任意曲線法による弾塑性解析*

上 西 研^{*1}

Method of Arbitrary Lines for Elastoplastic Analysis

Ken KAMINISHI

The semi-discrete method of arbitrary lines (MAL) is a general dimensional reduction approach for partial differential equations over arbitrary domains by solving systems with boundary value problems for ordinary differential equations. In this study, we first give a MAL formulation of 2-dimensional elastoplastic problems. The application of the MAL to plasticity analysis has a problem in treating the discontinuity of the coefficients of governing equations at the elastic-plastic boundary. We propose a method which approximates the discontinuity of the coefficients by smooth curve, e. g., splines. Based on this method, we obtain a valid MAL formulation for elastoplastic problems, and demonstrate its effectiveness and accuracy on a typical problem.

Key Words: Method of Arbitrary Lines, Elastoplastic Analysis

1. 緒 言

偏微分方程式の境界値問題(BVP-PDE)を常微分方程式の境界値問題(BVP-ODE)に帰着させて解く方法は、ある一方向には離散化する必要がないため、連立一次方程式に帰着させて解く従来の解法(差分法、有限要素法および境界要素法等)に比べて、計算精度あるいは要素分割等の面で優れているものと考えられる。このため、比較的古くから Method of Lines⁽¹⁾(MOL)という方法が提案され、三次元き裂問題等⁽²⁾にも適用されている。しかし、MOL は単なる差分近似により半離散化を行い、PDE を ODE に変換するため、解くことができる形状が限られているなどの問題がある。これに対して Xanthis らにより提案された Method of Arbitrary Lines⁽³⁾(MAL)は有限要素法(FEM)的な考えを用いて半離散化を行い、PDE を ODE に変換するため、任意の形状を扱うことができ、しかも、半離散化の際、高次の形状関数を用いることにより、離散化誤差を小さくできる長所がある。したがって、支配方程式を線の問題(BVP-ODE)に帰着させて解く方法のなかでは MAL が最も優れているもの

と考えられる。なお、MAL を直訳すると任意線法ということになるが、原理的には任意の曲線上の問題に離散化することができるため、本研究では MAL を任意曲線法と呼ぶことにする。一方、これらの解法の計算精度および計算時間は、当然のことながら BVP-ODE を解くソルバーの性能に大きく依存する。しかし、近年、BVP-ODE に関する計算法の発展と計算機の進歩により BVP-ODE を極めて高精度に、しかも、効率よく解くことができる汎用プログラム(例えば COLSYS⁽⁴⁾)が数学者のグループにより開発されるようになり、BVP-ODE を解くこと自体に問題はない時代となった。これらのことより、MAL は将来有望な汎用数値解析手法の一つになり得るものと考えられる。しかし、これまでのところ、MAL はポテンシャル問題にしか適用されておらず⁽³⁾⁽⁵⁾、弾塑性問題等の非線形問題への応用が今後の大きな課題となっている。そこで本研究では、任意曲線法による二次元弾塑性問題に対する離散化仮想仕事の原理を導き、その離散化システムを解くための方法を提案した。さらに MAL による計算結果と厳密解等を比較することにより、MAL の有効性について検討した。

* 原稿受付 1995 年 4 月 17 日。

^{*1} 正員、山口大学工学部 (〒755 宇部市常盤台 2557)。

2. 任意曲線法による 離散化仮想仕事の原理

微小変形二次元弾塑性問題に対する増分仮想仕事の原理は

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial d\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial d\tau_{xy}}{\partial y} \right) \delta du + \left(\frac{\partial d\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial d\sigma_y}{\partial y} \right) \delta dv \right\} dx dy \\ & = - \iint_{\Omega} (df_x \delta du + df_y \delta dv) dx dy \quad \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

で表される。ここで δdu , δdv は任意の仮想変位増分である。また、

$$\{d\sigma\} = ([D] - [D']) \{d\epsilon\} = [D^p] \{d\epsilon\} \quad \dots\dots\dots (2)$$

