反射コースティックス法による円弧切欠きを有する丸棒の 捩じり問題に関する基礎研究*

徐 偉 奇^{*1}, 高 橋 賞^{*2}

Basic Study on the Torsional Problem of Circular Bars with an Arc Groove Using the Reflected Caustics Method

XU Weiqi and Susumu TAKAHASHI

The reflection of a bundle of laser light impinging on the warped cross section of a circular bar with an arc groove subjected to torsional moment forms a characteristic caustic on a screen. In this study, theoretical equations describing this caustic were established, a method measuring this caustic was proposed, and experiments were performed. It was shown that the theoretical curve is in good agreement with the experimentally obtained caustics. As a result, it was shown that the reflected caustics method is also useful for accurate measurement of the twisting angle and the torsional moment of the circular bar with an arc groove.

Key Words: Experimental Stress Analysis, Elasticity, Torsion, Stress-Freezing Technique, Annealing, Caustics Method

1. 緒 言

機械構造部材としてよく用いられるプロペラシャフトやトーションバーのような捩じりを受ける軸の問題を扱う際、単位長さ当たりの捩じれ角（比捩じれ角）や捩じりモーメント等を求めることは極めて重要な問題である。しかし、それらを非接触的な実験的方法により求めることは非常に難しい。

コースティックス法は、比較的簡単な光学装置を用い、非接触的に測定部分の情報を直接用いる光学的手法で、応力集中部や変形における光の屈折あるいは反射によって形成されるコースティックス像を解析する方法であり、これまで主に静的、或いは動的応力拡大係数の測定または集中荷重のような応力特異場の解析法として様々な問題に適用されてきた。

しかし、近年、この測定法は破壊力学以外の問題へ

の適用がなされている。特にTheocaris⁽¹⁾⁽²⁾によって、コースティックス法が捩じり問題へ適用され、(1) 横弾性係数Gの測定、(2) 捩じれ角の測定、(3) 捩じりモーメントの測定、(4) 捩じり関数 ϕ の推定（正三角形、正四角形）⁽³⁾等にこの方法が有効であることが確認されている。そこでTheocarisは、捩じりを受ける一様断面の円、正三角形、長方形棒をとりあげ、光弾性材料を用いて応力凍結された試験片をスライスし、その応力を解放させることにより得られる表面変形に対して反射型コースティックス法を適用した。また、スクリーン上に形成されたコースティックス像と理論で導かれたコースティックス像を比較し、結果がよく一致することを確認した。本研究では、直交座標系におけるTheocarisによる理論を円柱座標系の場合へ拡張し、円弧状切欠きを有する丸棒の捩じり問題に対するコースティックス理論を導いた。同時にこの実験方法の精度を検討するために、今回提案した円弧状切欠きを有する丸棒の捩じり問題に対するコースティックス理論を適用した実験により得られた比捩じれ角と三次元測定機により測定した比捩じれ角を比較し、検討した。

* 原稿受付 1995 年 2 月 23 日。

*¹ 関東学院大学大学院 (〒236 横浜市長沢区六浦町 4834)。

*² 正員、関東学院大学工学部。

2. 理 論

2.1 一様断面棒の捩じりの理論⁽⁴⁾ 一般に一様断面棒は捩じられると、その横断面はわん曲する。このようなわん曲をWarpingという。

Fig.1 Torsion of Straight Bars

図1のように、横断面内に x, y をとると、 x, y 方向変位 u, v は中心からの距離に比例し、 z 軸方向変位 w は弾性基礎式を満足するように決定される。即ち一様断面の棒を捩じれば、変形は軸方向に一樣であるから u, v は z に比例し、比捩じれ角を ω とすれば式(1)のように表示される。

$$u = -\omega yz, \quad v = \omega xz, \quad w = \omega \varphi(x, y) \quad (1)$$

ここで $\varphi(x, y)$ は捩じり関数である。

捩じり関数 φ とその共役関数 ψ はともに調和関数で、それらの間にはコーシー・リーマンの関係式(2)が成立する。

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2)$$

Fig.2 Cross section of circular bar with a arc groove

円弧状切欠きをもつ丸棒の捩じり共役関数は次式で与えられる。

$$\psi = \arccos \theta + \frac{b^2}{2} - ab^2 \frac{\cos \theta}{r} \quad (3)$$

ここで、 a は丸棒の半径で、 b は円弧状切欠きの半径である。

2.2 捩じり問題のコースティックス法の理論 反射型コースティックス法の基本原理を図3に示す。エポキシ樹脂などの高分子材料の試験片を用いて捩じりトルクを与え、応力凍結された試験片をスライスし、表面を平滑に仕上げ応力凍結時と同一のサイクルでアニーリング後に、スライス片に光を入射させる状態を考える。スライス片の表面には変形が生じているために入射した光の行路程が変化し、光の方向が曲げられ、その結果としてスクリーン上に光が集中する領域が生ずる。光の集中部が火線(Caustic Curve)と呼ばれ、スクリーン上のこの像をコースティックス(Caustics)像と呼んでいる。このコースティックス像の大きさあるいは形状などから、捩じり問題では、比捩じれ角の値と捩じりモーメント等を求めることができる。

