円形き裂を有する Kassir の不均質無限体における
軸対称定常熱応力と熱応力拡大係数*谷川 義信^{*1}, 村木 剛尚^{*2}, 河村 隆介^{*1}Evaluation of Axisymmetric Steady Thermal Stress and Thermal
Stress Intensity Factor for Kassir's Nonhomogeneous
Infinite Body with Penny-Shaped Crack

Yoshinobu TANIGAWA, Takehisa MURAKI and Ryuusuke KAWAMURA

This paper is concerned with a theoretical treatment of thermal stress intensity factor for a medium with Kassir's nonhomogeneous material properties. As an analytical model, we consider an infinite body with a penny-shaped crack with radius a subjected to uniform heat flux from the crack surface. Assuming that the thermal conductivity λ , shear modulus of elasticity G and coefficient of thermal expansion α vary with the axial coordinate z according to the relations $\lambda(z) = \lambda_0(|z/a| + 1)^p$, $G(z) = G_0(|z/a| + 1)^m$, $\alpha(z) = \alpha_0(|z/a| + 1)^n$, the axisymmetrical steady temperature solution is obtained. Thereafter, the associated thermal stress distribution and the thermal stress intensity factor are evaluated theoretically using the method of superposition. Numerical calculations are carried out for three different cases, and the results are shown in graphical form.

Key Words: Thermoelasticity, Fracture Mechanics, Thermal Stress, Stress Intensity Factor, Kassir's Nonhomogeneous Body, Axisymmetric Problem

1. 緒 言

現在、熱応力問題の分野においては、熱応力緩和型傾斜機能材料(FGM; Functionally Gradient Material)に見られるように、均質材料では発現し得ない機能を秘めた不均質材料に大きな注目が寄せられている。このような材料の不均質特性に注目し、FGMの概念が生まれるより以前に、材料物性に不均質特性を取り入れた研究例としては、唯一、Kassirの不均質体の問題を挙げることができる。Kassirの不均質体とは、円柱座標系($r\theta z$ 系)で表される問題を対象とし、材料定数、すなわち横弾性係数 G (あるいは縦弾性係数 E)が軸方向(z 方向)に関して任意に変化するという材料特性を有する不均質体の解析モデルであり、これらの材料定数は、座標変数 z の任意のべき乗の形で表現されるものとして理論の展開がなされる。このような不均質体に関する報告例として、弾性問題については、すでに、円形き裂先端の特異応力場を線形弾性破壊力学の手法により取扱ったいくつかの報告例⁽¹⁾

が見受けられる。しかし、熱弾性問題に関する研究は、ほとんど見受けられず、わずかに畑による半無限体あるいは厚板の軸対称熱応力問題に関する報告例^{(2)~(4)}が見受けられる程度である。

そこで、本研究では、温度変化を受ける Kassir の不均質体に関する熱弾性問題の解析例の一つとして、円形き裂を有する無限体を解析モデルとして取り上げ、き裂近傍での温度変化により生じる無限体中の軸対称定常熱応力分布およびき裂先端での熱応力拡大係数を解析的手法により求め、さらに数値計算を遂行して、不均質特性の変化が温度分布、熱応力分布および熱応力拡大係数に及ぼす影響について検討した。

2. 解 析

図1に示すような半径 a の円形き裂を有する無限体を想定し、円柱座標系($r-z$ 座標系)の原点を円形き裂の中心にとる。このようなき裂を有する無限体の特異応力場に対する問題設定としては、さまざまな複雑な加熱条件が考えられるが、モード I の変形を生じる最も簡単な問題設定として、野田ら⁽⁵⁾が、均質体の非定常熱応力問題に対して採用した、円形き裂面から単位時間、単位面積当たり $-q_0$ の一様熱吸収がある場合を、本報においても採用することにする。

* 原稿受付 1995年3月1日。

^{*1} 正員、大阪府立大学工学部 (〒593 堺市学園町1-1)。^{*2} 学生員、大阪府立大学大学院 [現：高砂熱学工業(株) (〒130 東京都墨田区両国2-10-8)]。

なお、このき裂面において一様熱吸収があるという問題設定は、モード I の変形が生じる最も代表的な数理モデルとして採用したものであり、実際問題との対応が難しい。

2・1 温度解析 物性値が z 方向に関して任意に変化することを想定した Kassir の不均質体に対する非定常熱伝導問題の解析は、極めて困難である。そこで本報では、まず、定常熱伝導問題について取扱うことにする。図 1 に示すようにき裂表面 ($z=0, r \leq a$) から一様な熱吸収 $-q_0$ がある場合、熱伝導問題は軸対称となる。さらに、熱的および力学的材料物性値については、 $z=0$ のき裂存在面に関して対称であると仮定する。この仮定は、モード I の変形のみが生じることを考慮して導入したものであり、物性値が対称性をもたない非対称の場合には、理論解析が格段に複雑となることが予測される。このとき、 $z \geq 0$ の解析領域に対して、定常熱伝導の基礎方程式および熱的境界条件は次式で与えられる。

$$\lambda(z) \left\{ \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \lambda(z) \frac{\partial T}{\partial z} \right\} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$z=0; \frac{\partial T}{\partial z} = q_0 H(a-r) / \lambda(z) \quad \dots\dots\dots (2)$$