である。ただし

$[D]$: 弾性マトリックス

$$[D'] = \frac{[D] \{ \partial f \} \{ \partial f \}^T [D]}{H' + \{ \partial f \}^T [D] \{ \partial f \}}$$

$$\{ \partial f \} = \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_x}, \frac{\partial f}{\partial \sigma_y}, \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}} \right)^T$$

$$[D^p] = \begin{bmatrix} D_{11}^p & D_{12}^p & D_{13}^p \\ D_{21}^p & D_{22}^p & D_{23}^p \\ D_{31}^p & D_{32}^p & D_{33}^p \end{bmatrix}$$

$f(\sigma)$: 降伏関数

$H'(\bar{\epsilon}^p)$: 加工硬化率

$\bar{\epsilon}^p$: 相当塑性ひずみ

である。式(1)に Green の公式を適用した後、式(2)を代入し整理すると、式(1)は

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \left\{ D_{11}^p \frac{\partial du}{\partial x} \frac{\partial \delta du}{\partial x} + D_{12}^p \frac{\partial dv}{\partial y} \frac{\partial \delta du}{\partial x} + D_{13}^p \frac{\partial du}{\partial y} \frac{\partial \delta du}{\partial x} + D_{13}^p \frac{\partial dv}{\partial x} \frac{\partial \delta du}{\partial x} + D_{21}^p \frac{\partial du}{\partial x} \frac{\partial \delta dv}{\partial y} + D_{22}^p \frac{\partial dv}{\partial y} \frac{\partial \delta dv}{\partial y} \right. \\ & + D_{23}^p \frac{\partial du}{\partial y} \frac{\partial \delta dv}{\partial y} + D_{23}^p \frac{\partial dv}{\partial x} \frac{\partial \delta dv}{\partial y} + D_{31}^p \frac{\partial du}{\partial x} \frac{\partial \delta du}{\partial y} + D_{32}^p \frac{\partial dv}{\partial y} \frac{\partial \delta du}{\partial y} + D_{33}^p \frac{\partial du}{\partial y} \frac{\partial \delta du}{\partial y} + D_{33}^p \frac{\partial dv}{\partial x} \frac{\partial \delta du}{\partial y} \\ & \left. + D_{31}^p \frac{\partial du}{\partial x} \frac{\partial \delta dv}{\partial x} + D_{32}^p \frac{\partial dv}{\partial y} \frac{\partial \delta dv}{\partial x} + D_{33}^p \frac{\partial du}{\partial y} \frac{\partial \delta dv}{\partial x} + D_{33}^p \frac{\partial dv}{\partial x} \frac{\partial \delta dv}{\partial x} \right\} dx dy \\ & = \iint_{\Omega} (df_x \delta du + df_y \delta dv) dx dy + \int_{\Gamma_N} (dh_x \delta du + dh_y \delta dv) ds \quad \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

となる。なお、

$$dh_x = d\sigma_x \cos(n, x) + d\tau_{xy} \cos(n, y), \quad dh_y = d\tau_{xy} \cos(n, x) + d\sigma_y \cos(n, y) \quad \dots\dots\dots (4)$$

である。ここで、領域 Ω を各 element Ω_i に分割し、各 element Ω_i は master element $\bar{\Omega} = (-1, 1)^2$ の Φ_i による像と考える。

$$\Omega_i = \Phi_i(\bar{\Omega}), \quad x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta) \quad \dots\dots\dots (5)$$