Fig.3 Fundamental schematic of reflected caustics method

反射型コースティックス法を用いる場合には、図3のように試験片上の一点 $p(x, y)$ で反射する光線について考える。スクリーン上における座標軸で、その光位置 $P(X, Y)$ は次式で与えられる。

$$X = \lambda x - 2Z_0 \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \quad (4a)$$

$$Y = \lambda y - 2Z_0 \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \quad (4b)$$

ここで、 λ は光線の投影倍率で、次式で定義される。

$$\lambda = \frac{(Z_0 + Z_i)}{Z_i} \quad (5)$$

Z_0 は試験片とスクリーンの距離で、 Z_i は焦点の位置と試験片の距離である。

スクリーン上で物体と光は一対一の対応ではなく、

数学的には特異点の存在と対応しており、そのような状態が存在するための条件は式(6)の示すようにヤコビアン行列式がゼロになることである。

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial \alpha} & \frac{\partial X}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial Y}{\partial \alpha} & \frac{\partial Y}{\partial \gamma} \end{vmatrix} = 0 \quad (6)$$

式(1), (2)と(4)を上式に代入すれば、次式のように表される。

$$1 + \left(\frac{2Z_0\omega}{\lambda} \right)^2 \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \gamma^2} - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha \partial \gamma} \right)^2 \right] = 0 \quad (7)$$

上式より求まる x, y を式(4)に代入すると、スクリーン上に形成されるコースティックス像を求めることができる。ここで x, y はコースティックス像を形成する光が物体上のどの位置から来るかを示すもので、これを初期曲線(Initial Curve)と呼んでいる。

2・3 円弧状切欠きをもつ丸棒のコースティックス像 式(3)で示した円柱座標での関数 ψ では、その微分を直角座標に変換すれば、次のようになる。

$$\frac{\partial \psi}{\partial \alpha} = \cos \theta \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = a + ab^2 \frac{\cos 2\theta}{r^2} \quad (8a)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \gamma} = \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = ab^2 \frac{\sin 2\theta}{r^2} \quad (8b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha^2} &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{\sin 2\theta}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\sin 2\theta}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ &+ \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = -2ab^2 \frac{\cos 3\theta}{r^3} \end{aligned} \quad (9a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \gamma^2} &= \sin^2 \theta \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\sin 2\theta}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} - \frac{\sin 2\theta}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ &+ \frac{\cos^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 2ab^2 \frac{\cos 3\theta}{r^3} \end{aligned} \quad (9b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha \partial \gamma} &= \frac{\sin 2\theta}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{\sin 2\theta}{2r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\cos 2\theta}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} \\ &- \frac{\cos 2\theta}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{\sin 2\theta}{2r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = -2ab^2 \frac{\sin 3\theta}{r^3} \end{aligned} \quad (9c)$$

式(9)を式(7)に代入し、 r について解くと、次式のようになる。

$$r = \left(\frac{4ab^2 Z_0 \omega}{\lambda} \right)^{\frac{1}{3}} \equiv r_0 \quad (10)$$

この r が初期曲線 r_0 となる。よって、この半径 r_0 の円周から反射光がスクリーン上に形成するコースティックス像の形状は式(1), (4), (8), (10)より次式で表すことができる。

$$X = \lambda r_0 \cos \theta - \lambda r_0 \frac{\sin 2\theta}{2} \quad (11a)$$

$$Y = \lambda r_0 \sin \theta + \lambda r_0 \frac{\cos 2\theta}{2} + 2Z_0 \omega a \quad (11b)$$

Fig.4 Shape of caustics image

図4は、式(11)により得られるコースティックス像の形である。式(11)の X, Y は θ に対して微分し、 $\partial X / \partial \theta = 0, \partial Y / \partial \theta = 0$ の条件により、極値点A, Bの座標値が次のように求められる。