式(1), (2)において、 T は温度変化、 r および z は円柱座標系、 $\lambda(z)$ は z 方向に関して不均質特性を有する熱伝導率、 $H(\quad)$ はヘビサイド関数である。式(1), (2)を無次元表示するため、次式で定義される無次元量を導入する。

$$\left(\bar{r}, \bar{z} \right) = (r, z) / a, \quad \bar{\lambda}(\bar{z}) = \lambda(z) / \lambda_0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\bar{T}(\bar{r}, \bar{z}) = T(r, z) / (q_0 a / \lambda_0)$$

ただし、 λ_0 は熱伝導率に関する基準物性値である。ここで、無次元表示された熱伝導率 $\bar{\lambda}(\bar{z})$ の具体形として、後述の弾性場における弾性定数の場合と同じく、 $\bar{z}=0$ で基準物性値 λ_0 となり、 $\bar{z}$ の任意のべき乗の形で記述され、さらに $\bar{z}=0$ の面に関して対称、すなわち $\bar{\lambda}(-\bar{z}) = \bar{\lambda}(\bar{z})$ で表される関数を想定すれば、次式のように与えることができる。

Fig. 1 Coordinate systems and thermal boundary condition

$$\bar{\lambda}(\bar{z}) = (|\bar{z}| + 1)^\beta$$

$$\therefore \bar{\lambda}(\bar{z}) = (|\bar{z}| + 1)^\beta \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここで β は不均質特性を表す任意の数値パラメータである。式(3), (4)を式(1), (2)に代入し、さらに、

$$\bar{z} = \bar{z} + 1 \quad \dots\dots\dots (5)$$

で表される変数変換を導入すれば、 $\bar{z} \geq 1$ の解析領域に対して次式に示すような方程式系が得られる。

$$\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \cdot \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}} + \frac{\beta}{\bar{z}} \cdot \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{z}^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\bar{z}=1; \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{z}} = H(1-\bar{r}) \quad \dots\dots\dots (7)$$

式(6), (7)を $\bar{r}$ に関する零次のハンケル変換を用いて解けば、次式で示される温度解が得られる。

$$\bar{T}(\bar{r}, \bar{z}) = - \int_0^\infty \frac{1}{s} \cdot \frac{J_1(s)}{K_{\mu-1}(s)} J_0(s\bar{r}) \bar{z}^\mu K_\mu(s\bar{z}) ds \quad \dots\dots\dots (8)$$

ただし、 $J_0(\quad)$ は、零次の第一種ベッセル関数、 $K_\mu(\quad)$ は μ 次の第二種変形ベッセル関数であり、 μ は次式で定義される。

$$\mu = \frac{1}{2}(1-\beta) \quad \dots\dots\dots (9)$$

2・2 熱応力解析 軸対称問題に対する応力の釣合い方程式およびひずみ成分の無次元表示は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{\sigma}_{rr}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}} (\bar{\sigma}_{rr} - \bar{\sigma}_{\theta\theta}) + \frac{\partial \bar{\sigma}_{rz}}{\partial \bar{z}} &= 0 \\ \frac{\partial \bar{\sigma}_{rz}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}} \bar{\sigma}_{rz} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{zz}}{\partial \bar{z}} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\epsilon}_{rr} &= \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \bar{r}}, \quad \bar{\epsilon}_{\theta\theta} = \frac{\bar{u}_r}{\bar{r}}, \quad \bar{\epsilon}_{zz} = \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial \bar{z}} \\ \bar{\epsilon}_{rz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial \bar{r}} \right) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (11)$$

上式(10), (11)において導入した無次元量は、

$$\left. \begin{aligned} (\bar{\sigma}_{rr}, \bar{\sigma}_{\theta\theta}, \bar{\sigma}_{zz}, \bar{\sigma}_{rz}) &= (\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}, \sigma_{rz}) \\ &\quad / (\alpha_0 G_0 q_0 a / \lambda_0) \\ (\bar{u}_r, \bar{u}_z) &= (u_r, u_z) / (\alpha_0 q_0 a^2 / \lambda_0) \\ (\bar{\epsilon}_{rr}, \bar{\epsilon}_{\theta\theta}, \bar{\epsilon}_{zz}, \bar{\epsilon}_{rz}) &= (\epsilon_{rr}, \epsilon_{\theta\theta}, \epsilon_{zz}, \epsilon_{rz}) \\ &\quad / (\alpha_0 q_0 a / \lambda_0) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (12)$$

