任意の熱伝達条件を考慮した不均質平板の非定常熱応力問題*

谷川 義信^{*1}, 赤井 富一^{*2}
河村 隆介^{*1}, 岡 直毅^{*3}

Transient Thermal Stress Analysis of a Nonhomogeneous Plate Taking into Account the Relative Heat Transfer at Boundary Surfaces

Yoshinobu TANIGAWA, Tomikazu AKAI,
Ryuusuke KAWAMURA and Naoki OKA

Nonhomogeneous materials such as FGM (Functionally Gradient Materials) have arbitrarily distributed and continuously varying material properties. For such nonhomogeneous materials, the heat conduction equation takes a nonlinear form, which makes theoretical treatment of the temperature change difficult, and it is almost impossible to obtain the exact solution. In this paper, taking into account the effect of the heat transfer at the heated surface and cooled end, a one dimensional transient heat conduction problem of a plate made of such nonhomogeneous materials is treated theoretically. Introducing the analytical technique for a laminated plate model, and considering the number of lamina to be sufficiently large, the temperature solution for such a nonhomogeneous plate is approximately derived. The associated thermal stress distribution for an infinitely large nonhomogeneous plate is formulated under the traction free-condition. Numerical calculations are carried out for a nonhomogeneous plate, made of zirconium oxide and titanium alloy. Numerical results such as temperature change and the thermal stress distribution are shown graphically, and the influences of a change of relative heat transfer coefficient at the heated and cooled surfaces and of a change of nonhomogeneity are briefly examined.

Key Words: Thermoelasticity, Nonhomogeneous Plate, Heat Conduction, Thermal Stress, Transient State

1. 緒 言

超高温環境での使用を目的として、現在、開発研究が進められている熱応力緩和形傾斜機能材料(Functionally Gradient Materials: FGM)は、材料物性が連続的かつ任意に変化するという特性を持つため、非定常熱伝導問題は、解析的手法により厳密解を得ることが困難な非線形問題となる。しかし、このような不均質材料は、その開発目的である熱応力緩和機能を発現させることができる魅力ある材料であり、熱応力問題においては、物性値の変化に伴い、均質材料には見られない力学的応答を示すことが予測される。

そこで、著者らは、前報¹⁾において、不均質平板の一次元非定常熱伝導・熱応力問題を解析対象として取上げ、熱的および力学的材料物性が連続的かつ任意に変化する場合の非線形熱伝導方程式の近似温度解を、理想化された最も簡単な温度境界条件(すなわち、加熱面が温度指定、非加熱面が完全冷却状態あるいは完全断熱状態)のもとで導出する方法を示し、この温

度変化により平板に生じる非定常熱応力を定式化するとともに、数値計算の実行により、平板に生じる温度変化および熱応力分布の定性的挙動について検討し、定量的評価を行った。

しかし、固体から媒体(あるいは媒体から固体)への熱伝達において、完全な温度指定(あるいは完全冷却状態)および完全な断熱状態という熱伝達条件は、解析上の理想化であるといえる。そこで本報では、不均質平板の温度境界条件として、より一般的な、両境界面から任意の熱伝達率で加熱・放熱されるという条件を想定し、連続的かつ任意に変化する物性値を有する不均質平板における非線形熱伝導方程式の近似温度解の導出方法を示すとともに、不均質平板に生じる非定常熱応力および温度変化についての数値計算を実行し、加熱・放熱境界面上での相対熱伝達率の変化および不均質平板の材料組成の変化が平板に生じる熱応力分布、温度分布に及ぼす影響について検討した。

2. 解 析

2・1 温度解析 熱的および力学的材料特性が板厚方向に関して、連続的かつ任意に変化する不均質平板を考える。板厚方向の座標を x 、比熱、密度および熱伝達率を $c(x)$, $\rho(x)$, $\lambda(x)$ とし、板厚方向に関する一

* 原稿受付 1994年12月8日。

^{*1} 正員、大阪府立大学工学部 (〒593 堺市学園町1-1)。^{*2} 正員、オムロン(株) (〒525 草津市西草津2-2-1)。^{*3} 学生員、大阪府立大学大学院。

Fig. 1 Analytical model of multi-layered laminated plate

次元温度変化を想定すれば、内部熱発生のない場合の非定常熱伝導方程式は、次式に示すような非線形方程式となる。

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{c(x) \cdot \rho(x)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \lambda(x) \frac{\partial T}{\partial x} \right\} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ただし、 $T(x, t)$ は温度変化、 t は時間である。

