弾性球の衝突*
(時間依存基本解を用いる間接仮想境界積分法)石井 悟*¹, 岸田 路也*²Collision of an Elastic Sphere
(Indirect Fictitious-Boundary Integral Method with
the Time-Dependent Fundamental Solution)

Satoru ISHII and Michiya KISHIDA

In this paper, a collision of an elastic sphere is analyzed by the indirect fictitious-boundary integral method with the time-dependent fundamental solution. As a result, the time variation of surface tractions and displacements in contact area are shown. Also, the maximum collision force and its acting duration are analyzed, and these results are compared with the quasistatic Hertz's solution in the elastic-contact theory.

Key Words: Elastodynamics, Numerical Analysis, Boundary Integral Method, Fictitious-Boundary, Three-Dimensional Axisymmetric Problem, Sphere, Contact Problem, Collision

1. ま え が き

著者らは、線形静弾性境界値問題の少数値解析法として提示された間接仮想境界積分法⁽¹⁾⁽²⁾の非定常動弾性問題への適用として、まず、ラプラス変換を用いる方法⁽³⁾で、その有用性を示した。この方法では時間変数を消去できることから、ラプラス像空間における積分方程式の定式化が容易になるという利点を有するが、動的接触のような境界条件が時間に依存する問題の解析には適さない。そこで、次に、動的接触問題への適用として、時間依存基本解を用いる間接仮想境界積分法⁽⁴⁾によって、二つの剛体平面で衝撃圧縮される弾性球の問題を扱い、接触領域における表面力と表面変位分布の時間変化や全圧縮力の時間変動などを求め、この種の動的接触問題に対する間接仮想境界積分法の適用性を示した。

ところで、球と球の衝突問題は工学上基本的でかつ重要な問題の一つであるにもかかわらず、動的接触という複雑な現象を伴うためか、その解析例は少ない。

古くは、球体と球体の衝突が、Hertz の弾性接触理論を用いて準静的に解析され⁽⁵⁾、最大衝突力や衝突速度と衝突継続時間(以下、衝突時間と呼ぶ)の関係などが明らかにされている。しかし、三次元動弾性・接触問題との観点から解析されたものではない。また、Hughes ら⁽⁶⁾は、弾性球の剛体壁への衝突を動的有限要素法で解析しているが、これも最大衝突力の作用する時刻における接触応力分布を示しているにすぎない。このように、球の衝突現象が十分に明らかにされたとはいえない現状である。

本報は、弾性球の衝突問題を時間依存基本解を用いる間接仮想境界積分法によって、三次元動弾性・接触問題として解析する。具体的には、同一形状・同一材質の二つの弾性球が互いに v_0 の速度で衝突する問題を扱うが、これは一つの弾性球が速度 v_0 で剛体壁に衝突する問題と等価である。ここでは、弾性球が速度 v_0 で剛体壁に衝突したときの接触領域における表面力や表面変位分布の時間変化、衝突力、変位、速度の時間変動などを示す。また、衝突速度に対する最大衝突力や衝突時間の関係を示すとともに、Hertz の弾性接触理論を用いた準静的解析による結果⁽⁵⁾との比較を行うものである。

* 原稿受付 1995 年 6 月 20 日。

*¹ 正員、旭川工業高等専門学校 (〒071 旭川市春光台 2 条 2 丁目)。*² 正員、北海道大学工学部 (〒060 札幌市北区北 13 条西 8 丁目)。

2. 基礎理論

非定常動弾性問題に対する間接仮想境界積分法について述べる。

いま、滑らかな閉曲面 S (実境界) によって囲まれる領域 R からなる均質で等方性を有する三次元弾性体の S 上に、時間関数である合応力 $\vec{T}$ または合変位 $\vec{U}$ が与えられるものとする。次に、 R 外に S とは交わらない閉リアブノフ曲面 S^* (仮想境界面) を考え、領域を S^* によって囲まれる R^* に拡張する。以後 S^* 上で定義される量には $(*)$ を付す。このとき、物体力が無いものとすれば、変位ベクトル $\vec{u}$ の満足すべき方程式は

$$(c_1^2 - c_2^2) \nabla \nabla \cdot \vec{u} + c_2^2 \nabla^2 \vec{u} = \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (R^* \text{ 内}) \quad (1)$$