A点, $\theta = -\pi/6$

$$X = \frac{3\sqrt{3}}{4} \lambda r_0 \quad (12a)$$

$$Y = -\frac{1}{4} \lambda r_0 + 2Z_0 \omega a \quad (12b)$$

B点, $\theta = \pi/6$

$$X = \frac{\sqrt{3}}{4} \lambda r_0 \quad (13a)$$

$$Y = \frac{3}{4} \lambda r_0 + 2Z_0 \omega a \quad (13b)$$

A, B点 X, Y 方向寸法をそれぞれ $\Delta X, \Delta Y$ とすると、

$$\Delta X = \frac{\sqrt{3}}{2} \lambda r_0 \quad (14a)$$

$$\Delta Y = \lambda r_0 \quad (14b)$$

なる関係が得られる。

式(14)を式(10)に入れ、コースティックス像の寸法 ΔX 、或いは ΔY を測定すれば、比振じれ角の値がただちに得られる。

$$\omega = \frac{2\sqrt{3}\Delta X^3}{9\lambda^2 ab^2 Z_0} \quad (15a)$$

或いは

$$\omega = \frac{\Delta Y^3}{4\lambda^2 ab^2 Z_0} \quad (15b)$$

さらに、振じりモーメントを算定することができる。

$$T = \left[\left(1 - 2\frac{b^2}{a^2} - \frac{b^4}{2a^4} \right) \alpha + \left(\frac{b}{a} + \frac{7}{2} \frac{b^3}{a^3} \right) \frac{\sin \alpha}{2} \right] G \alpha a^4 \quad (16)$$

ただし、 $\left(\cos \alpha = \frac{b}{2a} \right)$

であり、 G は横弾性係数である。

3. 試験片及び実験方法

3.1 試験片 本実験に使用した材料は、エポキシ樹脂CT200に硬化剤HT903を重量比100:30で用いたもので、通常の鋳込み方法により長さ220mm、直径60mmの円柱状に鋳込んだ。

Fig.5 Shape and dimensions of specimen

Fig.6 Photograph of machined specimens

図5に試験片形状を示す。試験片の加工はまず旋盤により長さは200mm、直径は40mmの丸棒を製作した。次に、立フライス盤においてボールエンドミルを使用し、丸棒試験片の軸方向に沿って円弧状切欠きを入れた。丸棒試験片の切欠きの半径は $b=5, 10\text{mm}$ の二種類の試験片を用意した。図6は試験片外観の写真である。

3.2 実験方法 本実験には、通常の静的振じり試験機を使用した。試験片が軸方向の応力を受けないように、その一方を固定、他端の軸方向は自由にして、片側に振じりトルクを負荷した。本実験の応力凍結サイクルは図7に示すように、炉内温度が 125°C に到達してから2時間後に荷重を負荷し、8時間保持した後、 $3^\circ\text{C}/\text{h}$ の温度降下により 35°C まで徐冷した。

Fig.7 Stress-freezing (annealing) cycle

凍結した後の試験片を図8に示す。凍結した後の試験片を軸方向に対して垂直の方向に切り取り、試験片の中央部分を円弧状切欠きに沿って異なる厚さ(3mm-9mm)にスライスした。明瞭なコースティックス像を得るために、スライス片の両面を#2000のエメリーペーパーまで磨いた後、研磨液で平滑に仕上げた。

本実験では2回のアニーリングを実施している。

即ち、1回目のアニーリングはエポキシ樹脂を鋳込む際に高温の 125°C から室温まで温度が降下するためエポキシ樹脂内に熱応力が残る。また、加工する際に切削バイトとエポキシ樹脂との間に圧縮や、摩擦熱などによる様々な加工応力を生じる。これらの応力が内部応力として残る。これらを取り除くため切削加工で仕上がった円弧状切欠きの入った丸棒試験片を再度炉に入れアニーリングを実施した。2回目のアニーリングは、凍結法により振じりトルクが負荷された試験片の応力を解放し、表面変形を起こさせるためにアニーリングを実施した。アニーリングサイクルは、応力凍結サイクルと同一状態で実施された。

表面変形のない状態に仕上げたスライス片を応力凍

結時と同一のサイクルでアニーリングし、凍結した応力を解放させると、スライス片が凍結前の状態に回復し、表面変形が生じる。図9はスライス片の写真である。左のスライス片はアニーリング前のものであり、右のスライス片はアニーリング後のものである。左右のスライス片を比較すると表面変形が現れているのがよくわかる。アニーリング後の試験片にレーザ光線を照射すると、スライス片に表面変形が生じているため、各位置の光線反射方向が変化し、その結果としてスクリーン上にコースティックス像が形成される。

