)である。また，式(9)の第1項目は $\log r$ 型の特異解を，第2項目は $p=1$ における重根($p \rightarrow 1$)に対する特解を表している。ここで， $K_{hj}, K_{hpa}, K_{hg}, K'_{hg}$ (無次元数)は各解の応力強さを表しており，線膨張係数比 $\alpha_1/\alpha_2, \alpha_3/\alpha_2$ に対して，次式の関係を持っている。

$$K_h = \bar{K}_{hn} \left(n_1 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} - n_2 \right) - \bar{K}_{vh} \left(n_3 \frac{\alpha_3}{\alpha_2} - n_2 \right) \quad \dots\dots\dots (11)$$

3. 理論解析

本解析では，各材料の弾性定数を一定とし，端部角度を変化させた場合の根 p に対する応力強さの分布について検討する。解析条件は，平面ひずみ状態で行い，一樣な温度場から ΔT 冷却させた半平面を形成する2相異材接合体(図3参照)を考える。なお，解析では前報²⁾において，数値・数式処理システム $Mathematica$ を用いて作成したプログラムを使用した。

3.1 解析結果 各材料のポアソン比は $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ とし，剛性比 $k_{12} (= G_1/G_2 = E_1/E_2) = 2$ とした。半平面

図4 領域1の端部角度 φ_1 と根 p の関係($\varphi_1 + \varphi_2 = 180^\circ$)

($\varphi_1 + \varphi_2 = 180^\circ$)を形成する2相異材接合体の領域1の端部角度 φ_1 に対する根 p の変化を図4に示す。なお，ここでは最小の根 p_1 のみ表示している。この図より，根 p_1 は $\varphi_1 = 56.80^\circ, 123.20^\circ$ で $0 < \text{Re}(p) < 1 \rightarrow \text{Re}(p) > 1$ に変化し， $\varphi_1 = 77.45^\circ$ で $\text{Re}(p) > 1 \rightarrow 0 < \text{Re}(p) < 1$ に変化するのわかる。すなわち， $\varphi_1 = 56.80^\circ, 77.45^\circ, 123.20^\circ$ で $p=1$ は特性方程式の重根($p \rightarrow 1$)となり応力場は $\log r$ 型の特異性を持つことが予想される。図5は， $\varphi_1 = 45^\circ, 60^\circ, 100^\circ, 135^\circ$ の場合の根

(a) $\varphi_1 = 45^\circ, \varphi_2 = 135^\circ$ の場合($p_1 = 0.9439$) (b) $\varphi_1 = 60^\circ, \varphi_2 = 120^\circ$ の場合($p_1 = 1.0115$) (c) $\varphi_1 = 100^\circ, \varphi_2 = 80^\circ$ の場合($p_1 = 0.9498$) (d) $\varphi_1 = 135^\circ, \varphi_2 = 45^\circ$ の場合($p_1 = 1.0654$)図5 根 p_1 に対する応力強さ K_{h1} の分布

$p_1=0.9439, 1.0115, 0.9498, 1.0654$ に対する応力強さの、図6はその時の特解の分布を示したものである。なお、応力強さ K_h は式(11)のように定義できることから、ここでは線膨張係数に依存しない $\bar{K}_{h1}, \bar{K}_{hpa}$ の分布を示している。これらの図から、 $\varphi_1=45^\circ, 135^\circ$ と $\varphi_1=60^\circ, 100^\circ$ の場合の応力強さ $\bar{K}_{h1}$ および $\bar{K}_{hpa}$ の分布は各成分とも正負(すなわち引張りと圧縮)が逆になっているのがわかる。また、分布の形に大きな違いはなく、 K_{h1}, K_{hpa} はどちらも単に符

(a) $\varphi_1=45^\circ, \varphi_2=135^\circ$ の場合 (b) $\varphi_1=60^\circ, \varphi_2=120^\circ$ の場合 (c) $\varphi_1=100^\circ, \varphi_2=80^\circ$ の場合 (d) $\varphi_1=135^\circ, \varphi_2=45^\circ$ の場合図6 根 $p=1$ に対する応力強さ K_{hpa} の分布 (a) 根 p_1 に対する応力強さ K_{h1} の場合 (b) 根 $p=1$ に対する応力強さ K_{hpa} の場合図7 端部角度 φ_1 と応力強さの最大値の関係