であり、式(12)において、 $\bar{\sigma}_{ij}, \bar{\epsilon}_{ij} (i, j = r, \theta, z)$ は応力およびひずみ成分、 $u_i (i = r, z)$ は変位成分であり、 α_0, G_0 はそれぞれ後述の線膨張係数 $\alpha(z)$ および横弾性係数 $G(z)$ に関する基準物性値を意味する。

一方、Kassir の不均質体においては、横弾性係数 $G(z)$ が座標変数 z の任意のべき乗の形で与えられる。そこで前節で述べた温度解析における無次元熱伝導率 $\bar{\lambda}(\bar{z})$ と同じく、 $G(z)$ は $\bar{z}=0$ で基準物性値 G_0 となり、さらに $G(-z) = G(z)$ なる対称関数で表され

るものとする、 $G(z)$ の無次元量 $\bar{G}(\bar{z})$ は、 $\bar{z} \geq 0$ の解析領域に対して次式のように与えることができる。

$$\bar{G}(\bar{z}) \equiv G(z)/G_0 = (\bar{z}+1)^m, \bar{z} \geq 0 \quad \dots\dots\dots (13)$$

あるいは、式(5)の変数変換を用いれば、

$$\bar{G}(\bar{z}) = \bar{z}^m, \bar{z} \geq 1 \quad \dots\dots\dots (13)'$$

ここで、 $m(m \geq 0)$ は横弾性係数の不均質特性を表す数値パラメータである。また、ポアソン比 $\nu(z)$ については、その変化が小さいものとして、

$$\nu(z) = \nu \quad (\text{一定}) \quad \dots\dots\dots (14)$$

と仮定し、さらに、線膨張係数 $\alpha(z)$ の無次元表示を、

$$\bar{\alpha}(\bar{z}) = \alpha(z)/\alpha_0 \quad \dots\dots\dots (15)$$

で表す。このとき、応力-ひずみ関係式の無次元表示は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_{rr} &= 2\bar{z}^m \left[\bar{\varepsilon}_{rr} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left\{ \bar{e} - \frac{1+\nu}{\nu} \bar{\alpha}(\bar{z}) \bar{T}(\bar{r}, \bar{z}) \right\} \right] \\ \bar{\sigma}_{\theta\theta} &= 2\bar{z}^m \left[\bar{\varepsilon}_{\theta\theta} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left\{ \bar{e} - \frac{1+\nu}{\nu} \bar{\alpha}(\bar{z}) \bar{T}(\bar{r}, \bar{z}) \right\} \right] \\ \bar{\sigma}_{zz} &= 2\bar{z}^m \left[\bar{\varepsilon}_{zz} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left\{ \bar{e} - \frac{1+\nu}{\nu} \bar{\alpha}(\bar{z}) \bar{T}(\bar{r}, \bar{z}) \right\} \right] \\ \bar{\sigma}_{rz} &= 2\bar{z}^m \bar{\varepsilon}_{rz}, \bar{e} = \bar{\varepsilon}_{rr} + \bar{\varepsilon}_{\theta\theta} + \bar{\varepsilon}_{zz} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (16)$$

式(5)の変数変換を考慮して、式(11)を式(16)に代入し、さらに得られた関係式を式(10)に代入し、ナビエの方程式を求めれば、

$$\begin{aligned} \nabla^2 \bar{u}_r - \frac{\bar{u}_r}{\bar{r}^2} + \frac{1}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial \bar{e}}{\partial \bar{r}} + \frac{m}{\bar{z}} \left(\frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \bar{r}} \right) \\ = \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \{ \bar{\alpha}(\bar{z}) \bar{T}(\bar{r}, \bar{z}) \} \quad \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \bar{u}_z + \frac{1}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial \bar{e}}{\partial \bar{z}} + \frac{2m}{\bar{z}} \left(\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial \bar{z}} + \frac{\nu}{1-2\nu} \bar{e} \right) \\ = \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \left[\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \{ \bar{\alpha}(\bar{z}) \bar{T}(\bar{r}, \bar{z}) \} \right. \\ \left. + \frac{m}{\bar{z}} \bar{\alpha}(\bar{z}) \bar{T}(\bar{r}, \bar{z}) \right] \quad \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

ただし、

$$\bar{e} = \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{u}_r}{\bar{r}} + \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial \bar{z}}, \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \quad \dots\dots\dots (19)$$

ここで、方程式(17)、(18)の解法については、すでに畑⁽²⁾によって定式化されており、変位関数 $f(\bar{r}, \bar{z})$ および $\phi(\bar{r}, \bar{z})$ を用いて変位成分 $\bar{u}_r, \bar{u}_z$ を、

$$\bar{u}_r = \bar{z} \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial \phi}{\partial \bar{r}}, \bar{u}_z = \bar{z}^2 \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{f}{\bar{z}} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} \quad \dots\dots\dots (20)$$