さらに、 Ω_i 上での du , dv , δdu , および δdv の値を次式のように近似する。

$$du|_{\Omega_i} = du(\Phi_i(\xi, \eta)) = \sum_{j=0}^p X_{ij}^i(\eta)^T Q_j(\xi) = (X_{i0}^i, \dots, X_{ip}^i)(Q_0, \dots, Q_p)^T = X_i^{iT} Q \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$dv|_{\Omega_i} = dv(\Phi_i(\xi, \eta)) = \sum_{j=0}^p X_{ij}^i(\eta)^T Q_j(\xi) = (X_{i0}^i, \dots, X_{ip}^i)(Q_0, \dots, Q_p)^T = X_i^{iT} Q \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\delta du|_{\Omega_i} = \delta du(\Phi_i(\xi, \eta)) = \sum_{j=0}^p \Psi_{ij}^i(\eta)^T Q_j(\xi) = (\Psi_{i0}^i, \dots, \Psi_{ip}^i)(Q_0, \dots, Q_p)^T = \Psi_i^{iT} Q \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$\delta dv|_{\Omega_i} = \delta dv(\Phi_i(\xi, \eta)) = \sum_{j=0}^p \Psi_{ij}^i(\eta)^T Q_j(\xi) = (\Psi_{i0}^i, \dots, \Psi_{ip}^i)(Q_0, \dots, Q_p)^T = \Psi_i^{iT} Q \quad \dots\dots\dots (9)$$

Q は ξ の p 次多項式である。

式(6)～(9)を式(3)に代入し整理すると、式(3)の左辺は以下ようになる。

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) = & \int_{-1}^1 \left\{ \begin{bmatrix} \Psi_x^i & \Psi_y^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11}^i & A_{12}^i \\ A_{21}^i & A_{22}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X}_x^i \\ \dot{X}_y^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Psi_x^i & \Psi_y^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11}^i & B_{12}^i \\ B_{21}^i & B_{22}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_x^i \\ X_y^i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Psi_x^i & \Psi_y^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11}^i & C_{12}^i \\ C_{21}^i & C_{22}^i \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{X}_x^i \\ \dot{X}_y^i \end{bmatrix} \right. \\ & \left. - \begin{bmatrix} \Psi_x^i & \Psi_y^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11}^i & C_{12}^i \\ C_{21}^i & C_{22}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_x^i \\ X_y^i \end{bmatrix} \right\} d\eta \quad \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

となる。ここで

$$A_{11}^i = \int_{-1}^1 [D_{33}^p x_{\xi}^2 - (D_{13}^p + D_{31}^p) x_{\xi} y_{\xi} + D_{11}^p y_{\xi}^2] Q Q^T |J|^{-1} d\xi$$

$$A_{12}^i = \int_{-1}^1 [D_{32}^p x_{\xi}^2 - (D_{12}^p + D_{33}^p) x_{\xi} y_{\xi} + D_{13}^p y_{\xi}^2] Q Q^T |J|^{-1} d\xi$$