号が異なる2種類の分布形に分けられる。また、同じ端部角度 φ_1 に対する根 p_1 の応力強さ $\bar{K}_{h1}$ と特解 $\bar{K}_{hpa}$ もそれぞれ正負が逆になっている。これらの中で、 $\varphi_1=60^\circ$ の場合の応力強さが他の場合に比べて大きいのがわかる。

図7は、端部角度 φ_1 と応力強さの最大値の関係を示したものである(最大値の大きさは絶対値で評価している)。ここで、 $\bar{K}_{r\theta 1}$ および $\bar{K}_{r\theta pa}$ については領域I($\gamma < 0$)およびII($\gamma > 0$)の最大値を示した。図7から、 $\log r$ 型の応力特異性が発生する端部角度 $\varphi_1=56.80^\circ, 123.20^\circ$ に近づくにつれ、応力強さ K_{h1}, K_{hpa} が大きくなっているのがわかる。しかしながら、図4に示したように同じ根を生じる $\varphi_1=77.45^\circ$ に対する応力場にも同様な特性が発生すると思われるが、この角度に対してはその特性は見られない。このことから、 $\varphi_1=77.45^\circ$ の場合の応力場の特性は $\varphi_1=56.80^\circ, 123.20^\circ$ の場合の応力場の特性($\log r$ 型の特異性を持つ)と異なることが推測できる。また、強さの最大値は $\varphi_1=56.80^\circ, 123.20^\circ$ を境に正負が逆になっている。

3.2 理論式の導出 接合端部の応力強さは、次式のMellin変換したAiryの応力関数 ϕ^* を式(13)のMellin変換した応力の式に代入し、これを逆Mellin変換することによって導かれる⁽¹⁾。ここで、 δ は各領域($\delta=1, 2$)を示している。

$$\begin{aligned} \phi^*(p, \theta) \Big|_{\delta} = & -a(p)_{\delta} \sin[(p+1)\theta] + b(p)_{\delta} \cos[(p+1)\theta] \\ & -c(p)_{\delta} \sin[(p-1)\theta] + d(p)_{\delta} \cos[(p-1)\theta] \\ & \dots \dots \dots (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\pi}^*(p, \theta)|_b &= \left[\frac{d^2}{d\theta^2} + (p+1) \right] \phi^*(p, \theta)|_b \\ \sigma_{r\theta}^*(p, \theta)|_b &= -p \frac{d}{d\theta} \phi^*(p, \theta)|_b \quad \dots\dots (13) \\ \sigma_{\theta\theta}^*(p, \theta)|_b &= p(p+1) \phi^*(p, \theta)|_b\end{aligned}$$

式(12)の8個の未知関数 $a_1 \sim d_2$ (3相接合体の場合は12個の未知関数 $a_1 \sim d_3$)は、式(4)から次式のように得られる。

$$a_\delta(p) = \frac{1}{S} T_{12} M_{a\delta}, \dots, d_\delta(p) = \frac{1}{S} T_{12} M_{d\delta} \quad \dots\dots (14)$$

よって、

$$\begin{aligned}\phi^*(p, \theta)|_b &= \frac{1}{S} T_{12} M_\delta \\ M_\delta &= -M_{a\delta} \sin(p+1)\theta + M_{b\delta} \cos(p+1)\theta \\ &\quad - M_{c\delta} \sin(p-1)\theta + M_{d\delta} \cos(p-1)\theta \\ &\quad \dots\dots\dots (15)\end{aligned}$$

(a) 根 p_j による応力強さ K_{hj} 特性方程式の根を p_j とすると、式(6),(13),(15)から極の位数は1となる。よって、その時の応力強さ K_{hj} は次式のように算出される。

$$\begin{aligned}K_{mj}(p_j, \theta)|_b &= \left[\frac{d^2}{d\theta^2} + (p_j+1) \right] \phi'(p_j, \theta)|_b \\ K_{r\theta j}(p_j, \theta)|_b &= -p_j \frac{d}{d\theta} \phi'(p_j, \theta)|_b \quad \dots\dots\dots (16) \\ K_{\theta\theta j}(p_j, \theta)|_b &= p_j(p_j+1) \phi'(p_j, \theta)|_b\end{aligned}$$

ここで、

$$\phi'(p_j, \theta)|_b = \frac{k_{12} \left(n_1 \frac{a_1}{a_2} - n_2 \right)}{p_j(p_j-1) \frac{d}{d\theta} S \Big|_{p=p_j}} M_\delta(p_j, \theta) \quad \dots\dots (17)$$