2・1・1 層状平板の温度解 式(1)を線形化して解くにあたり、まず、不均質平板を板厚方向に関して仮想的な多層に分割し、この多層層状平板の温度解を、各層が均質であり、さらに隣り合う各層の物性値が少しずつ変化するという条件のもとで解く。図1に示すような n 層の物性値の異なる材料からなる幅 b の層状平板を考え、各層を下面 ($x=0$) から順次、 $i=1, 2, \dots, n$ と添字をつけて区別する。 i 番目の層の温度変化、熱伝導率、温度伝導率、密度、比熱、厚さを、それぞれ $T_i, \lambda_i, x_i, \rho_i, c_i, l_i$ 、各層の界面の座標を $x=x_i$ ($i=1 \sim n-1$)、不均質平板の下面および上面の座標を $x=x_0 (=0), x=x_n (=b)$ とする。温度条件として、初期温度が零度(基準温度)であり、板の上面 ($x=x_n$) が $T=T_0$ (一定温度)の媒体により相対熱伝達率 h_n で非定常加熱され、かつ、板の下面 ($x=x_0$) が零度の媒体へ相対熱伝達率 h_1 で放熱される場合を想定する。まず、次式で定義される無次元量を導入する。

$$\left. \begin{aligned} \bar{T}_i &= T_i/T_0, \quad \bar{x}_i = x_i/x_0, \quad \bar{\lambda}_i = \lambda_i/\lambda_0 \\ \tau &= x_0 t/b^2, \quad (\bar{x}_i, \bar{x}, \bar{T}_i) = (x_i, x, l_i)/b \\ \bar{c}_i &= c_i/c_0, \quad \bar{\rho}_i = \rho_i/\rho_0, \quad (\bar{h}_1, \bar{h}_n) = b(h_1, h_n) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2)$$

ただし、 $x_0, \lambda_0, c_0, \rho_0$ は基準となる物性値である。

上述の温度境界条件のもとで、層状平板の非定常熱伝導問題に関する基礎方程式系、すなわち基礎方程式、初期条件式、各層の界面での温度と熱流に関する連続条件および境界条件は、以下のように無次元表示され

る。

$$\frac{\partial \bar{T}_i}{\partial \tau} = \bar{x}_i \frac{\partial^2 \bar{T}_i}{\partial \bar{x}^2}; \quad i=1 \sim n \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\tau=0; \quad \bar{T}_i=0; \quad i=1 \sim n \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= \bar{x}_i; \quad \bar{T}_i = \bar{T}_{i+1}; \quad i=1 \sim (n-1) \\ \bar{x} &= \bar{x}_i; \quad \bar{\lambda}_i \frac{\partial \bar{T}_i}{\partial \bar{x}} = \bar{\lambda}_{i+1} \frac{\partial \bar{T}_{i+1}}{\partial \bar{x}}; \quad i=1 \sim (n-1) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= 0; \quad \frac{\partial \bar{T}_1}{\partial \bar{x}} - \bar{h}_1 \bar{T}_1 = 0 \\ \bar{x} &= 1; \quad \frac{\partial \bar{T}_n}{\partial \bar{x}} + \bar{h}_n \bar{T}_n = \bar{h}_n \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (6)$$

基礎方程式(3)を条件式(4)～(6)のもとで、 τ に関するラプラス変換を用いて解く。ラプラス変換パラメータを s 、像関数に記号(*)をつけて表す。初期条件式(4)を考慮すれば、式(3)よりラプラス像空間での解は

$$\bar{T}_i^* = A_i \cos(\beta_i \bar{x}) + B_i \sin(\beta_i \bar{x}); \quad i=1 \sim n \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\beta_i = (-s/\bar{x}_i)^{1/2} \quad \dots\dots\dots (8)$$

式(7)において、定数 A_i, B_i ($i=1 \sim n$) は、条件式(5)、(6)より、 $2n$ 元連立方程式の解として決定される。この連立方程式系を

$$[A_{ij}]\{x_j\} = \{C_i\}; \quad i, j=1 \sim 2n \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\{x_j\} = \{A_1, B_1, A_2, B_2, \dots, A_n, B_n\}^T \quad \dots\dots\dots (10)$$

と表示し、係数マトリックス $[A_{ij}]$ 、および定数ベクトル $\{C_i\}$ のうち、零でない成分を表せば

$$\left. \begin{aligned} A_{2i-1, 2i-1} &= \cos(\beta_i \bar{x}_i) \\ A_{2i-1, 2i} &= \sin(\beta_i \bar{x}_i) \\ A_{2i-1, 2i+1} &= -\cos(\beta_{i+1} \bar{x}_i) \\ A_{2i-1, 2i+2} &= -\sin(\beta_{i+1} \bar{x}_i) \\ A_{2i, 2i-1} &= -\bar{\lambda}_i \beta_i \sin(\beta_i \bar{x}_i), \quad A_{2i, 2i} = \bar{\lambda}_i \beta_i \cos(\beta_i \bar{x}_i) \\ A_{2i, 2i+1} &= \bar{\lambda}_{i+1} \beta_{i+1} \sin(\beta_{i+1} \bar{x}_i) \\ A_{2i, 2i+2} &= -\bar{\lambda}_{i+1} \beta_{i+1} \cos(\beta_{i+1} \bar{x}_i) \\ &\quad ; \quad i=1 \sim n-1 \\ A_{2n-1, 1} &= -\bar{h}_1, \quad A_{2n-1, 2} = \beta_1 \\ A_{2n, 2n-1} &= -\sin(\beta_n) + \frac{\bar{h}_n}{\beta_n} \cos(\beta_n) \\ A_{2n, 2n} &= \cos(\beta_n) + \frac{\bar{h}_n}{\beta_n} \sin(\beta_n), \quad C_{2n} = \frac{\bar{h}_n}{\beta_n} \cdot \frac{1}{s} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (11)$$