$$\begin{aligned}
A_{21}^i &= \int_{-1}^1 [D_{23}^p x_\xi^2 - (D_{21}^p + D_{23}^p) x_\xi y_\eta + D_{23}^p y_\eta^2] Q Q^T |J|^{-1} d\xi \\
A_{22}^i &= \int_{-1}^1 [D_{22}^p x_\eta^2 - (D_{23}^p + D_{22}^p) x_\eta y_\eta + D_{23}^p y_\eta^2] Q Q^T |J|^{-1} d\xi \\
B_{11}^i &= \int_{-1}^1 [D_{33}^p x_\xi^2 - (D_{13}^p + D_{31}^p) x_\eta y_\eta + D_{11}^p y_\eta^2] Q' Q'^T |J|^{-1} d\xi \\
B_{12}^i &= \int_{-1}^1 [D_{32}^p x_\eta^2 - (D_{12}^p + D_{33}^p) x_\eta y_\eta + D_{13}^p y_\eta^2] Q' Q'^T |J|^{-1} d\xi \\
B_{21}^i &= \int_{-1}^1 [D_{23}^p x_\eta^2 - (D_{21}^p + D_{33}^p) x_\eta y_\eta + D_{31}^p y_\eta^2] Q' Q'^T |J|^{-1} d\xi \\
B_{22}^i &= \int_{-1}^1 [D_{22}^p x_\eta^2 - (D_{23}^p + D_{32}^p) x_\eta y_\eta + D_{33}^p y_\eta^2] Q' Q'^T |J|^{-1} d\xi \\
C_{11}^i &= \int_{-1}^1 [D_{33}^p x_\eta x_\xi - D_{13}^p x_\eta y_\xi - D_{31}^p x_\xi y_\eta + D_{11}^p y_\eta y_\xi] Q Q^T |J|^{-1} d\xi \\
C_{12}^i &= \int_{-1}^1 [D_{32}^p x_\eta x_\xi - D_{12}^p x_\eta y_\xi - D_{33}^p x_\xi y_\eta + D_{13}^p y_\eta y_\xi] Q Q^T |J|^{-1} d\xi \\
C_{21}^i &= \int_{-1}^1 [D_{23}^p x_\eta x_\xi - D_{23}^p x_\eta y_\xi - D_{21}^p x_\xi y_\eta + D_{31}^p y_\eta y_\xi] Q Q^T |J|^{-1} d\xi \\
C_{22}^i &= \int_{-1}^1 [D_{22}^p x_\eta x_\xi - D_{22}^p x_\eta y_\xi - D_{23}^p x_\xi y_\eta + D_{33}^p y_\eta y_\xi] Q Q^T |J|^{-1} d\xi
\end{aligned}$$

である。ただし,

$$J = \begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{bmatrix}$$

であり, x_ξ 等は x の ξ による偏微分を意味する。

一方, 式(3)右辺第1項は

$$\begin{aligned}
\iint_{\Omega} (df_x \delta du + df_y \delta dv) dx dy &= \iint_{\Omega} df_x(\Phi_i(\xi, \eta)) \Psi_x^{iT} |J| Q(\xi) d\xi d\eta + \iint_{\Omega} df_y(\Phi_i(\xi, \eta)) \Psi_y^{iT} |J| Q(\xi) d\xi d\eta \\
&= \int_{-1}^1 \Psi_x^{iT} \int_{-1}^1 df_x(\Phi_i(\xi, \eta)) |J| Q(\xi) d\xi d\eta + \int_{-1}^1 \Psi_y^{iT} \int_{-1}^1 df_y(\Phi_i(\xi, \eta)) |J| Q(\xi) d\xi d\eta \quad \dots\dots\dots (11)
\end{aligned}$$

また, 式(3)右辺第2項は

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_N} (dh_x \delta du + dh_y \delta dv) ds &= \int_{-1}^1 dh_x(\Phi_i(\xi, \eta)) (x_\eta^2 + y_\eta^2)^{1/2} \Psi_x^{iT} d\eta Q(\xi) |_{\xi=\pm 1} \\
&\quad + \int_{-1}^1 dh_y(\Phi_i(\xi, \eta)) (x_\eta^2 + y_\eta^2)^{1/2} \Psi_y^{iT} d\eta Q(\xi) |_{\xi=\pm 1} + \Psi_x^{iT}(\eta) \int_{-1}^1 dh_x(\Phi_i(\xi, \eta)) (x_\xi^2 + y_\xi^2)^{1/2} Q(\xi) d\xi |_{\eta=\pm 1} \\
&\quad + \Psi_y^{iT}(\eta) \int_{-1}^1 dh_y(\Phi_i(\xi, \eta)) (x_\xi^2 + y_\xi^2)^{1/2} Q(\xi) d\xi |_{\eta=\pm 1} \quad \dots\dots\dots (12)
\end{aligned}$$