である。ここで、 c_1, c_2 はそれぞれ縦波および横波の伝ば速度であり、 G を横弾性係数、 ν をポアソン比、 ρ を弾性体の密度とすれば

$$c_1^2 = \frac{2G(1-\nu)}{\rho(1-2\nu)}, \quad c_2^2 = \frac{G}{\rho} \quad (2)$$

である。

変位ベクトル $\vec{u}$ は、波動方程式

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{c_1^2} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 \vec{\psi} = \frac{1}{c_2^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{\psi}}{\partial t^2} \quad (3)$$

を満足するスカラー関数 ϕ とベクトル関数 $\vec{\psi}$ によって

$$\vec{u} = \nabla \phi + \nabla \times \vec{\psi} \quad (R^* \text{ 内}) \quad (4)$$

と与えられ⁽⁷⁾、応力テンソル σ は、変位ベクトル $\vec{u}$ によって

$$\sigma = \rho \{ (c_1^2 - 2c_2^2) \nabla \cdot \vec{u} U + c_2^2 (\nabla \vec{u} + \vec{u} \nabla) \} \quad (R^* \text{ 内}) \quad (5)$$

と表される。ここで、 U は単位テンソルである。

Fig. 1 Coordinate system and sign convention

さて、三次元無限体の原点に働く集中力 $\vec{F}(t)$ による解は

$$\begin{aligned} \phi &= -\frac{1}{4\pi\rho} \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \int_0^{r/c_1} \tau \vec{F}(t-\tau) d\tau \\ \vec{\psi} &= \frac{1}{4\pi\rho} \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \times \int_0^{r/c_2} \tau \vec{F}(t-\tau) d\tau \end{aligned} \quad (6)$$

与えられる⁽⁸⁾ から、 $\vec{\mu}^*$ を S^* 上でのヘルダー連続なベクトル密度関数とするポテンシャル

$$\begin{aligned} \phi(\vec{P}, t) &= -\int_{S^*} \nabla \left(\frac{1}{r_0} \right) \cdot \int_0^{r_0/c_1} \tau \vec{\mu}^*(\vec{q}^*, t - \tau) d\tau dS^* \\ \vec{\psi}(\vec{P}, t) &= \int_{S^*} \nabla \left(\frac{1}{r_0} \right) \cdot \int_0^{r_0/c_2} \tau \vec{\mu}^*(\vec{q}^*, t - \tau) d\tau dS^* \end{aligned} \quad (R^* \text{ 内}) \quad (7)$$

を考えることができる。ここで、 $r_0 = |\vec{P} - \vec{q}^*|$ であり、 $\vec{P}$ および $\vec{q}^*$ は、 R^* 内および S^* 上の点を表す位置ベクトルである。そうすると、この問題の境界方程式は、 S 上の点を $\vec{p}$ とすれば

$$\vec{u} = \vec{U}(\vec{p}, t)$$

または

$$\rho \{ 2c_2^2 (\vec{n} \cdot \nabla) \vec{u} + (c_1^2 - 2c_2^2) \vec{n} \nabla \cdot \vec{u} + c_2^2 \vec{n} \times (\nabla \times \vec{u}) \} = \vec{T}(\vec{p}, t) \quad (8)$$

である。結局、これらの方程式は、 S 上の要求を満たすような S^* 上の未知量 $\vec{\mu}^*$ に関する連立第一種フレッドホルム形積分方程式に帰着される。ここで $\vec{n}$ は $\vec{p}$ における外向き法線ベクトル、 $\vec{T}$ および $\vec{U}$ は、それぞれ合応力および合変位ベクトルを表す。また、常に $\vec{P} \neq \vec{q}^*$ であって、式(7)などの積分核に特異性は生じない。