と置けば、 ϕ および f に関する方程式として次式が与

えられる。

$$\nabla^2 \phi + \frac{m}{\bar{z}} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} = \frac{1+\nu}{\nu} \bar{\alpha}(\bar{z}) \bar{T}(\bar{r}, \bar{z}) \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 f + \frac{m}{\bar{z}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\nu}{1-\nu} \cdot \frac{m}{\bar{z}^2} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} \\ - \frac{1+\nu}{1-\nu} \cdot \frac{m}{\bar{z}} \bar{\alpha}(\bar{z}) \bar{T}(\bar{r}, \bar{z}) \quad \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

すなわち、式(21)、(22)の右辺に得られた温度解(8)を代入すれば未知関数 $\phi(\bar{r}, \bar{z})$, $f(\bar{r}, \bar{z})$ を順次求めることができ、変位成分を式(20)より、さらに応力成分を式(11)と式(16)より定式化することができる。ただし、式(21)、(22)の導出にあたり、 $\bar{G}(\bar{z})$ の不均質特性を表すパラメータ m とポアソン比 ν との間に、次式で与えられる関数が付与されている。

$$\nu = \frac{1}{2+m} \quad \dots\dots\dots (23)$$

次に、図1に示すような円形き裂を有する無限体の力学的境界条件は、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{z}=0(\bar{z}=1), \bar{r} \leq 1; \bar{\sigma}_{zz}=0, \bar{\sigma}_{rz}=0 \\ \bar{z}=0(\bar{z}=1), \bar{r} > 1; \bar{u}_z=0, \bar{\sigma}_{rz}=0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (24)$$

ここで、境界条件式(24)を満足する熱弾性場の解析にあたり、以下に示すような解の重ね合わせの方法を用いる。

(a) まず、き裂のない無限体を想定し、式(8)で表される温度変化が生じた場合の熱応力、熱変形を求める。これらの成分に添字1をつけて表せば、力学的境界条件は、

$$\bar{z}=1; \bar{\sigma}_{rz1}=0, \bar{u}_{z1}=0 \quad \dots\dots\dots (25)$$

(b) 次に、上述の(a)項で求められた熱応力成分 $\bar{\sigma}_{zz1}$ と同じ大きさで逆向きの外力が、き裂面上 ($\bar{z}=1, \bar{r} \leq 1$) にのみ作用すると考え、図1に示すようなき裂を有する無限体の等温弾性問題を解き、応力および変位成分を求める。これらの成分に添字2をつけて表せば、力学的境界条件は、

$$\left. \begin{aligned} \bar{z}=1, \bar{r} \leq 1; \bar{\sigma}_{rz2}=0, \bar{\sigma}_{zz2} = -\bar{\sigma}_{zz1} \\ \bar{z}=1, \bar{r} > 1; \bar{\sigma}_{rz2}=0, \bar{u}_{z2}=0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (26)$$

2・2・1 き裂のない無限体に式(8)の温度変化が生じた場合の解 ϕ_1, f_1 この場合の未知関数 ϕ_1, f_1 に対する方程式系は、式(21)、(22)において、

$$\phi \rightarrow \phi_1, f \rightarrow f_1 \quad \dots\dots\dots (27)$$

と置換したものとなる。これらの方程式系における同次解 ϕ_{1c} および f_{1c} は、方程式系が式(6)で表される温度場の方程式と同じであることより、零次のハンケル変換により容易に求められ、次式のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \phi_{1c}(\bar{r}, \bar{z}) &= \int_0^\infty C_1(s) s J_0(s\bar{r}) \bar{z}^p K_p(s\bar{z}) ds \\ f_{1c}(\bar{r}, \bar{z}) &= \int_0^\infty C_2(s) s J_0(s\bar{r}) \bar{z}^p K_p(s\bar{z}) ds \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

ただし,

$$p = \frac{1}{2}(1-m) \dots\dots\dots (29)$$

なお, 式(28)において, $C_1(s)$, $C_2(s)$ は境界条件式(25)より決定される未知定数である。

次に, 式(21), (22)を満たす特解 ϕ_{1p} , f_{1p} について考察する。特解の導出にあたっては, 式(21), (22)からわかるように, 線膨張係数 $\bar{\alpha}(\bar{z})$ の不均質特性を想定しなければならない。さらに, 温度解 $\bar{T}(\bar{r}, \bar{z})$ は, 式(8)で示されるように $\bar{z}$ に関して $K_\mu(s\bar{z})$ を含んだ関数形で示されるため, 任意の次数 μ に関する特解 ϕ_{1p} , f_{1p} を求めることが困難である。しかし $K_\mu(s\bar{z})$ については μ が半奇数, すなわち $\mu = (2k-1)/2$, ($k=0, 1, \dots$) である場合, 初等関数により表すことができる⁽⁶⁾。以上の考察より, 以下の解析では, まず, 線膨張係数の無次元表示を $\bar{\lambda}(\bar{z})$, $\bar{G}(\bar{z})$ と同じく,

