曲げモーメントを受ける単純重ね合わせ 接着継手の二次元応力解析*

沢 俊行^{*1}, 中野勝之^{*2}, 虎谷 寛^{*2}

Two-Dimensional Stress Analysis of Single-Lap Joints Subjected to External Bending Moments

Toshiyuki SAWA, Katsuyuki NAKANO and Hiroshi TORATANI

The stress distributions of single-lap adhesive joints subjected to external bending moments are analyzed as a three-body contact problem by using a two-dimensional theory of elasticity. In the analysis, two similar adherends and an adhesive are replaced by finite strips, respectively. In the numerical calculations, the effects of the ratio of Young's modulus of adherends to that of adhesive and the adhesive thickness on the stress distribution at the interface are examined. As the results, it is found that the stress singularity occurs near the edges of the interface, and the peel stress at the edges of the interface increase with a decrease of Young's modulus of adherends. In addition, photo-elastic experiments are carried out. A fairly good agreement is obtained between the analytical and the experimental results.

Key Words: Elasticity, Adhesive Joint, Stress Analysis, Single-Lap Joints, Bending Moment, Stress Singularity

1. 緒 言

リベット接合やねじ締結などの機械的締結法に代わり、接着接合が機械構造物などの接合に多く用いられるようになった。中でも単純重ね合わせ接着継手は航空機の機体や自動車の車体などに幅広く利用されているが、このような接着継手は強度のばらつきが大きく、信頼性が十分であるとは言えない。このため、接着継手の静的および動的強度特性の明確化が必要とされ、特に破壊が開始すると考えられる接着層境界の応力分布をより厳密に知る必要がある。

従来より、引張せん断荷重を受ける単純重ね合わせ接着継手に関する研究は、有限要素法^{(1)~(4)}や解析的研究^{(5)~(8)}、実験的研究⁽⁹⁾などにより数多くなされている。しかし、曲げモーメントを受ける単純重ね合わせ継手の応力および強度に関する研究⁽¹⁰⁾はあまりなされていないようである。実際の使用にあたって、引張せん断荷重のほかに曲げモーメントの作用が考えられ、このような場合の継手の力学的特性も把握しておく必要があると思われる。

本研究は、曲げモーメントを受ける単純重ね合わせ接着継手の接着層内の応力分布を解析することを目的としている。解析にあたっては二次元弾性論⁽¹¹⁾(平面ひずみ)に基づき弾性三体接触問題として扱う。本解析法に基づき、被着体と接着層の縦弾性係数の比、厚さの比および重ね合わせ長さなどが接着層内の応力分布に及ぼす影響を数値的に明らかにする。光弾性実験⁽¹²⁾も行い数値計算結果との比較を行う。

2. 理 論 解 析

図1は同一寸法、同一材質の二つの被着体を接着した単純重ね合わせ接着継手に曲げモーメント M が作用する場合を示す。このような接着継手の継手内の応力分布を解析するため、上部接着境界面($y_2 = h_2$)と下部接着境界面($y_2 = -h_2$)における応力分布が接着層の中心 O_2 に対して反対称の分布になるものと仮定し、図2に示すように上下部被着体を有限長帯板 [I] に、接着層を有限長帯板 [II] に置き換える。帯板 [I] の座標系は $x_1 - y_1$ とし、原点を O_1 とする。帯板 [II] については $x_2 - y_2$ および O_2 とする。帯板 [I] の寸法は長さ $2l_1$ 、高さ $2h_1$ とし、縦弾性係数を E_1 およびポアソン比を ν_1 とする。帯板 [II] についてもそれぞれ $2l_2$ 、 $2h_2$ 、 E_2 および ν_2 とする。

* 原稿受付 1995年1月25日。

^{*1} 正員, 山梨大学工学部 (〒400 甲府市武田 4-3-11)。

^{*2} 学生員, 山梨大学大学院。

Fig. 1 A single-lap adhesive joint subjected to an external bending moment

図2(a)に示すように、曲げモーメント M が帯板 [I] の片側面 ($x_1 = -l_1$) に、 x_1 軸に対して反対称な任意の応力分布 $F(y_1)$ として $|y_1| \leq e$ ($e \leq h_1$) の範囲に作用するものと仮定する。このときの $y_1 = \pm h_1$ ($x_1 = -l_1$) での応力の絶対値を P とし、 $F(y_1)$ をフーリエ級数展開すると図2の境界条件は次式(1)~(3)となる。なお対称性を考慮し、 x_2 軸の上部のみを扱う。 u は x 方向変位、 v は y 方向変位を表し、右肩の添字 I および II はそれぞれ帯板 [I] および [II] に関するものを表す。

(a) 有限長帯板 [I] (被着体)において

$$x_1 = l_1: \sigma_x^I = \tau_{xy}^I = 0$$

$$x_1 = -l_1: \sigma_x^I = F(y_1) = \sum_{s=1}^{\infty} b_s \sin\left(\frac{2s-1}{2h_1} \pi y_1\right)$$

$$\tau_{xy}^I = 0$$

$$y_1 = h_1: \sigma_y^I = \tau_{xy}^I = 0$$

$$y_1 = -h_1: \sigma_y^I = \tau_{xy}^I = 0 \quad (-l_1 \leq x_1 \leq c - l_2)$$

.....(1)

(b) 有限長帯板 [II] (接着層)において

$$x_2 = \pm l_2: \sigma_x^{II} = \tau_{xy}^{II} = 0 \quad \text{.....(2)}$$

(c) 有限長帯板 [I] と [II] の境界において

$$(\sigma_y^I)_{y_1=-h_1} = (\sigma_y^{II})_{y_2=h_2}$$

$$(\tau_{xy}^I)_{y_1=-h_1} = (\tau_{xy}^{II})_{y_2=h_2}$$

$$\left(\frac{\partial u^I}{\partial x_1}\right)_{y_1=-h_1} = \left(\frac{\partial u^{II}}{\partial x_2}\right)_{y_2=h_2}$$

$$\left(\frac{\partial v^I}{\partial x_1}\right)_{y_1=-h_1} = \left(\frac{\partial v^{II}}{\partial x_2}\right)_{y_2=h_2}$$

$$(c - l_2 \leq x_1 \leq c + l_2, |x_2| \leq l_2, c = l_1 - l_2, l_2 \leq l_1) \quad \text{.....(3)}$$

なお、

$$b_s = \frac{1}{h_1} \int_{-e}^e F(y_1) \sin\left(\frac{2s-1}{2h_1} \pi y_1\right) dy_1$$

(a) Finite strip [I] (adherent)

(b) Finite strip [II] (adhesive)

Fig. 2 A model for analysis and the dimensions of each finite strip

$$(S=1, 2, 3, \dots)$$

モーメントの釣合い式は

$$M = \int_{-h_1}^h F(y_1) \cdot y_1 dy_1 = \int_{l_1-2l_2}^{l_1} \sigma_y \cdot x_1 dx_1$$