すなわち、 $(dS/dp)_{p=p_j}$ が0に近づくにつれ、 K_{hj} は大きくなり、 $(dS/dp)_{p=p_j} \rightarrow 0$ で $K_{hj} \rightarrow \infty$ となる。図8は、端部角度 φ_1 と $(dS/dp)_{p=p_1}$ の関係を示したものである。対数型の特異性を示す($p=1$ で重根)端部角度 φ_1 の近傍で $(dS/dp)_{p=p_1}$ の値は小さくなることから、 K_{h1} は $\varphi_1=56.8^\circ, 77.45^\circ, 123.2^\circ$ に近づくにつれ大きくなることが予想できる。図7(a)より、その傾向は $\varphi_1=56.8^\circ, 123.2^\circ$ 近傍で見られるが、 $\varphi_1=77.45^\circ$ 近傍では見られない。これは、特性方程式では $\varphi_1=77.45^\circ$ で $p=1$ は重根となるが、その時の応力場にはlog型の特異性は発生しないことを意味する。

図8 端部角度 φ_1 と $(dS/dp)_{p=p_1}$ の関係

(b) 根 $p=1$ による応力強さ K_{hpa} $p=1$ は常に特性方程式の根である。その時、式(6),(13),(15)から極の位数は2となり、応力強さ K_{hpa} は次式のように算出される。

$$\begin{aligned}K_{rpa}(\theta)|_b &= -\phi'_{pa}(p)|_b \frac{d}{d\theta} \left[\frac{d^2}{d\theta^2} + (p+1) \right] M_\delta(p, \theta) \Big|_{p=1} \\ K_{r\theta pa}(\theta)|_b &= \phi'_{pa}(p)|_b \frac{d^2}{dp d\theta} M_\delta(p, \theta) \Big|_{p=1} \\ K_{\theta\theta pa}(\theta)|_b &= -2\phi'_{pa}(p)|_b \frac{d}{dp} M_\delta(p, \theta) \Big|_{p=1}\end{aligned} \quad (18)$$

ここで、

$$\phi'_{pa}(p)|_b = \frac{k_{12} \left(n_1 \frac{a_1}{a_2} - n_2 \right)}{8 \frac{d}{dp} S \Big|_{p=1}} \quad \dots\dots\dots (19)$$

特に $\varphi_1 + \varphi_2 = \pi$ の場合、 K_{hpa} は $\delta=1, 2$ で同じ式で表すことができ、

$$\begin{aligned}K_{rpa}(\theta) &= \frac{-2k_{12} \left(n_1 \frac{a_1}{a_2} - n_2 \right) E_r}{(k_{12}m_2 + m_1) \frac{d}{dp} S \Big|_{p=1}} \{1 + \cos 2(\theta + \varphi_1)\} \\ K_{r\theta pa}(\theta) &= \frac{2k_{12} \left(n_1 \frac{a_1}{a_2} - n_2 \right) E_r}{(k_{12}m_2 + m_1) \frac{d}{dp} S \Big|_{p=1}} \sin 2(\theta + \varphi_1) \\ K_{\theta\theta pa}(\theta) &= \frac{-2k_{12} \left(n_1 \frac{a_1}{a_2} - n_2 \right) E_r}{(k_{12}m_2 + m_1) \frac{d}{dp} S \Big|_{p=1}} \{1 - \cos 2(\theta + \varphi_1)\}\end{aligned} \quad (20)$$

ここで、

$$E_r = 4 \sin \varphi_1 [2\alpha_{12} \sin \varphi_1 + \cos \varphi_1 \{ \alpha_{12}(\pi - 2\varphi_1) - \pi \}] \quad (21)$$

また、 $\gamma = \varphi_1 - \pi/2 + \theta$, $(dS/dp)_{p=1} = -R_r \times E_r / (k_{12}m_2 + m_1)$ で表せることから、結局 K_{hpa} は次式のように示される。

$$\begin{cases} K_{rpa}(\gamma) = \frac{1}{2} K_{pa} \{1 - \cos 2\gamma\} \\ K_{r\theta pa}(\gamma) = \frac{1}{2} K_{pa} \sin 2\gamma \\ K_{\theta\theta pa}(\gamma) = \frac{1}{2} K_{pa} \{1 + \cos 2\gamma\} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (22)$$

