多次元染色体を用いた GA 法とその構造位相決定問題への応用*

尾田 十八^{*1}, 臼井 隆之^{*2}, 劉 江 林^{*2}Genetic Algorithm Using Multidimensional Chromosome
and Its Applications to Structural Layout Problems

Juhachi ODA, Takayuki USUI and Jianglin LIU

In recent years, genetic algorithms have been used as an optimization technique in various fields. In a genetic algorithm, practical problems are described in terms of chromosomes. Chromosomes in living organisms are made up of double-helix DNA and previous genetic algorithms idealized them as one-dimensional in general. If a problem is subject to complicated restrictions or is originally a matrix type, a multidimensional chromosome is more effective than a one-dimensional chromosome. In this paper, a genetic algorithm using multidimensional chromosomes is proposed and applied to the layout problems of members in a truss structure and ribs in a thin plate structure.

Key Words: Computational Mechanics, Optimum Design, Structural Analysis, Finite Element Method, Genetic Algorithm, Multidimensional Chromosome, Layout Problem

1. 緒言

遺伝的アルゴリズム (Genetic Algorithm: GA) ^{(1),(2)} は, 組合せ最適化問題などの多峰性の強い問題に対して有効であることは確認されており, さまざまな分野で用いられてきている。

ところで, GAではある問題に対して, 最初に染色体と遺伝子型を決定するコーディングを行わなければならない。このコーディングを適切に行わないと, GAは効果的に作用しないことも知られている。実際の生物では, 染色体は二重らせん構造のDNAで構成されており, これまでのGAでは, 一般的にこれを一次元配列として抽象化して用いている。しかし, 種々の問題に対して適切なコーディングを行うには, 必ずしも一次元配列の染色体を用いる必要性もなく, 適用する問題次第では多次元配列の染色体を用いた方が有効な場合も考えられる。そこで本研究では, 多次元配列の染色体を用いたGAを提案し, その具体的手法を魔方陣の決定問題を例に説明する。次に本手法の有効性を検証する立場から, 構造位相決定問題である平面トラス構造の位相決定と, 薄板補強リブの位相決定を行い, それらの結果について考察をする。

2. 多次元染色体を用いたGA法

2.1 多次元染色体 多次元染色体とは, 図1(a)のようにこれまで一般的に一次元配列で表現されていた染色体を, 図1(b)のような二次元以上の配列を用いて表現したものである。このような多次元染色体を用いたGAの利点としては, 以下に示すようなことがあげられる。

(1) 問題の特性が本来マトリクス等の多次元配列で表示されるものに対して, コーディングが容易になる。

(2) 遺伝子間に複雑な制約やある種の規則のある問題に対して, コーディングが容易になる。

(3) (1), (2)の問題に対しての目的関数や制約条件等, 問題の定式化が容易になる。

(4) 後述するブロック単位の交差により, 解空間における大域的な探索が容易に行える。

2.2 ブロック交差 多次元染色体を用いたGAの利点であるブロック単位の交差を二次元配列の染色体を用いて説明する。ブロック交差とは, 図2に示すように多次元配列で示された染色体のあるブロックに注目し, それらを用いて交差をするものである。このようにブロック単位の交差を行うと, 遺伝子間に複雑な制約がある場合でも, その遺伝子間の関係を保ったまま交差が行え, また一次元染色体と比較して, 解空間

* 原稿受付 1995年3月29日。

^{*1} 正員, 金沢大学工学部 (〒920 金沢市小立野2-40-20)。^{*2} 学生員, 金沢大学大学院。

1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

(a) One dimensional chromosome

1	1	1	0	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	1	0	1
0	1	0	1	1	1	0	0	0

(b) Two dimensional chromosome

Fig.1 Example of chromosome

Fig.2 Block crossover

内でのより広範囲で複雑な交差が容易に行えることになる。

2.3 適用方法 多次元染色体を用いたGAの適用方法を、魔方陣問題を例に説明する。魔方陣⁽³⁾とは、図3に示すように $n \times n$ の升目に数を入れて、縦、横、斜め、どの一列の n 個の数の和も一定になるようにしたものである。この n を次数といい、 n が3なら三方阵、4なら四方阵と呼んでいる。このような魔方陣の一列の数の和は、1から n^2 までの数を入れた普通の魔方陣では $n(n^2+1)/2$ である。