連立方程式(9)を前報⁽¹⁾で述べた手法により解析的に解く。すなわち、三角関数の関数特性に注目して演算すれば、未定定数 A_i, B_i を次式に示すような形で求めることができる。

$$\left. \begin{aligned} A_i &= -\bar{\gamma}(1) \cdot \frac{\sqrt{\bar{x}_n}}{\bar{\lambda}_n} \cdot \frac{1}{q^3 \mathcal{A}(q)} \\ B_i &= \bar{\gamma}(0) \cdot \frac{\sqrt{\bar{x}_1}}{\bar{\lambda}_1} \cdot \frac{1}{q} A_i \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\begin{aligned} \Delta(q) = & \frac{1}{2^n} \sum_{m(1)=1}^2 \sum_{m(2)=1}^2 \cdots \sum_{m(n)=1}^2 \left[\prod_{i=1}^{n-1} (\Lambda_{i/(i+1)} \alpha_{m(i)} \alpha_{m(i+1)} + 1) \right] \left\{ -\alpha_{m(n)} \sin \left(q \sum_{j=1}^n \alpha_{m(j)} \eta_j \right) \right. \\ & + \bar{\gamma}(1) \frac{\sqrt{\bar{x}_n}}{\bar{\lambda}_n} \cdot \frac{1}{q} \cos \left(q \sum_{j=1}^n \alpha_{m(j)} \eta_j \right) \left. + \bar{\gamma}(0) \frac{\sqrt{\bar{x}_1}}{\bar{\lambda}_1} \cdot \frac{1}{q} \prod_{i=1}^{n-1} (\Lambda_{i/(i+1)} + \alpha_{m(i)} \alpha_{m(i+1)}) \right. \\ & \times \left. \left\{ \cos \left(q \sum_{j=1}^n \alpha_{m(j)} \eta_j \right) + \bar{\gamma}(1) \frac{\sqrt{\bar{x}_n}}{\bar{\lambda}_n} \cdot \frac{1}{q} \alpha_{m(n)} \sin \left(q \sum_{j=1}^n \alpha_{m(j)} \eta_j \right) \right\} \right\} \cdots \cdots \cdots (13) \end{aligned}$$

ただし、上式(13)において

$$\left. \begin{aligned} q^2 = -s, \quad \eta_i = \bar{l}_i / \sqrt{\bar{x}_i}, \quad \bar{\gamma}(0) = \bar{h}_1 \bar{\lambda}_1, \quad \bar{\gamma}(1) = \bar{h}_n \bar{\lambda}_n \\ \Lambda_{i/(i+1)} = \Lambda_i / \Lambda_{i+1}, \quad \Lambda_i = \sqrt{\bar{x}_i} \bar{c}_i \bar{\rho}_i, \quad \alpha_{m(i)} = \begin{cases} +1; & m(i)=1 \\ -1; & m(i)=2 \end{cases} \end{aligned} \right\} \cdots \cdots \cdots (14)$$

なお、式(14)中の $\bar{\gamma}(0)$, $\bar{\gamma}(1)$ は平板の下面 ($\bar{x}=0$), 上面 ($\bar{x}=1$) での熱伝達率 ($\gamma=\lambda h$) の無次元表示を意味する。さらに、残りの未定数 $A_i, B_i (i=2 \sim n)$ については、式(12)を用いて、連立方程式(9)より漸化式の関係を用いて定式化することができる。したがって、得られたラプラス像空間での温度解 $\bar{T}_k^*$ を表せば

$$\bar{T}_k^*(\bar{x}, s) = -\frac{1}{q^2 \Delta(q)} F_k(\bar{x}, q); \quad k=1 \sim n \cdots \cdots \cdots (15)$$