となる。

したがって,

$$X^i = \begin{Bmatrix} X_\xi^i \\ X_\eta^i \end{Bmatrix}, \quad \Psi^i = \begin{Bmatrix} \Psi_x^i \\ \Psi_y^i \end{Bmatrix}, \quad f = \begin{Bmatrix} df_x \\ df_y \end{Bmatrix}, \quad h = \begin{Bmatrix} dh_x \\ dh_y \end{Bmatrix}, \quad A^i = \begin{bmatrix} A_{11}^i & A_{12}^i \\ A_{21}^i & A_{22}^i \end{bmatrix}, \quad B^i = \begin{bmatrix} B_{11}^i & B_{12}^i \\ B_{21}^i & B_{22}^i \end{bmatrix}, \quad C^i = \begin{bmatrix} C_{11}^i & C_{12}^i \\ C_{21}^i & C_{22}^i \end{bmatrix}$$

と置き, 整理すると次式が得られる。

$$\int_{-1}^1 [\Psi^{iT} A^i \dot{X}^i - \Psi^{iT} C^{iT} \dot{X}^i - \Psi^{iT} C^i X^i + \Psi^{iT} B^i X^i] d\eta = \int_{-1}^1 \Psi^{iT}(\eta) F^i d\eta + \Psi^{iT}(\eta) q^i \quad \dots\dots\dots (13)$$

ここで,

$$\begin{aligned}
F^i &= \int_{-1}^1 f(\Phi_i(\xi, \eta)) |J| Q(\xi) d\xi + (x_\eta^2 + y_\eta^2)^{1/2} h(\Phi_i(\xi, \eta)) Q(\xi) |_{\xi=\pm 1} \\
q^i &= \int_{-1}^1 h(\Phi_i(\xi, \eta)) (x_\xi^2 + y_\xi^2)^{1/2} Q(\xi) d\xi |_{\eta=\pm 1}
\end{aligned}$$

である。

3. 離散化システムの解法

3・1 弾性解析 式(13)は弾塑性問題に対する離散化仮想仕事の原理であるが, 当然, 弾性問題に対しても成り立つ。そこで, 式(13)の左辺を部分積分すると

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \Psi^{iT} \{ [-A^i \dot{X}^i]' - C^{iT} \dot{X}^i + [C^i X^i]' + B^i X^i \} d\eta + [\Psi^{iT} A^i \dot{X}^i - \Psi^{iT} C^i X^i]_{-1}^1 \\ &= \int_{-1}^1 \Psi^{iT} F^i d\eta + \Psi^{iT} q^i|_{\eta=\pm 1} \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

となる． Ψ は任意の仮想変位であり，すべての Ψ (ただし両端を除く) について式(14)が成立するので

$$-A^i \dot{X}^i - (\dot{A}^i + C^{iT} - C^i) \dot{X}^i + (B^i + \dot{C}^i) X^i = F^i \dots\dots\dots (15)$$

および

$$A^i \dot{X}^i - C^i X^i = q^i|_{\eta=\pm 1} \dots\dots\dots (16)$$

が得られる．したがって，式(16)の境界条件のもとで式(15)で表される2階の連立常微分方程式をODE解

析プログラムを用いて解くことにより任意曲線上の X および $\dot{X}$ を求めることができる．これらを式(6)および式(7)に代入することにより，領域 Ω 内の任意の点における変位およびひずみが得られる．また，それらのひずみより任意点における応力も簡単に得ることができる．

3・2 弾塑性解析 弾塑性解析の場合， D^p が弾塑性境界上で不連続となるため，式(13)中の係数マトリックス A, B および C は η 方向への連続性が保証されなくなる．したがって，そのままでは，式(15)のような strong form の形(連立常微分方程式)に表すことができない．そこで本研究では η 方向等間隔に評価点というものを設け，ここでの D^p の値を三次の B -スプライン関数で補間することにより係数マトリックスを求めた．ただし， ξ 方向に数値積分して係数マトリックスを求めるため，評価点の ξ 座標はガウスの積分点の位置とした．このようにして求めた式(13)中の係数