ここで、

$$\begin{aligned}K_{pa} &= \frac{4k_{12} \left(n_1 \frac{a_1}{a_2} - n_2 \right)}{R_r} \\ R_r &= (k_{12}m_2 + m_1) \{ \alpha_{12} - 2 \sin^2 \varphi_1 (\alpha_{12} - \beta_{12}) \} \quad \dots\dots (23) \\ &= -4(k_{12} - 1) \sin^2 \varphi_1 + (k_{12}m_2 - m_1)\end{aligned}$$

よって、 K_{rpa} および $K_{\theta\theta pa}$ は $\gamma=0^\circ$ (CL)で対称(偶関数)に、 $K_{r\theta pa}$ は点対称(奇関数)となる。各特解 K_{rpa} 、 $K_{\theta\theta pa}$ 、 $K_{r\theta pa}$ の最大値は、常に $\gamma=\pm 90^\circ, \pm 45^\circ, 0^\circ$ で発生し、 $K_{rpa(max)} = \pm 2 K_{r\theta pa(max)} = K_{\theta\theta pa(max)}$ の関係を持つ(これは、図6からもわかる)。また、最大値が引張りおよび圧縮になるのは R_r (偶関数)に依存する。端部角度 φ_1 に対する $(dS/dp)_{p=1}$ および R_r, E_r の変化を次頁の図9に示す。分母 R_r は $\varphi_1=90^\circ$ で対称となり、 $\varphi_1=56.8^\circ, 123.2^\circ$ で0となり、この時の端部角度でlog型の特異性を持つ。また、分子との共通因子で消去された E_r は $\varphi_1=77.45^\circ$ で0となり、これが特性方程式の重

(a) $(dS/dp)_{p=1}$ の変化 (b) R_r, E_r の変化図9 端部角度 φ_1 と $(dS/dp)_{p=1} = -R_r \times E_r / (k_{12} m_2 + m_1)$ の関係

根($p \rightarrow 1$)を引き起こした因子であることがわかる。

4. 考 察

4.1 解析結果から 根 p_1 および $p=1$ による応力強さ K_{h1} および K_{hpa} は、根 p_1 が $\text{Re}(p) > 1 \leftrightarrow 0 < \text{Re}(p) < 1$ に変化する場合には、 $\log r$ 型の特異解を境に引張りおよび圧縮(正負)が逆になることがわかった。そして、端部角度 φ_1 に対する K_{h1} と K_{hpa} の正負も逆になる($p \rightarrow 1$ で $K_{h1}/K_{hpa} \rightarrow -1$)。その大きさおよび正負は、特性方程式の一回微分の値 $(dS/dp)_{p=p_1}$ および $(dS/dp)_{p=1}$ に依存し、 $\log r$ 型の特異解が生じる端部角度に近づくにつれ、 K_{h1} および K_{hpa} は大きくなり、その解を境として正負が変化する。また、その境となる $\log r$ 型の特異解は必ずしも特性方程式からでは決められず、未知関数を導いた時に算出される因子 E_r を消去した式(23)の R_r を 0 とする端部角度と弾性定数の組み合わせから決定される。この関数 R_r は $\varphi_1 = 90^\circ$ で対称(偶関数)となるので、 $\log r$ 型の特異解が一つ見つければ $\varphi_1 = 90^\circ$ に対称な端部角度 φ_1 にも見いだすことができる。特に、互いの材料のポアソン比が同じ場合、 R_r は次式のように整理される。

$$R_r = 2(k_{12} - 1)(\cos 2\varphi_1 + \frac{m}{2} - 1) \quad (24)$$

すなわち、 $k_{12} = 1$ (半平面を形成する単体)あるいは $\varphi_1 = (1/2)\cos^{-1}(2-m)/2$ (剛性比 k_{12} は依存しない)を満たす場合に、 $\log r$ 型の特異性が発生する。図10は、応力場に $\log r$ 型の特異性が発生する($R_r = 0$ とする)端部角度 φ_1 とポアソン比の関係を示したものである。また、幾つかのポアソン

図10 $\log r$ 型の特異性が発生する端部角度 $\varphi_1 (R_r = 0)$ 図11 $E_r = 0$ を満たす φ_1 と k_{12} の関係