$$\left. \begin{aligned} F_1(\bar{x}, q) &= \bar{\gamma}(1) \frac{\sqrt{\bar{x}_n}}{\bar{\lambda}_n} \cdot \frac{1}{q} \left\{ \cos(q \eta_1 \delta_1) + \bar{\gamma}(0) \frac{\sqrt{\bar{x}_1}}{\bar{\lambda}_1} \cdot \frac{1}{q} \sin(q \eta_1 \delta_1) \right\} \\ F_k(\bar{x}, q) &= \bar{\gamma}(1) \frac{\sqrt{\bar{x}_n}}{\bar{\lambda}_n} \cdot \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{2^k} \sum_{m(1)=1}^2 \sum_{m(2)=1}^2 \cdots \sum_{m(k)=1}^2 \left[\prod_{i=1}^{k-1} (\Lambda_{i/(i+1)} \alpha_{m(i)} \alpha_{m(i+1)} + 1) \cos \left\{ q \left(\sum_{j=1}^{k-1} \alpha_{m(j)} \eta_j + \alpha_{m(k)} \eta_k \delta_k \right) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \bar{\gamma}(0) \frac{\sqrt{\bar{x}_1}}{\bar{\lambda}_1} \cdot \frac{1}{q} \alpha_{m(k)} \prod_{i=1}^{k-1} (\Lambda_{i/(i+1)} + \alpha_{m(i)} \alpha_{m(i+1)}) \times \sin \left\{ q \left(\sum_{j=1}^{k-1} \alpha_{m(j)} \eta_j + \alpha_{m(k)} \eta_k \delta_k \right) \right\} \right]; \quad k=2 \sim n \end{aligned} \right\} \cdots \cdots \cdots (16)$$

ただし、

$$\delta_i = (\bar{x} - \bar{x}_{i-1}) / \bar{l}_i \quad (\bar{x}_{i-1} \leq \bar{x} \leq \bar{x}_i); \quad i=1 \sim n \cdots \cdots \cdots (17)$$

次に、式(15)に対して留数定理を用いてラプラス逆変換を行えば、層状平板の温度解 $\bar{T}_k$ が求められ、次式のように表される。

$$\bar{T}_k(\bar{x}, \tau) = \frac{F_k^s(\bar{x})}{D} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 \exp(-q_m^2 \tau)}{q_m \Delta'(q_m)} F_k^u(\bar{x}, q_m); \quad k=1 \sim n \cdots \cdots \cdots (18)$$

$$\left. \begin{aligned} F_1^s(\bar{x}) &= \bar{l}_1 \delta_1 / \bar{\lambda}_1 + 1 / \bar{\gamma}(0), \quad F_k^s(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{k-1} (\bar{l}_i / \bar{\lambda}_i) + \bar{l}_k \delta_k / \bar{\lambda}_k + 1 / \bar{\gamma}(0); \quad k=2 \sim n \\ D &= \sum_{i=1}^n (\bar{l}_i / \bar{\lambda}_i) + 1 / \bar{\gamma}(0) + 1 / \bar{\gamma}(1), \quad F_k^u(\bar{x}, q_m) = F_k(\bar{x}, q_m); \quad k=1 \sim n, \quad \Delta'(q_m) = \frac{d\Delta(q)}{dq} \Big|_{q=q_m} \end{aligned} \right\} \cdots \cdots \cdots (19)$$

また、固有値 q_m は次式を満たす m 番目の正根である。

$$\Delta(q) = 0 \cdots \cdots \cdots (20)$$

2・1・2 不均質平板の温度解 2・1・1 項で導いた層状平板の温度解に対して、層数 n を無限に多くとることに
より、物性値 $\bar{\lambda}_i, \bar{x}_i$ が連続的にかつ任意に変化する不均質平板の温度解を近似的に求めることができる。そこで、式
(18), (19)において、 $\bar{\lambda}_i, \eta_i$ および $\Lambda_{i/(i+1)}$ を含む項について $n \rightarrow \infty$ の場合の極限操作を行う。まず、 $i+1$ 番目の層
の関数値を Λ_{i+1} , その距離を Δx とし、 Λ_{i+1} をテイラー展開し、その第一近似をとれば

$$\Lambda_{i/(i+1)} = 1 + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left\{ \ln \left(\frac{\sqrt{\bar{x}_i}}{\bar{\lambda}_i} \right) \right\} \Delta x \cdots \cdots \cdots (21)$$