で表される。また境界条件式(3)において座標軸原点 O_1 および O_2 が異なるため、 y 方向の変位 v^I および v^{II} の微分形が釣合うという境界条件を用いた。

このような境界条件をもつ有限長帯板 [I] および [II] (平面ひずみ状態)を解析するためにエアリーの応力関数 χ を用いる。重調和関数の変数分離解⁽¹¹⁾の中から境界条件式(1)~(3)を考慮して、帯板 [I] の解析に用いる応力関数 χ^I を

$$\chi^I = \chi_1^{It} + \chi_2^{It} + \chi_3^{It} + \chi_4^{It} + \chi_1^{Ib} + \chi_2^{Ib} + \chi_3^{Ib} + \chi_4^{Ib}$$

と置き、帯板 [II] に関しては応力関数 χ^{II} を

$$\chi^{II} = \chi_2^{IIt} + \chi_4^{IIt} + \chi_1^{IIb} + \chi_3^{IIb}$$

と置く。これらの応力関数 χ^I および χ^{II} は、文献(13)で用いた応力関数 χ^I および χ^{II} と、文献(14)で用いた χ^I および χ^{II} をそれぞれ重ね合わせたものである。念のため各応力関数を式(4)に示す。なお式中の $\bar{A}_n^{It}$, $\bar{B}_s^{It}$, ..., $\bar{A}_n^{Ib}$, $\bar{B}_s^{Ib}$ ($n, s=1, 2, 3, \dots$)は、境界条件により決定される未定係数である。また記号の混同を避けるため、文献(13)で用いた応力関数や未定係数の右肩の添字 I および II の代わりに I_t および I_b を ($\chi^I \rightarrow \chi^{It}$, ..., $A_{n1}^I \rightarrow \bar{A}_n^{It}$, ...)、文献(14)での応力関数や未定係数の右肩の添字 I および II の代わりに I_b および II_b を ($\chi^I \rightarrow \chi^{Ib}$, ..., $A_{n1}^I \rightarrow \bar{A}_n^{Ib}$, ...)と変えて表示するものとする。