本実験で用いたコースティックス法の光学系を図10に示す。光源にはレーザ(発振出力5mW, He-Neガスレーザー)を使用した。なお撮影したネガフィルム上のコースティックス像の寸法を測定するために基準線として、スクリーンには10mm間隔の平行線を引いたすりガラスを使用した。

Fig.8 Photograph of stress frozen specimen and slices

Fig.9 Photograph of slices
(Left: before annealing
Right: after annealing)

Fig.10 Experimental apparatus of reflected caustics method

4. 実験結果及び考察

図11に本実験で得られた円弧状切欠きをもつ丸棒のコースティックス像写真を示す。なお、比較のため図12に理論式(11)より求めたコースティックス像の光分布図も示す。これより、本実験のコースティックス像と理論図形とは極めてよく一致していることが確かめられた。図4で示すように、X, Y軸と平行に接するコースティックス像との接点をそれぞれ点B, 点Aとする。それぞれの点からX, Y軸に垂直に接線を取り、互いに接する点までの距離を ΔX , ΔY として値を測定した。理論式で導き出した式(15)に値を代入し、比握り角度を算出した。

Fig.11 Experimental caustics image

Fig.12 Theoretical caustics image

実験精度を検定するために、応力凍結した試験片を三次元測定機(Mitutoyo, 倣い精度 $\pm 5 \mu\text{m}$)により比捩じれ角を測定した。図13は、同一投影倍率($\lambda=2.62$)で異なる切欠き半径をもつ丸棒にコースティックス法により求めた比捩じれ角と三次元測定機により測定した比捩じれ角とを比較したものである。

Fig.13 Comparison of specific twisting angle by caustics method with 3D measuring instrument (magnification $\lambda=2.62$)

Fig.14 Comparison of average specific twisting angle by caustics method with 3D measuring instrument (magnification $\lambda=1.0, 1.94, 2.62$)

図14は、切欠き半径 $b=10\text{mm}$ の試験片で異なる投影倍率($\lambda=1.0, 1.94, 2.62$)におけるコースティックス法による平均比捩じれ角と三次元測定機により測定した比捩じれ角とを比較したものである。切欠き半径 $b=10\text{mm}$ の場合には、四個の試験片のコースティックス実験の平均値である平均比捩じれ角の値が、三次元測定機によるその値とよく一致しており、最大誤差10.5%であることが確認された。なお、スクリーン上においてコースティックス像が不明瞭なものや、 ΔX , ΔY が測定不可能なスライス片が数個存在した。これはアニーリ

ングする前のスライス片の両面を平滑に仕上げる過程において表面を一平面にせずに多平面な状態でアニーリングしたためである。表面変形を光学的手法で精密に測定するため小さな変化でもコースティックス像に影響を与えるのである。

5. 結 言

コースティックス法を応力凍結法へ適用して、捩じり応力を凍結した円弧状切欠きを有する丸棒について、反射型コースティックス法より理論的、および実験的に比捩じれ角度を求めること検討した結果、次の事が明らかになった。

(1) 捩じり問題のコースティックス理論を円柱座標の場合へ拡張し、円弧状切欠きを有する丸棒における反射型コースティックス理論式を確立した。具体的には、初期曲線およびコースティックス像の式を導き、コースティックス像を測定する方法を提案した。

(2) 光弾性材料を使って応力凍結法により試験片のスライス片に凍結された応力を解放させ、スライス片上の円弧状切欠きの表面変形について反射型コースティックス法により、その表面にレーザ光を照射させることでコースティックス像が得られ、これより円弧状切欠きの比捩じれ角度を求めることができた。

(3) 本実験で反射型コースティックス法を用いて得られた実験結果と三次元測定機により得られた比捩じれ角度の測定値は、かなりの精度でよく一致していることが明らかになった。

(4) スライス片を切り取った後、アニーリングのみによって捩じれ角度を求めることができ、本実験から、切欠きを有する丸棒の捩じり問題に関する研究には、応力解放によるコースティックス法が容易であり、かつ比較的良好な実験結果が得られることが明らかとなった。

文 献

- (1) P.S.Theocaris, L.Petrou, *ACTA MECHANICA*, **76**, (1989), 133-159
- (2) P.S.Theocaris, *Appl. Optics*, **27-4**, (1988), 780-789
- (3) P.S.Theocaris, *Exp. Mech.*, September, 1989, 285-290,
- (4) 中原, 応用弾性学, (1977), 実教出版社, 111-120
- (5) 呉・ほか2名, 機論, **56-527**, A(1990), 53-58