さて、このような魔方陣を求めることは、古来より多くの人々に興味を持たれてきたが、今、四方阵を多次元染色体を用いたGAにより求めることを考える。染色体は、当然図3の 4×4 の二次元配列で示せば良く、その遺伝子は、1から16までの数字で、それらの数字は1つずつしかとれないことがコーディングに含めるべき制約条件となる。また、魔方陣の特性としての縦、横、斜めのいずれの列の和も一定になるという条件は、次のような目的関数を決めることによりきわめて容易に示すことができる。

つまり染色体の縦、横、斜めの10個の列の和を a_i とし、その平均値を m として、以下のような a_i と m の残差二乗和を目的関数 W とすると、

$$W = \sum_{i=1}^{10} (m - a_i)^2 \dots \dots \dots (1)$$

これが0になったとき、求めるべき魔方陣が得られることになる。以上のように、二次元染色体は問題自身の特性が本来マトリクス形で示され、かつそれらの遺伝子間に複雑な規則があるような場合、きわめてコーディングが容易となる。

4	11	14	5
13	6	3	12
7	16	9	2
10	1	8	15

Fig.3 Magic square

Fig.4 History of objective function value

さて、上述したようなコーディングのもとで本問題を解く場合、前節で述べたようなブロック単位の交差を用いるが、先に述べたように遺伝子としての1から16までの数字は1個しかとれないので、交差によってこの条件が破られる。しかしこの問題は、通常一次元染色体において用いられている部分写像交差をブロック交差と組み合わせることで解決できる。

このような方法で、人口数50、交差の確率30.0%、突然変異の確率0.8%のパラメータで計算を行った結果が図4に示すものである。ランダムに与えた初期世代から、187世代後に完全な四方阵が求められている。そしてこのようなコーディング方法が、一次元染色体を用いた方法と比較して計算上有効なものであることも確認されている⁽⁴⁾。

3. 構造位相決定問題への応用

トラス構造の部材配置や補強リブ形態決定等の位相決定問題は、本質的に組み合わせ最適化問題である。しかもこれらの問題では、それらの部材配置等に設計

Fig.5 Truss structure

Node

	1	2	3	4	5
Node 1	2	1	0	1	0
Node 2	2	2	1	1	0
Node 3	2	2	2	1	0
Node 4	2	2	2	2	0
Node 5	2	2	2	2	2

Node

Fig.6 Genotype represented by two dimensional chromosome

上の規則や種々の条件の伴う場合が多い。そこで、このような問題に対して多次元染色体を用いることが有効となることを、具体例を通して次に示すことにしたい。

3.1 トラス構造の位相決定問題

3.1.1 コーディング トラス構造の位相決定問題

とは、例えば図5に示す6節点の平面トラスにおいて、その支持点と荷重点を含む空間内に、ある種の設計目的に従って部材をどのように配置したらよいかという問題である。この種の問題は、これまでもGAを用いて幾つか解かれている⁽⁵⁾が、以前の研究では、部材の有無を1と0からなる二進コードの一次元染色体で表現するのみであった。すなわち従来のGAを用いた位相決定では、図5(a)の構造の各部材に対して部材が存在する場合を1、存在しない場合を0とするような二進コード列の一次元染色体を用いている。すると図5(b)の5部材からなる構造は5つのビットが1である「1111000100」で表現される。ここでコードの長さは構造の配置可能総部材数に、ビットの順番は部材に付けた番号に対応している。