$$\chi_1^{It} = \chi_1(\bar{A}_n^{It}, \bar{B}_s^{It}, l_1, h_1, a_n^I, \lambda_s^I, \bar{A}_n^{It}, \bar{Q}_s^{It}, \bar{Q}_s^{It}, x_1, y_1)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{A}_n^{It}}{\bar{A}_n^{It} a_n^I} [\{a_n^I l_1 \cosh(a_n^I l_1) + \sinh(a_n^I l_1)\} \cosh(a_n^I x_1) - a_n^I x_1 \sinh(a_n^I l_1) \sinh(a_n^I x_1)] \cos(a_n^I y_1)$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\bar{B}_s^{1t}}{\bar{Q}_s^{1t} \lambda_s^{12}} [\{\lambda_s^1 h_1 \cosh(\lambda_s^1 h_1) + \sinh(\lambda_s^1 h_1)\} \cosh(\lambda_s^1 y_1) - \lambda_s^1 y_1 \sinh(\lambda_s^1 h_1) \sinh(\lambda_s^1 y_1)] \cos(\lambda_s^1 x_1) \\
 \chi_2^{1t} = & \chi_2(\bar{A}_n^{1t}, \bar{B}_s^{1t}, l_1, h_1, a_n^V, \lambda_s^V, \bar{A}_n^{1t}, \bar{Q}_s^{1t}, x_1, y_1) \\
 = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{A}_n^{1t}}{\bar{A}_n^{1t} a_n^{V2}} [\{a_n^V l_1 \cosh(a_n^V l_1) + \sinh(a_n^V l_1)\} \cosh(a_n^V x_1) - a_n^V x_1 \sinh(a_n^V l_1) \sinh(a_n^V x_1)] \cos(a_n^V y_1) \\
 & + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\bar{B}_s^{1t}}{\bar{Q}_s^{1t} \lambda_s^{12}} [\{\lambda_s^1 h_1 \sinh(\lambda_s^1 h_1) + \cosh(\lambda_s^1 h_1)\} \sinh(\lambda_s^1 y_1) - \lambda_s^1 y_1 \cosh(\lambda_s^1 h_1) \cosh(\lambda_s^1 y_1)] \cos(\lambda_s^1 x_1) \\
 \chi_3^{1t} = & \chi_3(\bar{A}_n^{1t}, \bar{B}_s^{1t}, l_1, h_1, a_n^V, \lambda_s^V, \bar{A}_n^{1t}, \bar{Q}_s^{1t}, x_1, y_1) \\
 = & - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{A}_n^{1t}}{\bar{A}_n^{1t} a_n^{V2}} [a_n^V l_1 \sinh(a_n^V l_1) \cosh(a_n^V x_1) - a_n^V x_1 \cosh(a_n^V l_1) \sinh(a_n^V x_1)] \cos(a_n^V y_1) \\
 & - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\bar{B}_s^{1t}}{\bar{Q}_s^{1t} \lambda_s^{12}} [\lambda_s^V h_1 \sinh(\lambda_s^V h_1) \cosh(\lambda_s^V y_1) - \lambda_s^V y_1 \cosh(\lambda_s^V h_1) \sinh(\lambda_s^V y_1)] \cos(\lambda_s^V x_1) \\
 \chi_4^{1t} = & \chi_4(\bar{A}_n^{1t}, \bar{B}_s^{1t}, l_1, h_1, a_n^I, \lambda_s^I, \bar{A}_n^{1t}, \bar{Q}_s^{1t}, x_1, y_1) \\
 = & - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{A}_n^{1t}}{\bar{A}_n^{1t} a_n^{I2}} [a_n^I l_1 \sinh(a_n^I l_1) \cosh(a_n^I x_1) - a_n^I x_1 \cosh(a_n^I l_1) \sinh(a_n^I x_1)] \sin(a_n^I y_1) \\
 & - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\bar{B}_s^{1t}}{\bar{Q}_s^{1t} \lambda_s^{I2}} [\lambda_s^I h_1 \cosh(\lambda_s^I h_1) \sinh(\lambda_s^I y_1) - \lambda_s^I y_1 \sinh(\lambda_s^I h_1) \cosh(\lambda_s^I y_1)] \cos(\lambda_s^I x_1) \\
 \chi_1^{1b} = & \chi_1(\bar{A}_n^{1b}, \bar{B}_s^{1b}, l_1, h_1, a_n^I, \lambda_s^I, \bar{A}_n^{1b}, \bar{Q}_s^{1b}, x_1, y_1) \\
 = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{A}_n^{1b}}{\bar{A}_n^{1b} a_n^{I2}} [\{a_n^I l_1 \sinh(a_n^I l_1) + \cosh(a_n^I l_1)\} \sinh(a_n^I x_1) - a_n^I x_1 \cosh(a_n^I l_1) \cosh(a_n^I x_1)] \cos(a_n^I y_1) \\
 & + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\bar{B}_s^{1b}}{\bar{Q}_s^{1b} \lambda_s^{I2}} [\{\lambda_s^I h_1 \cosh(\lambda_s^I h_1) + \sinh(\lambda_s^I h_1)\} \cosh(\lambda_s^I y_1) - \lambda_s^I y_1 \sinh(\lambda_s^I h_1) \sinh(\lambda_s^I y_1)] \sin(\lambda_s^I x_1) \\
 \chi_2^{1b} = & \chi_2(\bar{A}_n^{1b}, \bar{B}_s^{1b}, l_1, h_1, a_n^V, \lambda_s^V, \bar{A}_n^{1b}, \bar{Q}_s^{1b}, x_1, y_1) \\
 = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{A}_n^{1b}}{\bar{A}_n^{1b} a_n^{V2}} [\{a_n^V l_1 \sinh(a_n^V l_1) + \cosh(a_n^V l_1)\} \sinh(a_n^V x_1) - a_n^V x_1 \cosh(a_n^V l_1) \cosh(a_n^V x_1)] \sin(a_n^V y_1) \\
 & + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\bar{B}_s^{1b}}{\bar{Q}_s^{1b} \lambda_s^{V2}} [\{\lambda_s^V h_1 \sinh(\lambda_s^V h_1) + \cosh(\lambda_s^V h_1)\} \sinh(\lambda_s^V y_1) - \lambda_s^V y_1 \cosh(\lambda_s^V h_1) \cosh(\lambda_s^V y_1)] \sin(\lambda_s^V x_1) \\
 \chi_3^{1b} = & \chi_3(\bar{A}_n^{1b}, \bar{B}_s^{1b}, l_1, h_1, a_n^V, \lambda_s^I, \bar{A}_n^{1b}, \bar{Q}_s^{1b}, x_1, y_1) \\
 = & - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{A}_n^{1b}}{\bar{A}_n^{1b} a_n^{V2}} [a_n^V l_1 \cosh(a_n^V l_1) \sinh(a_n^V x_1) - a_n^V x_1 \sinh(a_n^V l_1) \cosh(a_n^V x_1)] \cos(a_n^V y_1) \\
 & - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\bar{B}_s^{1b}}{\bar{Q}_s^{1b} \lambda_s^{I2}} [\lambda_s^I h_1 \sinh(\lambda_s^I h_1) \cosh(\lambda_s^I y_1) - \lambda_s^I y_1 \cosh(\lambda_s^I h_1) \sinh(\lambda_s^I y_1)] \sin(\lambda_s^I x_1) \\
 \chi_4^{1b} = & \chi_4(\bar{A}_n^{1b}, \bar{B}_s^{1b}, l_1, h_1, a_n^I, \lambda_s^I, \bar{A}_n^{1b}, \bar{Q}_s^{1b}, x_1, y_1) \\
 = & - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{A}_n^{1b}}{\bar{A}_n^{1b} a_n^{I2}} [a_n^I l_1 \cosh(a_n^I l_1) \sinh(a_n^I x_1) - a_n^I x_1 \sinh(a_n^I l_1) \cosh(a_n^I x_1)] \sin(a_n^I y_1) \\
 & - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\bar{B}_s^{1b}}{\bar{Q}_s^{1b} \lambda_s^{I2}} [\lambda_s^I h_1 \cosh(\lambda_s^I h_1) \sinh(\lambda_s^I y_1) - \lambda_s^I y_1 \sinh(\lambda_s^I h_1) \cosh(\lambda_s^I y_1)] \sin(\lambda_s^I x_1) \\
 \chi_2^{11t} = & \chi_2(\bar{A}_n^{11t}, \bar{B}_s^{11t}, l_2, h_2, a_n^{II}, \lambda_s^{II}, \bar{A}_n^{11t}, \bar{Q}_s^{11t}, x_2, y_2), \quad \chi_4^{11t} = \chi_4(\bar{A}_n^{11t}, \bar{B}_s^{11t}, l_2, h_2, a_n^{II}, \lambda_s^{IV}, \bar{A}_n^{11t}, \bar{Q}_s^{11t}, x_2, y_2) \\
 \chi_1^{11b} = & \chi_1(\bar{A}_n^{11b}, \bar{B}_s^{11b}, l_2, h_2, a_n^{II}, \lambda_s^{IV}, \bar{A}_n^{11b}, \bar{Q}_s^{11b}, x_2, y_2), \quad \chi_3^{11b} = \chi_3(\bar{A}_n^{11b}, \bar{B}_s^{11b}, l_2, h_2, a_n^{IV}, \lambda_s^{II}, \bar{A}_n^{11b}, \bar{Q}_s^{11b}, x_2, y_2) \\
 & \dots\dots\dots (4)
 \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
 a_n^I &= \frac{n\pi}{h_1}, \quad a_n^V = \frac{(2n-1)\pi}{2h_1}, \quad \lambda_s^I = \frac{s\pi}{l_1}, \quad \lambda_s^V = \frac{(2s-1)\pi}{2l_1}, \quad a_n^{II} = \frac{n\pi}{h_2}, \\
 a_n^{IV} &= \frac{(2n-1)\pi}{2h_2}, \quad \lambda_s^{II} = \frac{s\pi}{l_2}, \quad \lambda_s^{IV} = \frac{(2s-1)\pi}{2l_2} \\
 \bar{A}_n^{1t} &= \bar{A}_n^{1t} = \mathcal{A}_n(a_n^I l_1) = \sinh(a_n^I l_1) \cosh(a_n^I l_1) + a_n^I l_1, \quad \bar{A}_n^{1b} = \bar{A}_n^{1b} = \mathcal{A}_n(a_n^V l_1) \\
 \bar{A}_n^{1b} &= \bar{A}_n^{1b} = \mathcal{A}_n'(a_n^I l_1) = \sinh(a_n^I l_1) \cosh(a_n^I l_1) - a_n^I l_1, \quad \bar{A}_n^{1b} = \bar{A}_n^{1b} = \mathcal{A}_n'(a_n^V l_1) \\
 \bar{A}_n^{11t} &= \mathcal{A}_n(a_n^{II} l_2), \quad \bar{A}_n^{11t} = \mathcal{A}_n(a_n^{II} l_2), \quad \bar{A}_n^{11b} = \mathcal{A}_n(a_n^{II} l_2), \quad \bar{A}_n^{11b} = \mathcal{A}_n'(a_n^{IV} l_2) \\
 \bar{Q}_s^{1t} &= \bar{Q}_s^{1t} = \mathcal{Q}_s(\lambda_s^I h_1) = \sinh(\lambda_s^I h_1) \cosh(\lambda_s^I h_1) + \lambda_s^I h_1, \quad \bar{Q}_s^{1b} = \bar{Q}_s^{1b} = \mathcal{Q}_s(\lambda_s^V h_1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{Q}_s^{lt} &= \bar{Q}_s^{lb} = Q_s'(\lambda_s^l h_1) = \sinh(\lambda_s^l h_1) \cosh(\lambda_s^l h_1) - \lambda_s^l h_1, \quad \bar{Q}_s^{lt'} = \bar{Q}_s^{lb'} = Q_s'(\lambda_s^{l'} h_1) \\ \bar{Q}_s^{llt} &= Q_s'(\lambda_s^{ll} h_2), \quad \bar{Q}_s^{llt'} = Q_s'(\lambda_s^{ll'} h_2), \quad \bar{Q}_s^{llb} = Q_s'(\lambda_s^{ll'} h_2), \quad \bar{Q}_s^{llb'} = Q_s'(\lambda_s^{ll} h_2)\end{aligned}$$