3. 三次元軸対称問題

円柱座標系を図1に示す。問題の対称性により、密度関数 $\vec{\mu}^*$ の円柱座標成分 ($\mu_r^*, \mu_\theta^*, \mu_z^*$) は x_3 面と S^* 面との交線 r^* 一定の円周上では一定である。また、これらと直交座標系の成分との間には

$$\begin{bmatrix} \mu_1^* \\ \mu_2^* \\ \mu_3^* \end{bmatrix} = [N] \begin{bmatrix} \mu_r^* \\ \mu_\theta^* \\ \mu_z^* \end{bmatrix} \quad (9)$$

ここで、

$$[N] = \begin{bmatrix} \cos \theta^* & -\sin \theta^* & 0 \\ \sin \theta^* & \cos \theta^* & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

の関係が成立する。

数値計算のため、 S^* を、 i 番目の要素が $\vec{q}_i^*$ を点 $\vec{q}_{i+1/2}^*$ の中点とする区間長さ h_i^* なる m 個の円輪要素

に分割する。ある時刻では、 $(\mu_r^*, \mu_\theta^*, \mu_z^*)$ は各区内で一定であり、ある時間間隔では、時間について一次の変化をするものとする。

本報で扱う時間依存基本解を用いた動的解析は、静的解析に比べ境界積分精度の解析結果に及ぼす影響は極めて大きい。ここでは、 S 上の点 $\vec{p}_j$ を固定点とする i 番目の区間長さ h_i^* の円輪要素に関する面積分 ΔI_i^* を、 $\vec{q}^*$ を x_3 軸の周りに 1 回転させてできる円周に沿う解析的な周積分 f^* を関数値とするシンプソンの積分公式で行うが、精度向上のため、周積分の実行点を $\vec{q}_i^*$, $\vec{q}_{i\pm 1/2}^*$ のみならず、それらの中間点 $\vec{q}_{i\pm 1/4}^*$ も置く。すなわち、 ΔI_i^* を、 $\vec{q}_i^*$, $\vec{q}_{i\pm 1/4}^*$ および $\vec{q}_{i\pm 1/2}^*$ における周積分値をそれぞれ f_i^* , $f_{i\pm 1/4}^*$ および $f_{i\pm 1/2}^*$ として、

$$\Delta I_i^* = (h_i^*/12) \{ f_{i-1/2}^* + 4(f_{i-1/4}^* + f_{i+1/4}^*) + 2f_i^* + f_{i+1/2}^* \} \quad \dots\dots\dots (10)$$

で数値的に行う。上記の周積分は、最終的には、積分

$$I_{n'} = \int_0^{\theta_j^*} \{ 1 - k^2 \cos^2(\psi/2) \}^{-n'/2} d\psi \quad \dots\dots\dots (11)$$

($n' = -2, -1, 0, 1, 2$) に帰着される。ここで、 $A = x_1^2 + r^{*2} + (x_3 - x_3^*)^2$, $B = 2x_1 r^*$ として $k^2 = 2B/(A+B)$ であり、 θ_j^* ($j=1, 2$) は $x = \{A - (c_j \cdot t)^2\}/B$ とすると

$$\theta_j^* = \begin{cases} 0 & (x > 1) \\ \cos^{-1}(x) & (-1 \leq x \leq 1) \\ \pi & (x < -1) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (12)$$

である。なお、 I_{-2} , I_0 , I_2 は解析的に積分可能であり、 I_{-1} および I_1 は $\theta_j^* = \pi$ のとき、第一種および第二種完全円積分に帰着される。

すなわち、この問題の数値解析は、 S 上の m 個の点

$\vec{p}_j$ に関する、各時刻 ($t = n \cdot \Delta t$) における S^* 上の m 個の $\vec{\mu}_{i,n}^*$ を求める選点法となる。

4. 数値解析

本問題では、ねじりを伴わないので、ねじりに関する密度関数 μ_θ^* を恒等的に零とおく。すなわち、仮想境界 S^* 上での未知密度関数は $\vec{\mu}^*$ の r 方向成分 μ_r^* と z 方向成分 μ_z^* のみとなる。