一方、多次元染色体を用いたGAでは、染色体を図6に示すような、一辺が節点数である二次元の正方形配列にする。配列の各要素 a_{ij} は、節点 i と節点 j で構成される部材を示し、その部材の有無は一次元染色体と同様に1と0の二進コード列で表す。配列の対角要素 a_{ii} は同じ節点間で構成される部材を示すので、部材の有無には関係しない2の遺伝子を用いる。また、要素 a_{ij} と要素 a_{ji} は同じ部材を示すのでこの配列は対角対称となるが、GA操作上は必要ない左下三角形領域には2の遺伝子を用いる。このような染色体を用いることにより、

Fig.7 Cross line crossover

Fig.8 Layout problem of 15 nodes truss structure

(1) 負荷節点、支持部節点、その他の節点等を区別することができる。

(2) 節点間を継ぐ部材やある節点に存在すべき部材などをあらかじめ指定できる。

例えば、ある節点に関する行と列の1のビットの数を数えることにより、その節点に存在する部材数が容易に求められるので、支持部節点等に配置する部材数をあらかじめ規定することなど、設計上の要求を考慮した位相決定が行えることになる。

一方、このような染色体を用いた場合の交差は図7に示すように、配列の任意の要素 a_{ij} を選択し、 i 行と j 列の十字型のブロックで遺伝子の交換を行うことで、配列の右上三角形領域のみという染色体の特殊性を利用した複雑な交差が行える。

3.1.2 設計モデル 今、図8に示すような15節点からなる平面トラス構造で、節点2、3、4に垂直荷重 P が作用する設計モデルを考える。部材の諸量は、ヤング率206GPa、密度7870kg/mm³、断面積230mm²で許容応力は245MPaとした。このトラス構造において、各部材が許容応力を満たしつつ重量を最小にするような部材を配置する。つまり、以下のような目的関数を最

Fig.9 History of objective function value

Fig.10 Change of truss layout

小にするような位相を決定することを考える。

$$W = \sum_{i=1}^{105} (AL_i \rho + r |\sigma_a - \sigma_i|^2) \rightarrow \text{Minimum} \quad \dots\dots\dots (2)$$

ただし、 A : 部材断面積、 L_i : 部材長さ、 ρ : 密度

σ_a : 許容応力、 σ_i : 部材応力、 r : 重み係数

式(2)の目的関数のシグマの中の第2項は罰金関数項で、部材の応力が許容応力を越えた場合にのみ付加される。さて、このモデルにおいて、荷重点2, 3, 4に2部材以上、支持点1, 5に1部材以上、節点8, 12, 14に2部材以上配置するという制約条件をあらかじめ与えることにする。つまり、荷重点、支持点に関する制約条件は、位相決定において構造を成すための

Fig.11 Thin square plate with outside load

最低条件であり、節点8, 12, 14に与えた条件は構造物の高さなど形状規定に関して適当に与えたものである。これらは二次元染色体を用いることにより制約が課された節点の部材数を知ることによって容易に満足させることができる。つまりFEM解析を行う前に制約条件を満足していない染色体は容易に除くことができる。また、計算においては構造は左右対称の位相に限定した。

3・1・3 計算結果と考察 計算に用いたパラメータは、人口数100、交差の確率30.0%、突然変異の確率0.1%である。この計算では、局所解からの脱出のために20世代を経過しても最良解が更新されない場合には、個体集団で適応度の優れたものの上位10を残して、他の個体を新たに発生させ、個体集団の活性化を計った。この個体集団の入れ換えを3回行った後、20世代を経過しても最良解が更新されない場合に計算を終了させた。図9に世代の経過にともなう目的関数の最小値の変化、図10に世代の経過にともなう位相の変化の様子を示す。図のように、第213世代目に応力制約と与えた節点に関する制約を満足した最小重量に近いと思われる位相が得られた。

3・2 薄板補強リブの位相決定問題

3・2・1 コーディング 図11に示すような正方形板がその中心に面外集中荷重を受けるとき、薄板の2面に対称リブを付けることで、その最大変位を最小にする問題を考える。今、リブを形成する上で、次のような2つの制約条件を設定しよう。