応力関数 χ^I および χ^{II} を用いて有限長帯板 [I] および [II] に関する各応力と変位の式を求め、これらを境界条件式 (1) ~ (3) と等置することにより未定係数の間には次式 (5) の関係が得られる。ただし G は横弾性係数 $\{2G(1+\nu)=E\}$ で、 ν はポアソン比を表す。

式 (5) において級数の項数を N とすると、 $24N$ 元連立一次方程式を解くことにより未定係数 $\bar{A}_n^t, \bar{B}_s^t, \dots, \tilde{A}_n^{lb}, \tilde{B}_s^{lb}(n, s=1, 2, 3, \dots)$ が決定され、これら決定された各係数を用いることにより各応力および変位が得られる。

$$\begin{aligned}\bar{A}_n^t + \sum_{s=1}^{\infty} \bar{B}_s^t P_{ns}^t + \bar{A}_n^b - \sum_{s=1}^{\infty} \bar{B}_s^b P_{ns}^b &= 0, \quad \bar{A}_n^t - \sum_{s=1}^{\infty} \bar{B}_s^t P_{ns}^{t'} + \bar{A}_n^{lb} + \sum_{s=1}^{\infty} \bar{B}_s^{lb} P_{ns}^{lb'} = 0 \\ \bar{A}_n^t + \sum_{s=1}^{\infty} \bar{B}_s^t P_{ns}^t - \bar{A}_n^b + \sum_{s=1}^{\infty} \bar{B}_s^b P_{ns}^b &= 0, \quad \bar{A}_n^t - \sum_{s=1}^{\infty} \bar{B}_s^t P_{ns}^{t'} - \bar{A}_n^{lb} - \sum_{s=1}^{\infty} \bar{B}_s^{lb} P_{ns}^{lb'} = -b_s \\ \bar{A}_n^t + \sum_{s=1}^{\infty} \bar{B}_s^t S_{ns}^t + \bar{A}_n^b + \sum_{s=1}^{\infty} \bar{B}_s^b S_{ns}^b &= 0, \quad \bar{A}_n^t + \sum_{s=1}^{\infty} \bar{B}_s^t S_{ns}^{t'} + \bar{A}_n^{lb} + \sum_{s=1}^{\infty} \bar{B}_s^{lb} S_{ns}^{lb'} = 0 \\ \bar{A}_n^t + \sum_{s=1}^{\infty} \bar{B}_s^t S_{ns}^t - \bar{A}_n^b - \sum_{s=1}^{\infty} \bar{B}_s^b S_{ns}^b &= 0, \quad \bar{A}_n^t + \sum_{s=1}^{\infty} \bar{B}_s^t S_{ns}^{t'} - \bar{A}_n^{lb} - \sum_{s=1}^{\infty} \bar{B}_s^{lb} S_{ns}^{lb'} = 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^t Q_{ns}^t + \bar{B}_s^t - \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^t Q_{ns}^{t'} + \bar{B}_s^b &= 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^b Q_{ns}^b - \bar{B}_s^b - \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^{b'} Q_{ns}^{b'} - \bar{B}_s^t = 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^t R_{ns}^t + \bar{B}_s^t + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^t R_{ns}^{t'} + \bar{B}_s^b &= 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^b R_{ns}^b + \bar{B}_s^b + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^{b'} R_{ns}^{b'} + \bar{B}_s^t = 0 \\ \bar{A}_n^{llt} - \sum_{s=1}^{\infty} \bar{B}_s^{llt} P_{ns}^{llt} &= 0, \quad \bar{A}_n^{lb} - \sum_{s=1}^{\infty} \bar{B}_s^{lb} P_{ns}^{lb} = 0, \quad \bar{A}_n^{llt'} + \sum_{s=1}^{\infty} \bar{B}_s^{llt'} S_{ns}^{llt'} = 0, \quad \bar{A}_n^{lb} + \sum_{s=1}^{\infty} \bar{B}_s^{lb} S_{ns}^{lb} = 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^t Q_{ns}^t + \bar{B}_s^t + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^t Q_{ns}^{t'} - \bar{B}_s^b + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \bar{A}_n^{lm} Q_{ms}^{llt'} - \bar{B}_s^{llt} \right] a_{ms}' + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \bar{A}_n^{lb} Q_{ms}^{lb} - \bar{B}_s^{lb} \right] a_{ms}'' &= 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^b Q_{ns}^b - \bar{B}_s^b + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^b Q_{ns}^{b'} + \bar{B}_s^t - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \bar{A}_n^{lm} Q_{ms}^{llt'} - \bar{B}_s^{llt} \right] b_{ms}' - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \bar{A}_n^{lb} Q_{ms}^{lb} - \bar{B}_s^{lb} \right] b_{ms}'' &= 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^t R_{ns}^t + \bar{B}_s^t - \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^t R_{ns}^{t'} - \bar{B}_s^b + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \bar{A}_n^{lm} R_{ms}^{llt'} + \bar{B}_s^{llt} \right] b_{ms}' - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \bar{A}_n^{lb} R_{ms}^{lb} + \bar{B}_s^{lb} \right] b_{ms}'' &= 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^b R_{ns}^b + \bar{B}_s^b - \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^b R_{ns}^{b'} - \bar{B}_s^t - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \bar{A}_n^{lm} R_{ms}^{llt'} + \bar{B}_s^{llt} \right] a_{ms}' + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \bar{A}_n^{lb} R_{ms}^{lb} + \bar{B}_s^{lb} \right] a_{ms}'' &= 0 \\ -\frac{1}{G_1} \sum_{s=1}^{\infty} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^t U_{ns}^t + \sum_{m=1}^{\infty} \bar{B}_m^t J_m^t b_{ms}' + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^t U_{ns}^{t'} + \sum_{m=1}^{\infty} \bar{B}_m^t J_m^{t'} b_{ms}' + \bar{B}_s^t F_s^t - \bar{B}_s^{t'} F_s^{t'} \right] b_{tm} \\ -\frac{1}{G_1} \sum_{s=1}^{\infty} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^b U_{ns}^b + \sum_{m=1}^{\infty} \bar{B}_m^b J_m^b a_{ms}' + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^b U_{ns}^{b'} + \sum_{m=1}^{\infty} \bar{B}_m^b J_m^{b'} a_{ms}' + \bar{B}_s^b F_s^b - \bar{B}_s^{b'} F_s^{b'} \right] b_{tm}' \\ -\frac{1}{G_2} \left[-\sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^{llt} U_{ns}^{llt} - \sum_{m=1}^{\infty} \bar{B}_m^{llt} J_m^{llt} b_{ms}'' + \bar{B}_s^{llt} F_s^{llt} \right] = 0 \\ -\frac{1}{G_1} \sum_{s=1}^{\infty} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^t U_{ns}^t + \sum_{m=1}^{\infty} \bar{B}_m^t J_m^t b_{ms}' + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^t U_{ns}^{t'} + \sum_{m=1}^{\infty} \bar{B}_m^t J_m^{t'} b_{ms}' + \bar{B}_s^t F_s^t - \bar{B}_s^{t'} F_s^{t'} \right] a_{tm} \\ + \frac{1}{G_1} \sum_{s=1}^{\infty} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^b U_{ns}^b + \sum_{m=1}^{\infty} \bar{B}_m^b J_m^b a_{ms}' + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^b U_{ns}^{b'} + \sum_{m=1}^{\infty} \bar{B}_m^b J_m^{b'} a_{ms}' + \bar{B}_s^b F_s^b - \bar{B}_s^{b'} F_s^{b'} \right] a_{tm}' \\ -\frac{1}{G_2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^{llb} U_{ns}^{llb} + \sum_{m=1}^{\infty} \bar{B}_m^{llb} J_m^{llb} a_{ms}'' + \bar{B}_s^{llb} F_s^{llb} \right] = 0 \\ \frac{1}{G_1} \sum_{s=1}^{\infty} \left[\bar{B}_s^t W_s^t - \bar{B}_s^{t'} W_s^{t'} + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^t H_{ns}^t + \sum_{m=1}^{\infty} \bar{B}_m^t V_m^t a_{ms}' - \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^t H_{ns}^{t'} + \sum_{m=1}^{\infty} \bar{B}_m^t V_m^{t'} a_{ms}' \right] b_{tm}' \\ + \frac{1}{G_1} \sum_{s=1}^{\infty} \left[\bar{B}_s^b W_s^b - \bar{B}_s^{b'} W_s^{b'} - \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^b H_{ns}^b + \sum_{m=1}^{\infty} \bar{B}_m^b V_m^b b_{ms}' + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^b H_{ns}^{b'} + \sum_{m=1}^{\infty} \bar{B}_m^b V_m^{b'} b_{ms}' \right] b_{tm} \\ -\frac{1}{G_2} \left[-\bar{B}_s^{llb} W_s^{llb} + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^{llb} H_{ns}^{llb} - \sum_{m=1}^{\infty} \bar{B}_m^{llb} V_m^{llb} b_{ms}'' \right] = 0 \\ -\frac{1}{G_1} \sum_{s=1}^{\infty} \left[\bar{B}_s^t W_s^t - \bar{B}_s^{t'} W_s^{t'} + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^t H_{ns}^t + \sum_{m=1}^{\infty} \bar{B}_m^t V_m^t a_{ms}' - \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^t H_{ns}^{t'} + \sum_{m=1}^{\infty} \bar{B}_m^t V_m^{t'} a_{ms}' \right] a_{tm}' \\ -\frac{1}{G_1} \sum_{s=1}^{\infty} \left[\bar{B}_s^b W_s^b - \bar{B}_s^{b'} W_s^{b'} - \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^b H_{ns}^b + \sum_{m=1}^{\infty} \bar{B}_m^b V_m^b b_{ms}' + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^b H_{ns}^{b'} + \sum_{m=1}^{\infty} \bar{B}_m^b V_m^{b'} b_{ms}' \right] a_{tm}'\end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{G_2} \left[-\bar{B}_s^{1t} W_s^{1t'} - \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n^{1t'} H_{ns}^{1t'} + \sum_{m=1}^{\infty} \bar{B}_m^{1t} V_m^{1t'} b_{ms}^{1t} \right] = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