$$\bar{\alpha}(\bar{z}) = \bar{z}^n \dots\dots\dots (30)$$

の形におく。ここで, n は $\bar{\alpha}(\bar{z})$ の不均質特性を表す数値パラメータである。さらに, 以下に示すような三つの代表的なケースについて解析を進めることにする。

$$\left. \begin{aligned} \text{Case 1: } \bar{\lambda}(\bar{z}) &= 1 \quad (\beta=0), \quad \bar{\alpha}(\bar{z}) = 1 \quad (n=0) \\ \text{Case 2: } \bar{\lambda}(\bar{z}) &= 1 \quad (\beta=0), \quad \bar{\alpha}(\bar{z}) = \bar{z} \quad (n=1) \\ \text{Case 3: } \bar{\lambda}(\bar{z}) &= \bar{z}^2 \quad (\beta=2), \quad \bar{\alpha}(\bar{z}) = \bar{z} \quad (n=1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (31)$$

すなわち, Case 1 は熱伝導率 $\bar{\lambda}(\bar{z})$ および線膨張係数 $\bar{\alpha}(\bar{z})$ が一定の場合, Case 2 は $\bar{\lambda}(\bar{z})$ が一定であり, $\bar{\alpha}(\bar{z})$ が $\bar{z}$ の一次関数として変化する場合, Case 3 は $\bar{\lambda}(\bar{z})$ が $\bar{z}$ の二次関数, $\bar{\alpha}(\bar{z})$ が $\bar{z}$ の一次関数として共に変化する場合を意味している。

式(31)で示される三つのケースに対する特解 ϕ_{1p} , f_{1p} をハンケル変換法を用いて解き, これらをまとめれば, 未知関数 ϕ_1 , f_1 は, 次式のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \phi_1(\bar{r}, \bar{z}) &= \int_0^\infty s J_0(s\bar{r}) \phi_1^*(s, \bar{z}) ds \\ f_1(\bar{r}, \bar{z}) &= \int_0^\infty s J_0(s\bar{r}) f_1^*(s, \bar{z}) ds \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (32)$$

ただし, $\phi_1^*(s, \bar{z})$, $f_1^*(s, \bar{z})$ は, Case 1~Case 3 に対し, 次式で与えられる。

[Case 1]

$$\left. \begin{aligned} \phi_1^*(s, \bar{z}) &= C_1(s) \bar{z}^p K_p(s\bar{z}) + (1+\nu) \frac{J_1(s)}{s^4} (1+s\bar{z}) e^{s(1-\bar{z})} \\ f_1^*(s, \bar{z}) &= C_2(s) \bar{z}^p K_p(s\bar{z}) - \frac{\nu}{1-\nu} C_1(s) s \bar{z}^p K_{p-1}(s\bar{z}) - (1+\nu) \frac{J_1(s)}{s^3} e^{s(1-\bar{z})} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (33)$$

[Case 2]

$$\left. \begin{aligned} \phi_1^*(s, \bar{z}) &= C_1(s) \bar{z}^p K_p(s\bar{z}) + \frac{1+\nu}{\nu} \cdot \frac{J_1(s)}{s^5(4+m)(2+m)} \{(2+m)s^2 \bar{z}^2 + 2(1+m)(s\bar{z}+1)\} e^{s(1-\bar{z})} \\ f_1^*(s, \bar{z}) &= C_2(s) \bar{z}^p K_p(s\bar{z}) - \frac{\nu}{1-\nu} C_1(s) s \bar{z}^p K_{p-1}(s\bar{z}) - \frac{1+\nu}{1-\nu} \cdot \frac{J_1(s)}{s^4(4+m)(2+m)} \{m(3+m)s\bar{z} \\ &\quad + (1+m)(2+m)\} e^{s(1-\bar{z})} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (34)$$

[Case 3]

$$\left. \begin{aligned} \phi_1^*(s, \bar{z}) &= C_1(s) \bar{z}^p K_p(s\bar{z}) + (1+\nu) \frac{J_1(s)}{s^3(1+s)} (1+s\bar{z}) e^{s(1-\bar{z})} \\ f_1^*(s, \bar{z}) &= C_2(s) \bar{z}^p K_p(s\bar{z}) - \frac{\nu}{1-\nu} C_1(s) s \bar{z}^p K_{p-1}(s\bar{z}) - (1+\nu) \frac{J_1(s)}{s^2(1+s)} e^{s(1-\bar{z})} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (35)$$

したがって, 式(20)より変位成分を定式化し, さらに, 式(11), (16)より応力成分を定式化することができる。さらに, 境界条件式(25)を用いて式(33)~(35)に含まれる未知定数 $C_1(s)$, $C_2(s)$ が求められる。得られた変位成分および応力成分のうち, 前述の解の重ね合わせによる方法を用いる際に必要となる $\bar{\sigma}_{zz1}(\bar{r}, \bar{z})|_{\bar{z}=1}$ について表せば,

$$\bar{\sigma}_{zz1}(\bar{r}, 1) = 2(1+\nu) \int_0^\infty s J_0(s\bar{r}) J_1(s) B(s) ds \dots\dots\dots (36)$$