上式の関係を用いれば、 $\Lambda_{i/(i+1)}$ を含む項に対して次式のように変形することができる。

$$\begin{aligned} F_k^u(\bar{x}, q_m) &= \bar{\gamma}(1) \frac{\sqrt{\bar{x}_n}}{\bar{\lambda}_n} \cdot \frac{1}{q_m} \left[\cos \left\{ q_m \left(\sum_{j=1}^{k-1} \eta_j + \eta_k \delta_k \right) \right\} + \bar{\gamma}(0) \frac{\sqrt{\bar{x}_1}}{\bar{\lambda}_1} \cdot \frac{1}{q_m} \sin \left\{ q_m \left(\sum_{j=1}^{k-1} \eta_j + \eta_k \delta_k \right) \right\} \right. \\ &\quad - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left\{ \ln \left(\frac{\sqrt{\bar{x}_i}}{\bar{\lambda}_i} \right) \right\} \Delta x \left[\sin \left(q_m \sum_{j=1}^i \eta_j \right) \sin \left\{ q_m \left(\sum_{j=i+1}^{k-1} \eta_j + \eta_k \delta_k \right) \right\} \right. \\ &\quad \left. \left. - \bar{\gamma}(0) \frac{\sqrt{\bar{x}_1}}{\bar{\lambda}_1} \cdot \frac{1}{q_m} \cos \left(q_m \sum_{j=1}^i \eta_j \right) \sin \left\{ q_m \left(\sum_{j=i+1}^{k-1} \eta_j + \eta_k \delta_k \right) \right\} \right] \right]; \quad k=2 \sim n \cdots \cdots \cdots (22) \\ \Delta(q) &= -\sin \left(q \sum_{j=1}^n \eta_j \right) + \bar{\gamma}(1) \frac{\sqrt{\bar{x}_n}}{\bar{\lambda}_n} \cdot \frac{1}{q} \cos \left(q \sum_{j=1}^n \eta_j \right) + \bar{\gamma}(0) \frac{\sqrt{\bar{x}_1}}{\bar{\lambda}_1} \cdot \frac{1}{q} \left\{ \cos \left(q \sum_{j=1}^n \eta_j \right) + \bar{\gamma}(1) \frac{\sqrt{\bar{x}_n}}{\bar{\lambda}_n} \cdot \frac{1}{q} \sin \left(q \sum_{j=1}^n \eta_j \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left\{ \ln \left(\frac{\sqrt{\bar{x}_i}}{\bar{\lambda}_i} \right) \right\} \Delta \bar{x} \left[-\sin \left(q \sum_{j=1}^i \eta_j \right) \cos \left(q \sum_{j=i+1}^n \eta_j \right) - \bar{\gamma}(1) \frac{\sqrt{\bar{x}_n}}{\bar{\lambda}_n} \cdot \frac{1}{q} \sin \left(q \sum_{j=1}^i \eta_j \right) \sin \left(q \sum_{j=i+1}^n \eta_j \right) \right. \\
& \left. + \bar{\gamma}(0) \frac{\sqrt{\bar{x}_1}}{\bar{\lambda}_1} \cdot \frac{1}{q} \left\{ \cos \left(q \sum_{j=1}^i \eta_j \right) \cos \left(q \sum_{j=i+1}^n \eta_j \right) + \bar{\gamma}(1) \frac{\sqrt{\bar{x}_n}}{\bar{\lambda}_n} \cdot \frac{1}{q} \cos \left(q \sum_{j=1}^i \eta_j \right) \sin \left(q \sum_{j=i+1}^n \eta_j \right) \right\} \right] \dots \dots \dots (23)
\end{aligned}$$

ここで、式(19)、(22)、(23)を $n \rightarrow \infty$ の場合について考える。連続的に変化する物性値として、熱伝導率、温度伝導率を、それぞれ、 $\bar{\lambda}(\bar{x})$ 、 $\bar{\kappa}(\bar{x})$ とすると

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\bar{\lambda}_i}{\bar{\lambda}_i} \right) = \int_0^1 \frac{d\xi}{\bar{\lambda}(\xi)}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\bar{\lambda}_1 \delta_1}{\bar{\lambda}_1}, \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\bar{\lambda}_i}{\bar{\lambda}_i} + \frac{\bar{\lambda}_n \delta_n}{\bar{\lambda}_n} \right) = \int_0^1 \frac{d\xi}{\bar{\lambda}(\xi)} \\
& \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\eta_1 \delta_1, \sum_{i=1}^{n-1} \eta_i + \eta_n \delta_n \right) = \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{\bar{\kappa}(\xi)}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left\{ \ln \left(\frac{\sqrt{\bar{x}_i}}{\bar{\lambda}_i} \right) \right\} = \frac{\bar{\lambda}(\xi)}{\sqrt{\bar{\kappa}(\xi)}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\sqrt{\bar{\kappa}(\xi)}}{\bar{\lambda}(\xi)} \right) \dots \dots \dots (24)
\end{aligned}$$

上式の関係を用いて不均質平板の温度解を求めれば、

$$\bar{T}(\bar{x}, \tau) = \frac{F^s(\bar{x})}{D} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 \exp(-q_m^2 \tau)}{q_m D'(q_m)} F^u(\bar{x}, q_m) \dots \dots \dots (25)$$

$$F^s(\bar{x}) = \int_0^1 \frac{d\xi}{\bar{\lambda}(\xi)} + \frac{1}{\bar{\gamma}(0)}, \quad D = \int_0^1 \frac{d\xi}{\bar{\lambda}(\xi)} + \frac{1}{\bar{\gamma}(0)} + \frac{1}{\bar{\gamma}(1)} \dots \dots \dots (26)$$