Fig. 1 MAL-mesh for infinite plate with a hole

Table 1 Relative error for hoop stresses

Number of Elements	Number of Lines	$\frac{\sigma_{MAL}}{\sigma_{\infty}}$	$\frac{ \sigma_{MAL} - \sigma_{EXACT} }{\sigma_{EXACT}}$
2	7	3.02088	6.96E-03
3	10	3.00212	7.07E-04
4	13	3.00213	7.10E-04
5	16	3.00063	2.10E-04

Fig. 2 Distribution of σ_{θ}

Fig. 3 MAL-mesh for thick cylinder

マトリックス A, B および C をそれぞれ A^*, B^* および C^* とすると, 3.1 節と同様の手順で

$$-A^{*i} \dot{X}^i - (A^{*i} + C^{*iT} - C^{*i}) \dot{X}^i + (B^{*i} + \dot{C}^{*i}) X^i = F^i \dots\dots\dots (17)$$

および

$$A^{*i} \dot{X}^i - C^{*i} X^i = q^i|_{\eta=\pm 1} \dots\dots\dots (18)$$

が得られる。この非線形方程式を解くためにはいくつかの方法が考えられるが, 本研究では $r_{\min}$ 値を用いて荷重増分を制御し, 非線形方程式を線形化して解く接線剛性法(直接法)を用いた。通常, 有限要素法では積分点で r 値を評価するが, 本方法では, 上述の評価点で r 値を計算し, 荷重の制御および塑性域の追跡を行った。

(a) Hoop stresses

(b) Radial stresses

Fig. 4 Comparison of MAL results with exact solution

Table 2 Relative error for hoop and radial stresses

c/a	$\frac{\sigma_{MAL} - \sigma_{EXACT}}{\sigma_{EXACT}}$	
	Hoop stresses	Radial stresses
1.0	2.58E-03	2.68E-03
1.1	5.45E-04	2.97E-03
1.2	8.69E-03	4.36E-03
1.3	6.67E-04	2.40E-03
1.4	9.27E-03	4.15E-03
1.5	6.94E-03	2.14E-03
1.6	4.63E-03	2.22E-04
1.7	1.38E-02	3.97E-03
1.8	7.77E-03	3.75E-04
1.9	1.56E-02	3.30E-03

Fig. 5 MAL-mesh for a tension plate with a hole and the spread of plastic region

Fig. 6 Load versus displacement diagram

4. 計算結果および考察

4.1 二次元弾性解析 計算精度に及ぼすライン数(要素数)の影響について検討するために、ライン数を変化させて、円孔を有する無限板の弾性解析を行った。図1に任意曲線分割の一例(2要素7ライン)を示す。ここで、太線で囲まれた領域を要素、細線をライン(要素境界では太線を含む)、ラインの両端($\eta = -1$ および 1)を結んだ線をフェイスと呼ぶことにする。無限板と近似できるように、板の一边の長さを円孔の直径の250倍とした。また、要素の種類としては、要素内の変位を4本のライン上の変位と三次の形状関数との内積とで表現する三次要素を用いた[式(6), (7)参照]。図2に円孔縁での接線方向応力の計算値(2要素7ライン)と厳密解との比較を示す。わずか2要素7ラインであるにもかかわらず、任意曲線法(MAL)による計算値は厳密解とよく一致している。計算精度についてさらに詳細に検討するため、ライン数を変化させた場合のX軸上応力の相対誤差を表1に示す。同表より、3要素10ライン(20元の連立常微分方程式)で相対誤差が千分の1以下となっており、この程度のライン数でも十分高精度であることがわかる。また、ライン数を19本にすると相対誤差は一万分の1程度となり、極めて高精度であることがわかる。以上のことは、他の例題、例えばだ円孔の問題等に対しても同様であり、応力集中部は細かく分割するなどの特別な考慮なしに十分に高精度の解が得られる。したがって、MALはエキスパートシステムのソルバーとしても将来有望であると考えられる。