ただし, $B(s)$ は Case 1~Case 3 に対し, 次式で表される。

[Case 1]

$$B(s) = 1 - \frac{1+m}{s} \cdot \frac{s K_p(s) K_{p-1}(s) - K_{p-1}^2(s)}{K_p(s) K_{p-1}(s) - s K_p^2(s) + s K_{p-1}^2(s)} \dots\dots\dots (37)$$

[Case 2]

$$B(s) = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{4+m} \left[\frac{\{2s^2 - (4+m)(1+m)s - (2+m)(1+m)\} K_p^2(s)}{sK_p^2(s) - sK_{p-1}^2(s) - K_p(s)K_{p-1}(s)} \right. \\ \left. + \frac{\{m(3+m)s^2 + (2+m)(1+m)s\} K_p(s)K_{p-1}(s)}{sK_p^2(s) - sK_{p-1}^2(s) - K_p(s)K_{p-1}(s)} + (2+m)s^2 + (2+m)s \right] \dots\dots\dots (38)$$

[Case 3]

$$B(s) = \frac{s}{1+s} - \frac{1+m}{1+s} \cdot \frac{sK_p(s)K_{p-1}(s) - K_{p-1}^2(s)}{K_p(s)K_{p-1}(s) - sK_p^2(s) + sK_{p-1}^2(s)} \dots\dots\dots (39)$$

2・2・2 き裂を有する無限体のき裂面上に式(36)と等値逆符号の外力が作用した場合の解 ϕ_2, f_2 この場合の未知関数 ϕ_2, f_2 に対する方程式系は、式(21), (22)において、右辺を零とおき、さらに、

$$\phi \rightarrow \phi_2, \quad f \rightarrow f_2 \dots\dots\dots (40)$$

と置換したものとなる。したがって、式(32)～(35)を参照すれば、 ϕ_2, f_2 は次式のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \phi_2(\bar{r}, \bar{z}) &= \bar{z}^p \int_0^\infty D_1(s) J_0(s\bar{r}) K_p(s\bar{z}) ds \\ f_2(\bar{r}, \bar{z}) &= \bar{z}^p \int_0^\infty s J_0(s\bar{r}) \left\{ D_2(s) K_p(s\bar{z}) - \frac{\nu}{1-\nu} D_1(s) s K_{p-1}(s\bar{z}) \right\} ds \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (41)$$

2・2・1 項で述べたとおり、上式(41)を用いて応力成分および変位成分を定式化することができる。一方、式(41)に含まれる $D_1(s), D_2(s)$ は、境界条件式(26)を満たすように決定される未知定数である。そこで、式(41)を式(26)に代入すれば、

$$D_2(s) = -D_1(s) \frac{1}{1-\nu} \cdot \frac{1}{sK_{p-1}(s)} \{K_{p-1}(s) - \nu s K_{p-2}(s)\} \dots\dots\dots (42)$$

ただし、 $D_1(s)$ は次式で与えられる連立積分方程式の解である。

$$\int_0^\infty s^2 J_0(s\bar{r}) D_1(s) \frac{1}{K_{p-1}(s)} \left\{ sK_p^2(s) - sK_{p-1}^2(s) + mK_p(s)K_{p-1}(s) - (1+m) \frac{1}{s} K_{p-1}^2(s) \right\} ds \\ = -\frac{1-\nu}{2\nu} \bar{\sigma}_{zz1}(\bar{r}, 1); \quad 0 \leq \bar{r} \leq 1 \dots\dots\dots (43)$$

$$\int_0^\infty J_0(s\bar{r}) D_1(s) \frac{1}{K_{p-1}(s)} \{K_p(s)K_{p-1}(s) - sK_p^2(s) + sK_{p-1}^2(s)\} ds = 0; \quad \bar{r} > 1 \dots\dots\dots (44)$$

上式(43), (44)で与えられる連立積分方程式の解法については、すでに詳しく述べられており⁽⁷⁾,

$$\left. \begin{aligned} F(\bar{r}) &\equiv \frac{1-\nu}{2\nu} \bar{\sigma}_{zz1}(\bar{r}, 1) \\ A(s) &\equiv D_1(s) \frac{1}{K_{p-1}(s)} \{K_p(s)K_{p-1}(s) - sK_p^2(s) + sK_{p-1}^2(s)\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (45)$$

とおけば、連立積分方程式の解 $A(s)$ は、次式で表される。

$$A(s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 h(t) \sin(st) dt \dots\dots\dots (46)$$