ただし、式(5)の係数のうち U_{ns}^{1t} , $\dots$, H_{ns}^{1t} , $\dots$, J_m^{1t} , $\dots$, V_m^{1t} , $\dots$, F_s^{1t} , $\dots$, W_s^{1t} , $\dots$, ($n, s=1, 2, 3\dots$) は以下に示すとおりである。

$$\begin{aligned} U_{ns}^{1t} &= U_{ns}(\alpha_n^1, \lambda_s^1, \bar{A}_n^{1t}, l_1, \nu_1) = \frac{2(-1)^{n+s}}{\bar{A}_n^{1t}(\alpha_n^{12} + \lambda_s^{12})^2 l_1} \left[\left(\frac{2}{(1+\nu_1)} + \frac{\alpha_n^{12} - \lambda_s^{12}}{\alpha_n^{12} + \lambda_s^{12}} \right) \sinh(\alpha_n^1 l_1) \cosh(\alpha_n^1 l_1) + \alpha_n^1 l_1 \right] \\ U_{ns}^{1t'} &= U_{ns}(\alpha_n^{1'}, \lambda_s^{1'}, \bar{A}_n^{1t'}, l_1, \nu_1), \quad U_{ns}^{1t''} = U_{ns}(\alpha_n^{1''}, \lambda_s^{1''}, \bar{A}_n^{1t''}, l_2, \nu_2) \\ U_{ns}^{1b} &= U_{ns}(\alpha_n^1, \lambda_s^1, \bar{A}_n^{1b}, l_1, \nu_1) = \frac{2(-1)^{n+s}}{\bar{A}_n^{1b}(\alpha_n^{12} + \lambda_s^{12})^2 l_1} \left[\left(\frac{2}{(1-\nu_1)} + \frac{\alpha_n^{12} - \lambda_s^{12}}{\alpha_n^{12} + \lambda_s^{12}} \right) \sinh(\alpha_n^1 l_1) \cosh(\alpha_n^1 l_1) - \alpha_n^1 l_1 \right] \\ U_{ns}^{1b'} &= U_{ns}(\alpha_n^{1'}, \lambda_s^{1'}, \bar{A}_n^{1b'}, l_1, \nu_1), \quad U_{ns}^{1b''} = U_{ns}(\alpha_n^{1''}, \lambda_s^{1''}, \bar{A}_n^{1b''}, l_2, \nu_2) \\ H_{ns}^{1t} &= H_{ns}(\alpha_n^{1'}, \lambda_s^{1'}, \bar{A}_n^{1t}, l_1, \nu_1) = \frac{2(-1)^{n+s}}{\bar{A}_n^{1t}(\alpha_n^{12} + \lambda_s^{12})^2 l_1} \left[\left(\frac{2}{(1+\nu_1)} - \frac{\alpha_n^{12} - \lambda_s^{12}}{\alpha_n^{12} + \lambda_s^{12}} \right) \sinh(\alpha_n^{1'} l_1) \cosh(\alpha_n^{1'} l_1) + \alpha_n^{1'} l_1 \right] \\ H_{ns}^{1t'} &= H_{ns}(\alpha_n^1, \lambda_s^1, \bar{A}_n^{1t'}, l_1, \nu_1), \quad H_{ns}^{1t''} = H_{ns}(\alpha_n^{1''}, \lambda_s^{1''}, \bar{A}_n^{1t''}, l_2, \nu_2) \\ H_{ns}^{1b} &= H_{ns}(\alpha_n^{1'}, \lambda_s^{1'}, \bar{A}_n^{1b}, l_1, \nu_1) = \frac{2(-1)^{n+s}}{\bar{A}_n^{1b}(\alpha_n^{12} + \lambda_s^{12})^2 l_1} \left[\left(\frac{2}{(1+\nu_1)} - \frac{\alpha_n^{12} - \lambda_s^{12}}{\alpha_n^{12} + \lambda_s^{12}} \right) \sinh(\alpha_n^{1'} l_1) \cosh(\alpha_n^{1'} l_1) - \alpha_n^{1'} l_1 \right] \\ H_{ns}^{1b'} &= H_{ns}(\alpha_n^1, \lambda_s^1, \bar{A}_n^{1b'}, l_1, \nu_1), \quad H_{ns}^{1b''} = H_{ns}(\alpha_n^{1''}, \lambda_s^{1''}, \bar{A}_n^{1b''}, l_2, \nu_2) \\ J_m^{1t} &= J_m(\lambda_m^1, \bar{Q}_m^{1t}, h_1, \nu_1) = \frac{1}{\bar{Q}_m^{1t} \lambda_m^1} \left[\lambda_m^1 h_1 + \frac{1-\nu_1}{1+\nu_1} \sinh(\lambda_m^1 h_1) \cosh(\lambda_m^1 h_1) \right] \\ J_m^{1b} &= J_m(\lambda_m^{1'}, \bar{Q}_m^{1b}, h_1, \nu_1), \quad V_m^{1t} = J_m(\lambda_m^{1'}, \bar{Q}_m^{1t}, h_1, \nu_1), \quad V_m^{1b} = J_m(\lambda_m^1, \bar{Q}_m^{1b}, h_1, \nu_1) \\ J_m^{1b'} &= J_m(\lambda_m^{1''}, \bar{Q}_m^{1b'}, h_2, \nu_2), \quad V_m^{1b''} = J_m(\lambda_m^{1''}, \bar{Q}_m^{1b''}, h_2, \nu_2) \\ J_m^{1t'} &= J_m(\lambda_m^1, \bar{Q}_m^{1t'}, h_1, \nu_1) = \frac{1}{\bar{Q}_m^{1t'} \lambda_m^1} \left[\lambda_m^1 h_1 - \frac{1-\nu_1}{1+\nu_1} \sinh(\lambda_m^1 h_1) \cosh(\lambda_m^1 h_1) \right] \\ J_m^{1b'} &= J_m(\lambda_m^{1'}, \bar{Q}_m^{1b'}, h_1, \nu_1), \quad V_m^{1t'} = J_m(\lambda_m^{1'}, \bar{Q}_m^{1t'}, h_1, \nu_1), \quad V_m^{1b'} = J_m(\lambda_m^1, \bar{Q}_m^{1b'}, h_1, \nu_1) \\ J_m^{1t''} &= J_m(\lambda_m^{1''}, \bar{Q}_m^{1t''}, h_2, \nu_2), \quad V_m^{1t''} = J_m(\lambda_m^{1''}, \bar{Q}_m^{1t''}, h_2, \nu_2) \\ F_s^{1t} &= F_s(\lambda_s^{1'}, \bar{Q}_s^{1t}, h_1, \nu_1) = \frac{2}{\bar{Q}_s^{1t} \lambda_s^{1'}(1+\nu_1)} \cosh^2(\lambda_s^{1'} h_1), \quad F_s^{1t'} = F_s'(\lambda_s^{1'}, \bar{Q}_s^{1t'} h_1, \nu_1) = \frac{2}{\bar{Q}_s^{1t'} \lambda_s^{1'}(1+\nu_1)} \sinh^2(\lambda_s^{1'} h_1) \\ F_s^{1b} &= F_s(\lambda_s^1, \bar{Q}_s^{1b}, h_1, \nu_1), \quad F_s^{1b'} = F_s'(\lambda_s^1, \bar{Q}_s^{1b'}, h_1, \nu_1), \quad W_s^{1t} = F_s'(\lambda_s^1, \bar{Q}_s^{1t}, h_1, \nu_1), \quad W_s^{1t'} = F_s'(\lambda_s^1, \bar{Q}_s^{1t'}, h_1, \nu_1) \\ W_s^{1b} &= F_s'(\lambda_s^{1'}, \bar{Q}_s^{1b}, h_1, \nu_1), \quad W_s^{1b'} = F_s'(\lambda_s^{1'}, \bar{Q}_s^{1b'}, h_1, \nu_1), \quad F_s^{1t''} = F_s'(\lambda_s^{1''}, \bar{Q}_s^{1t''}, h_2, \nu_2), \quad F_s^{1b''} = F_s'(\lambda_s^{1''}, \bar{Q}_s^{1b''}, h_2, \nu_2) \\ W_s^{1t''} &= F_s'(\lambda_s^{1''}, \bar{Q}_s^{1t''}, h_2, \nu_2), \quad W_s^{1b''} = F_s'(\lambda_s^{1''}, \bar{Q}_s^{1b''}, h_2, \nu_2) \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned} a_{ms}^{1t} &= a_{ms}(\lambda_s^1, \lambda_m^{1'}, l_1) = \frac{1}{l_1} \left[\frac{\sin\{(\lambda_m^{1'} + \lambda_s^1) l_1\}}{\lambda_m^{1'} + \lambda_s^1} + \frac{\sin\{(\lambda_m^{1'} - \lambda_s^1) l_1\}}{\lambda_m^{1'} - \lambda_s^1} \right] \\ b_{ms}^{1t} &= b_{ms}(\lambda_s^{1'}, \lambda_m^1, l_1) = \frac{1}{l_1} \left[\frac{\sin\{(\lambda_m^1 + \lambda_s^{1'}) l_1\}}{\lambda_m^1 + \lambda_s^{1'}} + \frac{\sin\{(\lambda_m^1 - \lambda_s^{1'}) l_1\}}{\lambda_m^1 - \lambda_s^{1'}} \right] \\ a_{ms}^{1b} &= \frac{1}{l_1} \left[\frac{\sin\{(\lambda_s^{1''} + \lambda_m^1) l_2\} \cos(\lambda_m^1 c)}{\lambda_s^{1''} + \lambda_m^1} + \frac{\sin\{(\lambda_s^{1''} - \lambda_m^1) l_2\} \cos(\lambda_m^1 c)}{\lambda_s^{1''} - \lambda_m^1} \right] \\ b_{ms}^{1b} &= \frac{1}{l_1} \left[\frac{\sin\{(\lambda_s^{1''} + \lambda_m^1) l_2\} \sin(\lambda_m^{1'} c)}{\lambda_s^{1''} + \lambda_m^1} + \frac{\sin\{(\lambda_s^{1''} - \lambda_m^1) l_2\} \sin(\lambda_m^{1'} c)}{\lambda_s^{1''} - \lambda_m^1} \right] \\ a_{ms}^{1b'} &= \frac{1}{l_1} \left[\frac{\sin\{(\lambda_s^{1''} + \lambda_m^1) l_2\} \sin(\lambda_m^1 c)}{\lambda_s^{1''} + \lambda_m^1} - \frac{\sin\{(\lambda_s^{1''} - \lambda_m^1) l_2\} \sin(\lambda_m^1 c)}{\lambda_s^{1''} - \lambda_m^1} \right] \\ b_{ms}^{1b'} &= \frac{1}{l_1} \left[-\frac{\sin\{(\lambda_s^{1''} + \lambda_m^1) l_2\} \cos(\lambda_m^{1'} c)}{\lambda_s^{1''} + \lambda_m^1} + \frac{\sin\{(\lambda_s^{1''} - \lambda_m^1) l_2\} \cos(\lambda_m^{1'} c)}{\lambda_s^{1''} - \lambda_m^1} \right] \\ a_{tm}^{1t} &= \frac{1}{l_2} \left[\frac{\sin\{(\lambda_m^{1'} + \lambda_t^{1''}) l_2\} \sin(\lambda_m^{1'} c)}{\lambda_m^{1'} + \lambda_t^{1''}} + \frac{\sin\{(\lambda_m^{1'} - \lambda_t^{1''}) l_2\} \sin(\lambda_m^{1'} c)}{\lambda_m^{1'} - \lambda_t^{1''}} \right] \\ b_{tm}^{1t} &= \frac{1}{l_2} \left[-\frac{\sin\{(\lambda_m^{1'} + \lambda_t^{1''}) l_2\} \cos(\lambda_m^{1'} c)}{\lambda_m^{1'} + \lambda_t^{1''}} + \frac{\sin\{(\lambda_m^{1'} - \lambda_t^{1''}) l_2\} \cos(\lambda_m^{1'} c)}{\lambda_m^{1'} - \lambda_t^{1''}} \right] \\ a_{tm}^{1b} &= \frac{1}{l_2} \left[\frac{\sin\{(\lambda_m^1 + \lambda_t^{1''}) l_2\} \cos(\lambda_m^1 c)}{\lambda_m^1 + \lambda_t^{1''}} + \frac{\sin\{(\lambda_m^1 - \lambda_t^{1''}) l_2\} \cos(\lambda_m^1 c)}{\lambda_m^1 - \lambda_t^{1''}} \right] \end{aligned}$$