4.2 二次元弾塑性解析 まず、弾塑性問題に対する任意曲線法の計算精度を検討するため、内圧を受ける弾完全塑性体の厚肉円筒の解析を行い、厳密解と

比較した。図3に任意曲線分割(2要素, 7ライン)を示す。図中の p は内圧, c は円筒の中心から弾塑性境界までの距離である。ヤング率206 GPa, 降伏応力235 MPa, ポアソン比0.3, ひずみ硬化率0とし平面ひずみ条件で、全面降伏に至る直前まで解析した。また、三次要素を用い、評価点は η 方向に11個設けた。図4に塑性域が $c/a=1.3$ および1.7のときの、円周方向応力と半径方向の応力の計算値と厳密解との比較を示す。図4より任意曲線法計算結果は全領域にわたり厳密解⁽⁶⁾とよく一致している。特に、弾塑性境界でとがり点となる円周方向応力の分布に対して高精度の解が得られた。これは、半径方向に離散化していない任意曲線法の利点が十分に生かされた結果だと考えられる。塑性域の進展に伴う $\eta = -1$ における円周方向応力と半径方向応力の相対誤差を表2に示す。全面降伏に至るまでの最大相対誤差は2%以内であり、弾塑性計算としては極めて高精度であると言える。次に、円孔を有する有限板の弾塑性解析(ヤング率68.6 GPa, 加工硬化率2.2 GPa, 降伏応力238 MPaおよびポアソン比0.3)を行った。図5に三次要素を用いた任意曲線分割を示す(3要素, 10ライン)。図中丸印は評価点を意味し、 η 方向には等間隔に11個、 ξ 方向には積分点の位置上(図中点線, $\xi = -0.861\ 136\ 311\ 594\ 053, -0.339\ 981\ 043\ 584\ 856, 0.339\ 981\ 043\ 584\ 856$ および $0.861\ 136\ 311\ 594\ 053$)に配置した。また、黒丸印は荷重2.38 kN時の塑性域を示している。図6に荷重と変位の関係を示す。参考のため、8節点アイソパラメトリック要素を用いた場合のFEM計算結果(総節点数314)も合わせて示した。この問題に関しては厳密解がないので、MALとFEMの計算精度の正確な比較はできないが、MALは図5程度の非常に粗い分割(3要素, 10ライン)でFEM(総節点数314)と同程度の結果を得ることができることがわかる。なお、BVP-ODEソルバーとしてはCOLSYS⁽⁴⁾を用いた。

5. 結 言

本研究により得られた結果を要約すると以下のようになる。

(1) 任意曲線法(MAL)による二次元弾塑性問題に対する離散化仮想仕事の原理を導き、その離散化システムを解くための方法を提案した。

(2) 二次元弾性問題の例題として有孔無限板の引張解析を行い、厳密解と比較した。その結果、ライン数10程度の粗い分割でも、最大相対誤差は 10^{-3} 以下であり、MALは高精度な解法であることが確認された。

(3) 二次元弾塑性問題の例題として内圧を受ける

厚肉円筒および有孔平板の弾塑性解析を行った。その結果, MAL は弾塑性問題に対しても高精度な解法であることがわかった。

(4) 以上のことより, MAL は今後, 弾性および弾塑性解析のための有力な数値解析法の一つになり得るものと考えられる。

なお, Westminster 大学の L. S. Xanthis 教授および X. Ren 氏には貴重なご意見をいただいた。記して感謝する。

文 献

- (1) Liskovets, O. A., *Differential equations*, **1**(1965), 1308-1323.
- (2) Mendelson, A. and Alam, J., *Int. J. Fract.*, **22**(1983), 105-116.
- (3) Xanthis, L. S. and Schwab, C., *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, (1991), 181-187.
- (4) Ascher, U., *etc. ACM Trans. Math. Software*, **7**(1981), 209-222.
- (5) Schwab, C. and Xanthis, L. S., *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, (1992), 1451-1456.
- (6) Hodge, P. G. and White, G. N., *J. Appl. Mech.*, (1950), 180-184.