(1) リブとなる要素(具体的にはその要素の板厚のみを厚くするが、以後これをリブ要素と呼ぶ)、その数がある値を超えない。

(2) 図12(b)のような隣接する4つの要素全てを、同時にリブ要素とはしない。

(1)の制約条件はリブ体積を規定するものであり、後の計算例ではリブ要素数を全要素の4分の1と2分の1以下に設定している。また(2)の制約条件は、リブ要素の集合化により、リブ形態でなくなることを防止するものである。

(a) Examples of good condition (b) Bad condition

Fig.12 Rib arrangement condition

Offspring 1	Offspring 1
1 1 0 1 0 0 1 1	1 1 0 1 0 0 1 1
0 0 1 1 1 0 0 1	0 0 1 1 1 0 0 1
0 0 0 1 0 1 1 1	0 0 0 1 0 1 1 1
1 0 0 0 0 0 0 0	1 0 0 0 0 0 0 0
1 1 1 0 1 1 1 0	1 1 1 0 1 0 1 0
0 1 0 1 0 1 1 1	0 1 0 1 0 1 1 1
0 1 0 0 0 1 0 0	0 1 0 0 0 1 0 0
1 1 1 0 1 1 0 1	1 1 1 0 1 1 0 1

Fig.13 Changing of offspring chromosome

Fig.14 Checking system of chromosome

さて、この種の問題を解くのに、ここでは解析モデル（板の1/4領域）を 8×8 の64要素に分割し、これを図13に示すような 8×8 の二次元染色体と考え、かつ、リブ要素の位置に関する情報を遺伝子としてコーディングする。すなわち、二進数の1と0でリブ要素とそうでない要素を表現する。交差手法としては、 2×2 の四角ブロックを用いて交差を行う。しかし、交差した後の子の染色体は先の2つの制約条件を必ずしも満足させることができない。そこで制約条件(2)を満足させるために、 2×2 の要素ごとに染色体全域を縦、横方向に1ビットずつ移動させ検査し、4要素すべてがリブ要素の場合には乱数で4つの要素の中で1つを取り除く（図13参照）。また制約条件(1)を満足させるために、染色体の中に乱数で多すぎた1を取り除くか、1を増加させる。特にここで扱うような最大剛性設計問題の場合、最適解は制約限界のリブ要素を有するものの中にあると考えられるので、リブ要素を増加させる操作も必要となる。1の数が多すぎた場合には簡単に乱数で取り除くことができるが、1の数が少ない場合は、まず乱数でリブでない任意要素（遺伝子0の要素）を選択する。次にこの選択された遺伝子0を囲む8つの遺伝子に注目する（図14参照）。つまり、図14(a)に示すように選択された遺伝子（中央の○

(a) Ribs=16

(b) Ribs=32

Fig.15 All edges supported square plate

印の遺伝子)を囲む8つの遺伝子は、それぞれ4つの三角形領域に所属していると見られるので、この4つの三角形の中で、それらの所属している3個の遺伝子が全て1であるかどうかをチェックする。もしそうであれば選択された要素をリブ要素とせず、そうでなければ図14(b)に示すようにそれをリブ要素とする（○印の遺伝子を0→1へ変換）。

3・2・2 設計モデル 正方形板は縦×横が400×400mmで厚さ4.0mmとし、かつ、リブの付いた薄板の厚さは6.0mmとする。支持条件としては、

(1)周辺単純支持。

(2)相対する両辺が単純支持で他の2辺が自由。

の2種類を考え、また、荷重条件として $P=1960.0N$ とする。さらに計算では、モデルの荷重と支持条件の対称性を考慮して図11の□OABCで示される4分の1領域のみを解析した。目的関数は薄板の最大変位をとり、計算の終了条件としては、(1)連続した5世代を経過しても解の更新がない。(2)世代数が100を越える、のうちいずれかを満足するときとした。

3・2・3 計算結果と考察

(1)周辺単純支持の場合 最大変位は中央点に現れる。リブ要素数の制約が16のとき、図15(a)に示すように十字型のリブが得られた。工業上利用されている薄板にリブを付けると、十字型のリブがよく見られ