$$b'_{lm} = \frac{1}{l_2} \left[\frac{\sin\{(\lambda_m^I + \lambda_l^{II})l_2\}\sin(\lambda_m^I c)}{\lambda_m^I + \lambda_l^{II}} - \frac{\sin\{(\lambda_m^I - \lambda_l^{II})l_2\}\sin(\lambda_m^I c)}{\lambda_m^I - \lambda_l^{II}} \right]$$

3. 実験方法

図3は光弾性実験に用いた試験片の寸法を示す。なお試験片は被着体および接着層に相当する帯板を一体とし、厚さ6mmのエポキシ樹脂を用いた。加工後、電気炉中で焼なましした。図4は実験装置の概要を示す。圧縮荷重 W を作用させ、試験片に曲げモーメント $M = W/2 \times 20$ を作用させる。曲げモーメントを作用させた状態で光弾性実験⁽¹²⁾を行い、接着層内の等色線じまを観察する。

4. 解析結果および実験結果との比較

数値計算にあたっては、一例として級数の項数を100項および200項で計算した。この結果、接着層界面の各点での各応力の誤差が1%以下となったため、実用上十分収束したものとし、以下の計算では級数の項数を100項とした。被着体の片側面($x_1 = -l_1$)には曲げモーメント M が $|y_1| \leq h_1$ にわたり線形分布 $\{F(y_1) = Py_1/h_1\}$ で作用するものとした。

4.1 被着体と接着層の縦弾性係数比が接着層境界の応力分布に及ぼす影響 図5は被着体と接着層の縦弾性係数の比 E_1/E_2 が接着層境界($y_2 = h_2$)の応力分布に及ぼす影響を示す。接着層の縦弾性係数は一定とし、被着体のそれを変化させ E_1/E_2 を1, 20, および60とした。縦軸は接着層境界における各応力成分を被着体片側面に作用する線形分布荷重の最大応力 $P(x_1$

Fig. 3 Dimensions of specimen used in photoelastic experiment

Fig. 4 Schematic apparatus in photoelastic experiment

$= -l_1, y_1 = -h_1$) により無次元化した値を、横軸には接着層中心からの距離 x_2 を接着層長さの半分 l_2 により無次元化した値を示す。界面破壊に大きく影響を及ぼすと考えられるはく離応力 σ_y およびせん断応力

(a) σ_y

(b) τ_{xy}

Fig. 5 Effect of the ratio of Young's modulus for adherends to that for an adhesive on the interface stress distributions ($y_2 = h_2, l_1/h_1 = 3.5, l_2/h_1 = 0.4, h_2/h_1 = 0.75$)

τ_{xy} を図 5 (a) および図 5 (b) に示す。自由端近傍 ($x_2 = \pm l_2$) では特異性を示し、 E_1/E_2 の値が小さくなるほど $x_2 = -l_2$ ではなく離応力 σ_y の値は大きくなっている。また、著者がすでに示した引張せん断荷重を受ける場合⁽¹⁵⁾ も同様の傾向を示している。これは被着体の縦弾性係数が小さくなるほど外荷重に対して被着体は変形しやすくなり、この変形に伴いはく離応力 σ_y が大きくなるものと推測される。図 5 (c) は応力特異場パラメータ⁽¹⁶⁾⁽¹⁷⁾ を用いて、接着層自由端近傍 ($y_2 = h_2$, $x_2 = -l_2$) の最大主応力 σ_1 を示す。無次元化された最大主応力 σ_1/P は $\sigma_1/P = Kr^{-\lambda}$ と表される。ここで K は特異応力場⁽¹⁷⁾ の強さ、 λ は次数⁽¹⁶⁾ である。 r は $r = (2l_2 - x)/2l_2$ で表される。 r は $0.005 \leq r \leq 0.05$ の範囲とした。ただし、 x は $x_2 = l_2$ からの距離である。本計算結果より得られる特異性の指数 λ の値は E_1/E_2 が 1, 20 および 60 のときそれぞれ 0.462, 0.408 および 0.406 となった。他方 Bogy の解⁽¹⁶⁾ より得られる λ の値はそれぞれ 0.458, 0.411 および 0.409 となり本解析による λ の値は Bogy より得られる値とかなり近い