$$\begin{aligned}
F^u(\bar{x}, q_m) &= \bar{\gamma}(1) \frac{\sqrt{\bar{\kappa}(1)}}{\bar{\lambda}(1)} \cdot \frac{1}{q_m} \left\{ \cos \left(q_m \int_0^{\bar{x}} \frac{d\xi}{\sqrt{\bar{\kappa}(\xi)}} \right) + \bar{\gamma}(0) \frac{\sqrt{\bar{\kappa}(0)}}{\bar{\lambda}(0)} \cdot \frac{1}{q_m} \sin \left(q_m \int_0^{\bar{x}} \frac{d\xi}{\sqrt{\bar{\kappa}(\xi)}} \right) \right\} - \bar{\gamma}(1) \frac{\sqrt{\bar{\kappa}(1)}}{\bar{\lambda}(1)} \\
&\times \frac{1}{q_m} \int_0^{\bar{x}} \left[\frac{\bar{\lambda}(\xi)}{\sqrt{\bar{\kappa}(\xi)}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\sqrt{\bar{\kappa}(\xi)}}{\bar{\lambda}(\xi)} \right) \right] \left\{ \sin \left(q_m \int_0^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{\bar{\kappa}(\xi)}} \right) \sin \left(q_m \int_{\xi}^{\bar{x}} \frac{d\xi}{\sqrt{\bar{\kappa}(\xi)}} \right) \right. \\
&\left. - \bar{\gamma}(0) \frac{\sqrt{\bar{\kappa}(0)}}{\bar{\lambda}(0)} \cdot \frac{1}{q_m} \cos \left(q_m \int_0^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{\bar{\kappa}(\xi)}} \right) \sin \left(q_m \int_{\xi}^{\bar{x}} \frac{d\xi}{\sqrt{\bar{\kappa}(\xi)}} \right) \right\} d\xi \dots \dots \dots (27)
\end{aligned}$$

$$D'(q_m) = \frac{d}{dq} \{ \Delta(q) \} |_{q=q_m} \dots \dots \dots (28)$$

$$\begin{aligned}
\Delta(q) &= -\sin \left(q \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{\bar{\kappa}(\xi)}} \right) + \bar{\gamma}(1) \frac{\sqrt{\bar{\kappa}(1)}}{\bar{\lambda}(1)} \cdot \frac{1}{q} \cos \left(q \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{\bar{\kappa}(\xi)}} \right) + \bar{\gamma}(0) \frac{\sqrt{\bar{\kappa}(0)}}{\bar{\lambda}(0)} \cdot \frac{1}{q} \left\{ \cos \left(q \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{\bar{\kappa}(\xi)}} \right) \right. \\
&+ \bar{\gamma}(1) \frac{\sqrt{\bar{\kappa}(1)}}{\bar{\lambda}(1)} \cdot \frac{1}{q} \sin \left(q \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{\bar{\kappa}(\xi)}} \right) \left. \right\} + \int_0^1 \frac{\bar{\lambda}(\xi)}{\sqrt{\bar{\kappa}(\xi)}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\sqrt{\bar{\kappa}(\xi)}}{\bar{\lambda}(\xi)} \right) \\
&\times \left[-\sin \left(q \int_0^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{\bar{\kappa}(\xi)}} \right) \cos \left(q \int_{\xi}^1 \frac{d\xi}{\sqrt{\bar{\kappa}(\xi)}} \right) - \bar{\gamma}(1) \frac{\sqrt{\bar{\kappa}(1)}}{\bar{\lambda}(1)} \cdot \frac{1}{q} \sin \left(q \int_0^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{\bar{\kappa}(\xi)}} \right) \sin \left(q \int_{\xi}^1 \frac{d\xi}{\sqrt{\bar{\kappa}(\xi)}} \right) \right. \\
&+ \bar{\gamma}(0) \frac{\sqrt{\bar{\kappa}(0)}}{\bar{\lambda}(0)} \cdot \frac{1}{q} \left\{ \cos \left(q \int_0^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{\bar{\kappa}(\xi)}} \right) \cos \left(q \int_{\xi}^1 \frac{d\xi}{\sqrt{\bar{\kappa}(\xi)}} \right) \right. \\
&\left. \left. + \bar{\gamma}(1) \frac{\sqrt{\bar{\kappa}(1)}}{\bar{\lambda}(1)} \cdot \frac{1}{q} \cos \left(q \int_0^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{\bar{\kappa}(\xi)}} \right) \sin \left(q \int_{\xi}^1 \frac{d\xi}{\sqrt{\bar{\kappa}(\xi)}} \right) \right\} \right] d\xi \dots \dots \dots (29)
\end{aligned}$$

ただし、固有値 q_m は、式(29)で示される $\Delta(q)$ を零とする m 番めの正根である。また、式(25)～(29)で示されるように、不均質平板の温度解は熱伝導率および温度伝導率の領域積分と上下両表面上での熱伝達率により表されていることがわかる。さらにこの温度解において、板の両表面上での無次元熱伝達率 $\bar{\gamma}(0)$ 、 $\bar{\gamma}(1)$ の

極限を考えることにより、前報⁽¹⁾で示した温度境界条件 ($\bar{x}=1$; $\bar{T}=1$, $\bar{x}=0$; $\bar{T}=0/\partial \bar{T}/\partial \bar{x}=0$) の場合の解が導かれることも確認できる。