ここで、 $h(t)$ は、次式の積分方程式の解である。

$$h(t) + \int_0^1 h(u) K(t, u) du = L(t) \dots\dots\dots (47)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} K(t, u) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty x k(x) \sin(tx) \sin(ux) dx, \quad L(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{u F(u)}{\sqrt{t^2 - u^2}} du \\ k(s) &= -1 + \frac{1}{K_p(s)K_{p-1}(s) + sK_p^2(s) - sK_{p-1}^2(s)} \{s^2 K_{p-1}^2(s) - s^2 K_p^2(s) - ms K_p(s)K_{p-1}(s) + (1+m) K_{p-1}^2(s)\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (48)$$

2・3 応力拡大係数 K_I の解析 2・2 節において、本問題に対する熱応力成分がすべて求められた。き裂先端における応力拡大係数 K_I は、き裂面上の応力成分 $\bar{\sigma}_{zz2}(\bar{r}, \bar{z})$ より求めることができる。まず、2・2 節

で得られた結果より、

$$\bar{\sigma}_{zz2}(\bar{r}, \bar{z})|_{\bar{z}=1} = \frac{2\nu}{1-\nu} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \\ \times s \{1 + k(s)\} A(s) ds \int_0^1 h(t) \sin(st) dt$$

$$= \frac{4\nu}{1-\nu} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{h(1)}{\sqrt{\bar{r}^2-1}} + O\{(\bar{r}-1)^0\} \dots (49)$$

したがって、応力拡大係数 K_I の無次元表示 $\bar{K}_I$ は次式となる。

$$\begin{aligned} \bar{K}_I &= K_I \cdot \frac{\lambda_0}{G_0 a_0 a q_0 \sqrt{a}} \\ &= \lim_{\bar{r} \rightarrow 1} \sqrt{2\pi(\bar{r}-1)} \bar{\sigma}_{zz2}(\bar{r}, \bar{z})|_{\bar{z}=1} \\ &= \frac{4\nu}{1-\nu} h(1) \dots \dots \dots (50) \end{aligned}$$

なお、上式(50)の $h(1)$ は式(47)を離散化して解くことにより求められる。

3. 数値計算例と考察

2章で得られた理論解析結果に基づいて数値計算を行った。得られた計算結果のうち、き裂面上($z=0, r \leq a$)から一様な熱吸収がある場合の定常温度変化 T 、この温度変化に対してき裂がない無限体中に生じる軸

方向応力 σ_{zz1} および円形き裂先端における応力拡大係数 K_I と材料物性(熱伝導率, 横弾性係数, 線膨張係数)の不均質特性との関係について述べる。

まず、式(4), (13), (30)で与えられる熱伝導率, 横弾性係数および線膨張係数の不均質特性は、いずれも座標変数 $\bar{z}$ のべき乗の形で与えられ、

$$\lambda(\bar{z}) = \bar{z}^\beta, \bar{G}(\bar{z}) = \bar{z}^m, \alpha(\bar{z}) = \bar{z}^n \dots \dots \dots (51)$$

上式を形式的に次式のように表す。

$$f(\bar{z}) = \bar{z}^\gamma \dots \dots \dots (52)$$

ここで、上式の $f(\bar{z})$ を $\gamma=0 \sim 2$ の範囲で図示すれば図2のようになる。

また、本問題において仮定した、横弾性係数 $G(\bar{z})$ の指数 m とポアソン比 ν の関係式(23)は、図3のように図示される。

次に、図4は、軸方向座標 $\bar{z}$ をパラメータとして、半径方向に関する温度変化 $\bar{T}$ を示したものである。図4(a)は、 $\beta=0$ 、すなわち熱伝導率 $\bar{\lambda}(\bar{z})$ が一定の場合

Fig. 2 Schematic of function $f(\bar{z})$ for nonhomogeneity of material properties

Fig. 3 Variation of Poisson's ratio ν with parameter m

(a) Result for $\beta=0$

(b) Result for $\beta=2$

Fig. 4 Radial variation of temperature

(a) Case 1 (\$\beta=0, n=0\$)

(b) Case 2 (\$\beta=0, n=1\$)

(c) Case 3 (\$\beta=2, n=1\$)

Fig. 5 Radial variation of $\bar{\sigma}_{zz1}|_{\bar{z}=0}$ with parameter m

合であり、図 4 (b) は、 $\bar{\lambda}(\bar{z})$ が $\bar{z}$ の二乗の形で変化する場合である。熱伝導率の不均質特性を表す数値パラメータ β が大きくなるということは、無限体内での熱伝導率が $\bar{z}$ の増加とともに、すなわち、き裂面 ($\bar{z}=0$) から離れるに従って増大することを意味しており、図 4 より、無限体の全領域において温度変化(本問題では熱吸収を想定しているため、温度低下となる)は、熱伝導率が一定 ($\beta=0$) の場合よりも少なくなっていることがわかる。また、その低下の割合も、き裂面 ($\bar{z}=0$) では、熱伝導率が一定の場合と比べ、約 1/2 程度になっていることがわかる。