Fig. 6 Effect of the ratio of the thickness for adhesive to that for adherend on the interface stress distributions ($y_2 = h_2$, $l_2/l_1 = 0.4$, $E_1/E_2 = 20.0$)

ことがわかる。被着体の縦弾性係数が小さくなるほど、特異応力場の強さ K は大きくなることを示している。

4.2 接着層と被着体の厚さの比が接着層境界の応力分布に及ぼす影響

図 6 は接着層と被着体の厚さの比 h_2/h_1 が接着層境界 ($y_2 = h_2$) の応力分布に及ぼす影響を示す。被着体厚さ h_1 は一定とし、接着層厚さを

Fig. 7 Effect of lap length on the interface stress distributions ($y_2 = h_2$, $h_2/h_1 = 0.75$, $E_1/E_2 = 20.0$)

Fig. 8 Comparison between the numerical and the experimental results ($y_2 = h_2$, $E_1/E_2 = 1.0$, $l_2/l_1 = 0.44$, $h_2/h_1 = 0.79$)

変化させ h_2/h_1 を 1.0, 0.1 および 0.01 とした。縦軸および横軸は図 5 と同様である。 h_2/h_1 が大きくなるにつれて、すなわち接着層厚さが厚くなるにつれて境界での σ_y/P の分布は線形に近づき、自由端近傍で応力が高くなる。またせん断応力は接着層厚さが薄くなるほど応力は高くなる傾向を示す。これに対し引張せん断荷重を受ける場合⁽¹⁵⁾ には、はく離応力 σ_y に関しては同様の傾向を示すが、せん断応力に関しては接着層厚さが薄くなるほど応力が小さくなる傾向を示した。

4.3 重ね合わせ長さ比が接着層境界の応力分布に及ぼす影響 図 7 は重ね合わせ長さの比 l_2/l_1 が接着層境界 ($y_2 = h_2$) の応力分布に及ぼす影響を示す。被着体長さ l_1 は一定とし接着層長さを変化させ l_2/l_1 を 0.2, 0.4 および 0.67 とした。 l_2/l_1 が小さくなるにつれて、すなわち接着層長さ l_2 が相対的に小さくなるにつれて自由端近傍での応力の値は大きくなっている。これは引張せん断荷重を受ける場合と同様の傾向であるが、曲げモーメントを受ける場合の応力値は、ほぼ重ね合わせ長さ比 l_2/l_1 の二乗に反比例して大きくなることが認められる。

4.4 解析結果と光弾性実験結果との比較 図 8 は接着層境界 ($y_2 = h_2$) における本解析結果 (NUM.) と光弾性実験結果 (EXP.) との比較を示す。縦軸には主応力差 ($\sigma_1 - \sigma_2$) を、横軸には接着層中心からの距離を示している。この結果から実験結果と解析結果はかなりよく一致することがわかった。

5. 結 言

本研究は被着体が同種材料、同寸法形状の単純重ね合わせ接着継手に曲げモーメントが作用する場合の接着層内の応力分布を解析することを目的とし、理論および実験の両面より検討し、次の結果が得られた。

(1) 被着体および接着層をそれぞれ有限長帯板にモデル化し、被着体の弾性を考慮して二次元弾性論 (平面ひずみ) により、弾性三体問題として解析する方法を示した。

(2) (1) の方法に基づき、被着体と接着層の縦弾性係数の比、厚さの比および重ね合わせ長さなどが接着層境界の応力分布に及ぼす影響を数値的に明らかにした。その結果、被着体と接着層の縦弾性係数比 E_1/E_2 が小さくなるほど、重ね合わせ長さとの比 l_2/l_1

が小さくなるほど接着層境界の自由端近傍に生じるはく離応力 σ_y の値が大きくなることがわかった。また接着層厚さ h_2 が小さくなるほどせん断応力 τ_{xy} が大きくなることがわかった。

(3) 光弾性実験を行い接着層内の主応力差を測定し、本解析結果と比較したところ、両者はかなりよく一致することを示した。

文 献

- (1) 杉林・池上, 単純重ね合わせ継手の引張りせん断負荷に対する変形と強度, 機論, 50-449, C(1984), 17-24.
- (2) 白鳥・森, 金属-FRP 接着継手の応力解析と設計への応用, 機論, 54-498, A(1988), 251-258.
- (3) 沢・ほか 3 名, 引張りせん断荷重を受ける単純重ね合わせ接着継手の弾塑性有限要素解析, 機論, 59-564, A(1993), 1881-1887.
- (4) Sawyer, J. W. and Coopert, P. A., Analytical and Experimental Results for Bonded Single Lap Joints with Preformed Adherends, *AIAA J.*, 19-11(1981), 1443-1451.
- (5) Volkersen, O., Die Nietkraftverteilung in zugbeanspruchten Nietverbindungen mit Konstanten Laschenquerschnitten, *Luftfahrtforschung*, 15(1938), 41-47.
- (6) Goland, M. and Reissner, E., The Stresses in Cemented Joints, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 11(1944), A 17-A 27.
- (7) Chen, D. and Cheng, S., An Analysis of Adhesive-Bonded Single-Lap Joints, *J. Appl. Mech.*, 50(1983), 109-115.
- (8) Tsai, M. Y. and Morton, J., A Note on Peel Stresses in Single-lap Adhesive Joints, *J. Appl. Mech.*, 15(1994), 712-715.
- (9) 網島・藤井・江畑, シングル・ラップ接着継手の強度について, 日本接着協会誌, 24-8(1988), 292-298.
- (10) 杉林・池上, 単純重ね合わせ継手の引張りせん断荷重と曲げ荷重に対する変形と強度, 日本接着協会誌, 18-11(1982), 484-493.
- (11) 中原, 応用弾性学, (1979), 38-44, 216, 実教出版.
- (12) 辻・西田・河田, 光弾性実験法, (1977), 57-62, 103-104, 日刊工業新聞社.
- (13) 沢・ほか 2 名, 引張り荷重を受けるバット接着継手の二次元応力解析, 機論, 52-476, A(1986), 919-924.
- (14) 沢・ほか 3 名, 曲げモーメントを受けるバット接着継手の二次元応力解析, 機論, 52-483, A(1986), 2506-2511.
- (15) 沢・ほか 3 名, 引張りせん断荷重を受ける単純重ね合わせ接着継手の二次元応力解析, 機論, 61-589, A(1995), 1994-2002.
- (16) Boggy, D. B., Two Edge-Bonded Elastic Wedges of Different Materials and Wedge Angles Under Surface Traction, *J. Appl. Mech.*, 38(1971), 377-386.
- (17) 服部・ほか 3 名, 応力特異場パラメータを用いた接着界面強度評価, 機論, 54-499, A(1988), 597-602.