2・2 熱応力解析 2・1節で導いた不均質平板の一次元非定常温度解により、平板に生じる熱応力分布を求める。前報⁽¹⁾での解析モデルと同じく、平板には外力が作用せず、平板の面内方向 ($y-z$ 面内) について等方性であるとすれば、熱負荷 $\bar{T}(\bar{x}, \tau)$ により生じる熱応力成分 σ_{yy} ($=\sigma_{zz}$) の無次元表示は

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{yy}(\bar{x}, \tau) &= \frac{\bar{E}(\bar{x})}{1-\nu(\bar{x})} \\
&\times \left\{ \frac{(C_2 D_0 - C_1 D_1) + (-C_1 D_0 + C_0 D_1) \bar{x}}{C_0 C_2 - C_1^2} \right. \\
&\left. - \bar{\alpha}(\bar{x}) \bar{T}(\bar{x}, \tau) \right\} \dots \dots \dots (30)
\end{aligned}$$

ただし

Table 1 Material properties of zirconium oxide and titanium alloy

Material properties	ZrO ₂	Ti-6Al-4V
Thermal conductivity λ [W/(mK)]	1.78	6.2
Thermal diffusivity κ [m ² /s]	1.06×10^{-6}	2.61×10^{-6}
Coefficient of thermal linear expansion α [1/K]	8.7×10^{-6}	8.9×10^{-6}
Young's ratio E [GPa]	116.4	105.8
Poisson's ratio ν	0.33	0.22

$$\left. \begin{aligned} C_i &= \int_0^1 \frac{\bar{E}(\xi)}{1-\nu(\xi)} \xi^i d\xi; \quad i=0, 1, 2 \\ D_i &= \int_0^1 \frac{\bar{\alpha}(\xi) \bar{E}(\xi) \bar{T}(\xi, \tau)}{1-\nu(\xi)} \xi^i d\xi; \quad i=0, 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (31)$$

式(30), (31)において, 次式で定義される無次元量を用いた.

$$\bar{\sigma}_{yy} = \sigma_{yy}/(\alpha_0 E_0 T_0), \quad \bar{E} = E(x)/E_0, \quad \bar{\alpha}(\bar{x}) = \alpha(x)/\alpha_0 \dots\dots\dots (32)$$

ただし, $\alpha(x)$, $E(x)$ は不均質平板の線膨張係数および縦弾性係数であり, α_0 , E_0 はそれぞれ基準となる物性

値を意味する.

3. 数値計算例と考察

2章で導いた解析結果を用いて, 実際に数値計算を行った. 数値計算に用いた不均質材料として, 加熱面側が酸化ジルコニア (ZrO_2), 放熱面側がチタン合金 (Al-6 Al-4 V) からなる不均質材料を取り上げた. これらの物性値を表1に示す.

また, 温度分布, 熱応力成分の無次元表示の際に必要な基準物性値 λ_0 , x_0 , α_0 , E_0 として, 金属側, すなわちチタン合金の値を用いた.

数値計算の遂行にあたり, 平板の不均質特性を表すパラメータとして, セラミックス(酸化ジルコニア)と金属(チタン合金)の体積分率 V_c および V_m を, $0 \leq \bar{x} \leq 1$ の範囲で, 次式により表示した.

$$V_m(\bar{x}) = \begin{cases} 1 - \bar{x}^M & ; M \geq 1 \\ (1 - \bar{x})^{1/M} & ; M < 1 \end{cases} \dots\dots\dots (33)$$

$$V_c(\bar{x}) = 1 - V_m(\bar{x})$$

上式(33)において, M は数値パラメータであり, M の変化 ($M=1/20 \sim 20$) による V_m の分布を図2に示す. また, 不均質材料の種々の物性値の推定法については, 確立された手法が見あたらず, 本報では複合則として, 球状分散相が母相内に存在するとして導かれ

Fig. 2 Variation of volume fraction V_m with parameter M

Fig. 3 Temperature change and thermal stress distributions for $\bar{h}(0) = \bar{h}(1) = 1 (M=1)$

Fig. 4 Temperature change and thermal stress distributions for $\bar{h}(0) = \bar{h}(1) = 10 (M=1)$

Fig. 5 Temperature change and thermal stress distributions for $\bar{h}(0) = \bar{h}(1) = 100 (M=1)$

た Kerner 則を主として採用した⁽²⁾。この詳細については、省略する。

まず、式(6)で用いた $\bar{x}=0, 1$ での無次元相対熱伝達率 $\bar{h}_1, \bar{h}_n$ を

$$\bar{h}(0) \equiv \bar{h}_1, \bar{h}(1) \equiv \bar{h}_n \quad \dots\dots\dots (34)$$