Fig.16 Thin square plate of two opposite edges simply supported and others free

る。計算結果はその妥当性を示している。またリブ要素数の制約が32のとき、図15(b)に示すように荷重点を中心に放射状に伸びるリブと荷重点を中心とする同心円状のリブを組み合わせるものとなることから分かる。

(2) 相対する両辺（辺AB）が単純支持で他の2辺（辺BC）が自由の場合 リブ要素数の制約が16のとき、図16(a)に示すようなリブ分布が得られた。これは図15(a)と異なり、左右両辺が支持されていないため、図中のx軸上のリブ要素が退化し、y軸と中心部の周囲にそれらが集中したためと考えられる。このようにして中央点の変位が両側点の変位に近付こうとして薄板の最大変位が最小になる。リブ要素数の制約が32のとき、16の結果と同じように、リブはy軸と中心部の周囲に集中する一方で、支持されていない両側にもリブが付いてくる。

次に表1は、リブの付いた薄板モデルの最大変位 W を等価体積の一樣板厚モデルの最大変位 W_0 と比較したものである。リブ要素数の制約が16と32のとき、等価板厚 h_{eq} はそれぞれ $1.125h_0$ と $1.25h_0$ である。なお、 h_0 はリブが付かないときの一樣板厚である。周辺単純支持でも相対する両辺が単純支持の場合でも、ともに最大変位 W は中央点に現れる。そして周辺単純支持の場合の等価体積の一樣板厚モデルの最大変位 W_0 は同点の古典理論値⁽⁶⁾であり、一方、相対する両辺が単純支持で他

Table 1 Comparison between the maximum displacements W and W_0

Term	Ribs	Specific maximum deflection W/W_0
All edges simply supported	16	0.8179
	32	0.8533
Two opposite edges simply supported and others free	16	0.7731
	32	0.7970

の両辺が自由の場合の等価体積の一樣板厚モデルの最大変位 W_0 は、同点のR.Ohling⁽⁷⁾によって計算された理論値を用いている。この表から明らかなように、本手法によりリブを付けた薄板モデルでは、その剛性が等価板厚モデルに比べて約15~23%向上していることが分かる。

以上のように、本モデルはそのリブ配置自身が二次元マトリクスで表示され、さらにリブ特性が図12、14で示されるような比較的簡単なブロック要素集合則で規定されることから、ここで提示した二次元染色体を用いるGAにきわめて適合した例題であるといえる。さらにこの手法は、リブ創生に特別な制約を設定せず、ごく自然な形でそれらを求め得ることができることから、その応用範囲もここで示した例題に限定されない汎用性を有するものと考えられる。

4. 結言

本研究では、従来のGAで一般的に用いられていた一次元配列の染色体に代わり、多次元配列の染色体を用いたGAを提案した。そして、この手法にブロック交差という特異な交差手法を用いることで、構造位相決定問題に有効に適用できることを検証した。特に、トラス構造の位相決定問題では、これまでのGAを用いた方法では表現できなかった節点に関する制約を考慮した設計が行え、また、薄板補強リブの位相決定問題では、リブ創生に基本的なルールを与えるのみで支持条件、荷重条件やリブの数が増えた場合でも、きわめて自由度のある位相決定が行えることを示した。

文献

- (1) David E. Goldberg, Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning, Addison-Wesley Publ. (1989).
- (2) 北野宏明, 遺伝的アルゴリズム, 産業図書株式会社, (1993).
- (3) 平山・阿部, 方陣の研究, 大阪図書出版, (1983).
- (4) 尾田・白井, 第18回NCP研究会・機械の強度と形態研究懇話会シンポジウム論文集, (1994), 7.
- (5) 坂本・尾田, 遺伝的アルゴリズムを利用した最適トラス形態決定法, 機論, 59-562, A(1993), 156.
- (6) 橋原, 平板の曲げ理論, 培風館, (1975).
- (7) R.Ohlig, Ingr.-Arch, Vol.16, (1947), 51.