比の組み合わせに対して、 $E_r = 0$ を満たす φ_1 と k_{12} の関係を図11に示す。図10,11で示された R_r, E_r を 0 とする端部角度と弾性定数の組み合わせに対して、特性方程式は重根($p \rightarrow 1$)となる。しかしながら、 $E_r = 0$ とする端部角度と弾性定数の組み合わせの時には、応力場に $\log r$ 型の特異性は発生しない。Bogy⁽⁴⁾は、互いに直角な端部角度で接合された2相異材接合体($90^\circ-90^\circ$)の場合、 $\alpha_{12} = 0$ あるいは $\alpha_{12} = 2\beta_{12}$ の組み合わせで $\log r$ 型の特異性が発生すると論じている。前者は $E_r = 0$ と、後者は $R_r = 0$ とする組み合わせに対応している。よって、熱応力の場合 $90^\circ-90^\circ$ の接合体で $\log r$ 型の特異性が発生するのは $\alpha_{12} = 2\beta_{12}$ の時だけであり、 $\alpha_{12} = 0$ の場合には発生しない($\alpha_{12} = 0$ の時、応力場は特解 K_{hpa} が支配的となる)。このことは、前報⁽²⁾で示した結果と一致する。

4.2 重根 $p \rightarrow 1$ による応力強さ K_{hg} 式(23)の $R_r = 0$ の場合、応力場に式(9)で示したような $\log r$ 型の特異性が発生する。その時の応力強さ K_{hg} は、 $\varphi_1 + \varphi_2 = \pi$ の場合次式のように定義される。

$$\begin{cases} K_{r\theta}(\gamma) = \frac{1}{2} K_g \{1 - \cos 2\gamma\} \\ K_{r\theta}(\gamma) = \frac{1}{2} K_g \sin 2\gamma \\ K_{\theta\theta}(\gamma) = \frac{1}{2} K_g \{1 + \cos 2\gamma\} \end{cases} \quad (25)$$

ここで、

$$K_g = \frac{-4E_r k_{12} \left(n_1 \frac{a_1}{a_2} - n_2 \right)}{(k_{12} m_2 + m_1) D_r}$$

$$D_r = \varphi_1^2 (\alpha_{12} + 1) (D_a + 1) + \varphi_2^2 (\alpha_{12} - 1) (D_a - 1)$$

$$+ D_b \{ \varphi_1 (\beta_{12} - 1) + \varphi_2 (\beta_{12} + 1) \}$$

$$+ 2\varphi_1 \varphi_2 \{ (1 + \alpha_{12})(1 - \alpha_{12}) + 2(\alpha_{12}^2 - \beta_{12}^2) \sin^2(2\varphi_1) \}$$

$$- 4 \sin^2 \varphi_1 \{ \alpha_{12}^2 (1 - 6 \sin^2 \varphi_1) + 2\beta_{12} \sin^2 \varphi_1 (5\alpha_{12} - 2\beta_{12}) \}$$

(a) $\varphi_1=56.8^\circ, \varphi_2=123.2^\circ$ の場合 (b) $\varphi_1=123.2^\circ, \varphi_2=56.8^\circ$ の場合図12 重根 $p \rightarrow 1$ に対する応力強さ K_{hg} の分布

$$\begin{cases} D_a = \alpha_{12}(1 - 4\sin^2 \varphi_1) - 4(\alpha_{12} - \beta_{12})\sin^3 \varphi_1 \cos(2\varphi_1) \\ D_b = 16(\alpha_{12} - \beta_{12})\sin^3 \varphi_1 \cos \varphi_1 \end{cases} \quad (26)$$

よって、応力強さ K_{hg} は式(22)の特解 K_{hpo} と同様に $K_{rrg}, K_{\theta\theta g}$ は偶関数、 $K_{r\theta g}$ は奇関数となり、各応力強さ $K_{rrg}, K_{r\theta g}, K_{\theta\theta g}$ の最大値は、常に $\gamma = \pm 90^\circ, \pm 45^\circ, 0^\circ$ で発生し、 $K_{rrg(max)} = \pm 2K_{r\theta g(max)} = K_{\theta\theta g(max)}$ の関係を持つ。また、式(25), (26)から $E_r = 0$ の時 $K_{hg} = 0$ となる。図12は、 $\varphi_1 = 56.8^\circ, 123.2^\circ$ の時に生じるlog型の特異解の応力強さ K_{hg} の分布を示したものである。図9(b)と図12から、応力強さ K_{hg} の正負は E_r に依存するのがわかる(φ_1 の変化に対して、特性方程式は $p=1$ で3重根とならないので、 D_r の正負の変化はない)。