図 4 で示した温度変化に対して、き裂がない無限体中に生じる軸方向応力 $\bar{\sigma}_{zz1}$ の $\bar{z}=0$ の面上における半径方向分布を、図 5 に図示した。図 5 では横弾性係数 $\bar{G}(\bar{z})$ の不均質特性を表す指数 $m(m=0\sim1)$ をパラメータとして示している。これらの図 5 (a), (b), (c) は、それぞれ、式 (31) で述べた三つのケース、すなわち Case 1, Case 2, Case 3 に対する結果である。これらの各図より、いずれのケースについても、横弾性係数の不均質特性を表す数値パラメータ m が大きくなる(すなわち $\bar{z}$ の増加とともに横弾性係数が増大する)に従って $\bar{z}=0$ の面上における $\bar{\sigma}_{zz1}$ が大きくなることわかる。また、線膨張係数 $\bar{\alpha}(\bar{z})$ の不均質特性が熱応力分布に及ぼす影響については、図 5 (a), (b) の両図を比較することにより考察することができる。すなわち、これらの各図は、図 4 (a) で示される温度変化に対する $\bar{\sigma}_{zz1}$ の $\bar{z}=0$ の面上での分布を示したものであり、線膨張係数が座標変数 $\bar{z}$ の増加とともに増大する Case 2 のほうが、線膨張係数が一定である Case 1 と比べ、 $\bar{\sigma}_{zz1}$ の値が大きくなり、さらに指数 m が大きくなるに従って顕著に $\bar{\sigma}_{zz1}$ の値が増大

Fig. 6 Variation of stress intensity factor $\bar{K}_I$ with parameter m

することがわかる。同様に、温度変化の相違が熱応力分布に及ぼす影響については、図 5 (b), (c) の両図を比較することにより評価できる。これらの各図は、線膨張係数の不均質特性が同一の場合 [式 (51) の指数が $n=1$] であり、温度変化がそれぞれ図 4 (a), (b) で与えられる場合に対する σ_{zz1} の $\bar{z}=0$ の面上での分布を示している。Case 2 に比べ Case 3 の応力分布は極めてその絶対値が小さく、かつ横弾性係数の不均質特性を表す数値パラメータ m が変化しても応力値にはあまり影響を及ぼさないことがわかる。その理由は、図 4 (b) で示される温度変化が $\bar{z}=0$ の面上において相対的に小さく、さらに $\bar{z} \geq 1.5$ の領域ではほとんど温度変化が見られないという温度分布の状態に起因しているためである。

最後に、上述の三つのケース (Case 1~Case 3) に対する円形き裂先端での応力拡大係数 K_I を、図 6 に示した。いずれのケースについても、横弾性係数の不均質パラメータ m が大きくなるとともに応力拡大係数 K_I も増大しており、この結果は、図 5 に示した応力成分 σ_{zz1} の変化と一致しているといえる。なお、熱伝導率、横弾性係数および線膨張係数がすべて一定、すなわち均質体の場合の応力拡大係数 K_I は、図 6 において Case 1 の $m=0$ の場合に相当する。このことより、熱伝導率、横弾性係数、線膨張係数の不均質特性が応力拡大係数の値に大きな影響を及ぼすと言える。

4. 結 言

本報では、軸方向に関する材料物性 (熱伝導率、横弾性係数、線膨張係数) が座標変数 $\bar{z}$ の任意のべき乗で変化する Kassir の不均質無限体に円形き裂が存在し、かつき裂面から熱吸収による温度変化が生じた場合の定常熱応力問題を理論解析し、応力拡大係数を求めた。その結果、これらの材料物性の変化が温度分布のみならず、熱応力拡大係数にも極めて大きな影響を及ぼすことがわかった。詳細については 3 章で述べたとおりである。

本報で用いた重ね合わせによる解析方法は、円形き裂あるいは外部き裂を有する無限体等の基礎的解析モデルに対しても適用可能であると考えられる。

なお、今後の課題としては、非定常温度変化に対する定性的、定量的評価が挙げられ、このような課題については、現在検討中である。

文 献

- (1) Kassir, M. K. and Sih, G. C., Three-Dimensional Crack Problem, *Mechanics of Fracture*, 2 (1975), 382-409, Noordhoff.
- (2) 畑, 機論, 49-448, A (1983), 1515.
- (3) 畑, 機論, 51-467, A (1985), 1789.
- (4) Hata, T., *Journal of Thermal Stresses*, 5 (1982), 1.
- (5) 野田・松永, 機論, 52-475, A (1986), 625.
- (6) 例えば, 森口・宇田川・一松, 数学公式 III, (1965), 172, 岩波.
- (7) Sneddon, I. N., *Mixed Boundary Value Problems in Potential Theory*, (1966), 80-133, North-holland.