と表し、相対熱伝達率の変化に対する熱弾性応答を検討するため、 $\bar{h}(0), \bar{h}(1)$ を

$$\bar{h}(0), \bar{h}(1) = 1, 10, 100 \quad \dots\dots\dots (35)$$

と変化させた場合の温度分布および熱応力分布を図3~5に示す。ただし、材料組成を表すパラメータは $M=1$, すなわち、セラミックスと金属の分率が板厚方向

に関して直線的に変化する場合である。これらの各図より、 $\bar{h}(0), \bar{h}(1)$ が大きくなるとともに加熱側表面 ($\bar{x}=1$) 近傍での温度上昇が大きくなり、逆に放熱側表面 ($\bar{x}=0$) 近傍での温度上昇が低下する。また、本数値計算例は、表1に示したようにチタン合金-ジルコニアセラミックス傾斜機能材料の場合であるが、熱応力分布は加熱および放熱境界面近傍で圧縮応力、平板の中央部で引張応力状態を示し、 $\bar{h}(0), \bar{h}(1)$ が大きくなるに従って、両境界面上での圧縮応力値および中央部での引張応力値が増大し、かつ、これらの圧縮応力値と引張応力値は同程度の大きさとなることがわかる。特

Fig. 6 Temperature change and thermal stress distributions for $M=1/5$ ($h(0)=h(1)=1$)

Fig. 7 Temperature change and thermal stress distributions for $M=5$ ($h(0)=h(1)=1$)

Fig. 8 Variation of maximum temperature change with relative heat transfer $\bar{h}$

Fig. 9 Variation of maximum tensile stress with relative heat transfer $\bar{h}$

Fig. 10 Variation of maximum compressive stress with relative heat transfer $\bar{h}$

に $\bar{h}(0)$, $\bar{h}(1)$ が大きくなるとともに, 加熱境界面上 ($\bar{x}=1$) が生じる圧縮応力の最大値が加熱初期において現れることがわかる。

次に, 材料組成の変化に対する熱弾性応答を検討するため, 材料組成パラメータ M を

$$M=1/5, 5 \dots\dots\dots (36)$$

と変化させた場合の温度分布および熱応力分布を図 6, 7 に示す。ただし, 板の両表面上での無次元相対熱伝達率は, $\bar{h}(0)=\bar{h}(1)=1.0$ の場合である。図 3, 6, 7 の各図より, M が小さい場合, すなわちセラミックスの分率が高い場合, 板の中央部に生じる引張応力値が板の両境界面上に生じる圧縮応力値と同程度の大きさとなるのに対し, M が大きくなるとともに加熱境界面上での圧縮応力値が次第に大きくなる傾向が見られる。

さらに, $\bar{h}(0)$, $\bar{h}(1)$ の変化に対する平板の上表面上での温度変化, 最大引張応力, 最大圧縮応力の分布を, $\bar{h}(0)$, $\bar{h}(1)$ を横軸として図 8~10 に示す。図 8 は, 加熱境界面上 ($\bar{x}=1$) での最大温度上昇(定常温度分布)および放熱境界面上 ($\bar{x}=0$) での定常温度分布を, M をパラメータとして示したものであり, M が小さい(セラミックスの分率が高い)場合のほうが大きな温度上昇を示していることがわかる。図 9 は, 板の中央部付近に生じる引張応力の最大値について示したものであり, 材料組成の変化により, その絶対値に大きな差が現れていることがわかる。また, 図 10 は, 加熱および放熱境界面上 ($\bar{x}=1, 0$) に生じる最大圧縮応力値について示したものであり, 図 9 の引張応力分布と比べ, 図 10 に示した圧縮応力値のほうが大きな値を示すが, M の変化に対して, さほど大きな差が現れないことがわかる。

4. 結 言

本研究は板厚方向に関して任意の不均質特性を有する平板の非定常熱伝導・熱応力問題を取扱ったものであり, 板の加熱および放熱境界面上での相対熱伝達率を考慮に入れて理論解析を行い, 数値計算例を示した。

非線形の放物形方程式となる非定常熱伝導の温度解については, 層状近似による解析解を求めた後, 極限操作により完全な不均質体の近似解を導いた。得られた近似解は熱物性値(熱伝導率と温度伝導率)の積分形と両境界面上での熱伝達率を含んだ形で示されることがわかった。さらに, 両境界面上での相対熱伝達率および不均質体の材料組成の変化が温度分布および熱応力分布に及ぼす影響について数値計算結果をもとに検討した。実際問題の場合, 両境界面上における相対熱伝達率が有限値となり, このような場合に対し, 定常状態に至るまでの非定常加熱時に生じる最大引張応力分布および最大圧縮応力分布を定量的に評価した。以上の詳細については, 3 章で記述したとおりである。本研究で得られた理論解析結果は, 熱応力問題において大きな影響を及ぼす物性値の温度依存性をも容易に組込んで評価することが可能であると考えており, これらについては次報で報告の予定である。

文 献

- (1) 谷川義信・赤井富一・笠井輝明, 機論 61 584, A (1995), 607-613.
- (2) Kerner, E. H., *Proc. Phys. Soc. Lond.*, 69, B (1956), 802-813.