4.3 応力が最大となる角度 θ 接合端部における応力状態を知るためには、根 p_i とその時の応力強さ $K_h(\theta)$ の関係を調べることが必要である。特に、端部にき裂が生じるとすれば特異解の応力強さ K_{hg}, K_{hg} の最大となる角度 θ が問題となる。図13は、前章の解析条件に対して端部角度 φ_i と応力強さが最大となる角度 θ の関係を示したものである。ただし、強さの分布は図5, 12のようになるため、 K_{rr}, K_{rrg} に対しては各材料の占める領域(Ω_1, Ω_2)の、 $K_{r\theta}, K_{r\theta g}$ に対しては領域I($\gamma < 0$)およびII($\gamma > 0$)の最大値を示した。この図から、 K_{rr} は自由表面($\gamma = \pm 90^\circ$)近傍で、 $K_{r\theta}$ は $\gamma = \pm 45^\circ$ 近傍で、そして $K_{\theta\theta}$ は $\gamma = 0^\circ$ 近傍の領域I($\gamma < 0$)側で最大となっているのがわかる。図14は、90-90°の2相異材接合体($\nu_1 = \nu_2 = 0.3$)に対して、剛性比 k_{12} と特異解(根 p_i)の応力強さ K_{hi} の最大値となる角度 θ の関係を示したも

図13 φ_1 に対する K_{h1}, K_{hg} の最大となる角度 θ の変化 (a) 応力強さ $K_{r\theta i}$ の場合 (b) 応力強さ $K_{\theta\theta i}$ の場合図14 k_{12} に対する K_{hi} の最大となる角度 θ の変化

のである。 $K_{\theta\theta}$ が最大となる角度は $\gamma = 0^\circ$ 近傍の硬い材料が存在する領域側で生じ、剛性比が大きくなればなるほど、その角度は $\gamma = 0^\circ$ から硬い材料の自由表面側に移動する。同様に、剛性比が大きくなればなるほど、領域Iの最大値 $K_{r\theta}|_{max}(I)$ を生じる角度は $\gamma = -45^\circ$ から硬い材料の自由表面側に、領域IIの最大値 $K_{r\theta}|_{max}(II)$ を生じる角度は $\gamma = 45^\circ$ からCL($\gamma = 0^\circ$)側に移動する。すなわち、硬い材料が存在する領域側に移動する。ここで、図示していない半径方向の応力強さ K_{rr} は、常に硬い材料の自由表面上($\theta = 90^\circ$)で最大となる。また、 $k_{12} = 1$ (半平面を有する単体)の時、根は $p \rightarrow 1$ となることから、 k_{12} が1に近づくにつれ、 $K_{rr}, K_{r\theta}, K_{\theta\theta}$ が最大となる角度は式(25)から $\gamma = \pm 90^\circ, \pm 45^\circ, 0^\circ$ に移動する。

4.4 剛性比 k_{12} に対する応力強さの変化 本解析では、端部角度を変化させた場合の根 p の変化に対する応力強さについて検討した。前述したように根 p は端部角

図15 剛性比 k_{12} と根 p_1 およびその時の $K_{h1(max)}$ の関係

度だけでなく、弾性定数に対しても変化する。したがって、応力場が弾性定数の変化に対して $\log r$ 型の特異解を持つ場合には、その近傍において応力強さは本解析結果と同様な傾向を示す。図15は、90-90°の2相異材接合体($\nu_1 = \nu_2 = 0.3$)に対して、剛性比 k_{12} に対する根 p_1 の変化およびその時の応力強さ K_{h1} の最大値を示したものである。この場合、 $k_{12}=1$ は半平面を有する単体(その時 $\log r$ 型の特異性が生じる)となることから、半平面を有する異材接合体の場合、剛性比 k_{12} に対して、常に図15のように $k_{12}=1$ に近づくにつれ、根 p は $p \rightarrow 1$ の根に近づくので、応力強さは大きくなる(この時の応力強さが最大となる角度 θ は図14に示した通りである)。このことは、特解に対しても同様であることが式(22),(23)からわかる。

4.5 任意の端部角度を有する接合体の場合 本解析では、半平面を形成する2相異材接合体を対象としたが、その他の任意の端部角度を形成する異材接合体でも、本結果と同様な性質を示す。そのことは、以下のように説明できる。特性方程式の根を p_j とすると、極の位数は1となり、その留数を求めた場合、応力強さ K_{hj} は常に式(16),(17)の形で表される。従って、特性方程式の一回微分 dS/dp に $p=p_j$ を代入した値が0(重根 $p \rightarrow 1$ となる端部角度と弾性定数の組み合わせ)に近づくにつれ、 K_{hj} は大きくなる。また、 $(dS/dp)_{p=p_j}$ の値は $p \rightarrow 1$ を境として正負が変わるので、その時の強さ K_{hj} の正負(引張りおよび圧縮)も $p \rightarrow 1$ を境として変化する。これは、特解に対しても同様である。また、その境となる根 $p \rightarrow 1$ は必ずしも特性方程式だけでは決められず、未知関数を導い

た時に算出される分母 $(dS/dp)_{p=1}$ と分子の共通因子がある場合には、その因子を消去した後の分母を0とする端部角度と弾性定数の組み合わせから決定される。また、この応力強さの性質は外力が作用した場合(静弾性問題)の応力場に対しても同様である。

5. 結 言

本論文では、一様な温度変化を受ける半平面を有する2相異材接合体を考え、根 p が $Re(p) > 1 \leftrightarrow 0 < Re(p) < 1$ に変化する場合に対して、その時の根 p に対する応力強さの性質を調べた。そして、根 p が $Re(p) > 1 \leftrightarrow 0 < Re(p) < 1$ に変化する場合、根 p および $p=1$ に対する応力強さの値は $\log r$ 型の特異解($p \rightarrow 1$)を境に正負(引張りおよび圧縮)が変わり、 $p \rightarrow 1$ 近傍で大きくなることを示した。これは、特性方程式の一回微分の値 $(dS/dp)_{p=p_1}$ および $(dS/dp)_{p=1}$ に依存することを明らかにした。また、境となる重根 $p \rightarrow 1$ は必ずしも特性方程式からだけでは決められず、未知関数を導いた時に算出される分母と分子の共通因子がある場合には、その因子を消去した後の分母を0とする端部角度と弾性定数の組み合わせから決定されることを明らかにした。この性質は、任意の端部角度を持つ異材接合体や静弾性問題の場合に対しても同様である。

特に、半平面($\varphi_1 + \varphi_2 = \pi$)を有する2相異材接合体に対して、以下のことがわかった。

(1) 端部角度および弾性定数の組み合わせに対して次式の偶関数 R_r を満たす場合のみ、応力場に $\log r$ 型の特異性が発生する。

$$R_r = -4(k_{12} - 1)\sin^2 \varphi_1 + (k_{12}m_2 - m_1)$$

(2) 特解および $\log r$ 型の特異解の応力強さ $K_{rrpa}, K_{\theta\theta pa}$ および $K_{rrg}, K_{\theta\theta g}$ は偶関数、 $K_{r\theta pa}$ および $K_{r\theta g}$ は奇関数である。これらの各成分 $rr, r\theta, \theta\theta$ の最大値は、常に $\gamma = \pm 90^\circ, \pm 45^\circ, 0^\circ$ で発生し、 $K_{rrpa(max)} = \pm 2K_{r\theta pa(max)} = K_{\theta\theta pa(max)}$ および $K_{rrg(max)} = \pm 2K_{r\theta g(max)} = K_{\theta\theta g(max)}$ の関係を持つ。

(3) 根 p_j による応力強さ K_{rrj} は自由表面($\gamma = \pm 90^\circ$)近傍で、 $K_{r\theta j}$ は $\gamma = \pm 45^\circ$ 近傍で、そして $K_{\theta\theta j}$ は $\gamma = 0^\circ$ 近傍の硬い材料が存在する領域側で最大となる。そして、各成分とも剛性比が大きくなればなるほど、その角度は硬い材料の自由表面側に移動する。また、 $k_{12}=1$ で根は $p \rightarrow 1$ となることから、 k_{12} が1に近づくにつれ、 $K_{rrj}, K_{r\theta j}, K_{\theta\theta j}$ が最大となる角度は $\gamma = \pm 90^\circ, \pm 45^\circ, 0^\circ$ に移動する。

文 献

- (1) 井上・古口・矢田, 機論掲載予定, A(1995).
- (2) 井上・古口・矢田, 機論掲載予定, A(1995).
- (3) 大略・久保・中井・井岡, 材料, 41-468, 1992, 1389.
- (4) Bogy, D. B., Int. J. Solids Struct., 6(1970), 1287.