実境界 S と仮想境界 S^* との距離 l_i は、最適仮想境界距離係数⁽¹⁾⁽²⁾ $\alpha_s = l_i/h$ によって規定される。ここで、 h は S を仮に m 等分したときの区間長さである。

4・1 数値解の安定条件 Δq を選点間の距離、 c_e を弾性波の速度、 Δt を時間間隔として、安定条件パラメータ β は

$$\beta = \frac{c_e \cdot \Delta t}{\Delta q} \geq 0.5 \quad \dots\dots\dots (13)$$

である⁽⁹⁾。ただし、 Δq としては最大選点間区間長さを、 c_e は横波の伝ば速度 c_2 を用いる。

4・2 解析精度の判定基準 τ_0 を基準応力、 u_0 を基準変位、 T_j^n または U_j^n を合応力または合変位の数値解析値、 T_j^e または U_j^e をそれらの境界条件値とすれば、解析精度の判定基準は、各時刻で、選点法を適用した点およびその中点において

$$|T_j^n - T_j^e|/\tau_0 \leq 1.0 \times 10^{-2}$$

または

$$|U_j^n - U_j^e|/u_0 \leq 1.0 \times 10^{-2} \quad \dots\dots\dots (14)$$

とする。

5. 結 果

図2に示すように、半径 a の弾性球が速度 v_0 で剛体壁に衝突する問題を考える。座標系は、静止座標の原点を最初の衝突点 O' 、局所座標の原点を弾性球の中心 O とする。また、弾性球が剛体壁に衝突した瞬間の時刻を $t=0$ とする。弾性球のポアソン比を $\nu=0.3$ 、衝突速度は $v_0/c_1=0.001, 0.002, 0.004$ の3種類とする。

本報では、解析の容易さを考え、弾性球が剛体壁と摩擦なく自由にすべる場合のみ扱う。合応力 $\vec{T}$ の x_1, x_3 方向成分を T_1, T_3 、静止座標に対する球表面の合変位 $\vec{U}'$ の x_3 方向成分を U_3 、球表面の局所座標 x_3 の座標値を x_{3p} とすれば、弾性球と剛体壁が接触しているときの各時刻における境界条件は、接触面 ($0 \leq \theta \leq \theta_c$) では

$$a - x_{3p} = U_3(\vec{p}, t), T_1(\vec{p}, t) = 0 \quad \dots\dots\dots (15)$$

自由表面 ($\theta_c < \theta \leq \pi$) では

$$T_1(\vec{p}, t) = 0, T_3(\vec{p}, t) = 0 \quad \dots\dots\dots (16)$$

Fig. 2 Collision of an elastic sphere against a rigid wall

である。また、球表面で求められた結果は、接触面 ($0 \leq \theta \leq \theta_c$) では

$$T_3(\vec{p}, t) \leq 0 \quad (\text{等号は } \theta = \theta_c \text{ のとき}) \quad \cdots (17)$$

自由表面 ($\theta_c < \theta \leq \pi$) では

$$a - x_{3p} > U_3(\vec{p}, t) \quad \cdots (18)$$

の補足条件も満たさなければならない。また、弾性球に働く衝突力 P_c は

$$P_c(t) = -2\pi a^2 \int_0^{\theta_c} T_3(\vec{p}, t) \cdot \sin \theta d\theta \quad \cdots (19)$$

と求められる。弾性球と剛体壁の衝突が終了してからの境界条件は、すべての境界 ($0 \leq \theta \leq \pi$) で

$$T_1(\vec{p}, t) = 0, \quad T_3(\vec{p}, t) = 0 \quad \cdots (20)$$

Fig. 3 Time variation of surface traction ($v_0/c_1=0.002$)

Fig. 4 Time variation of surface displacement ($v_0/c_1=0.002$)

である。このような接触問題では、静止座標に対する変位 U_3 と、それと一意に対応する接触領域 θ_c の関係はあらかじめ明かではない。ここでは、与えられた U_3 に対する接触領域 θ_c を試行錯誤により決定するが、その過程を具体的に述べる。まず、ある時刻で接触領域となる θ_c を含む境界領域 $\theta_1 < \theta_c < \theta_2$ を仮定する。次に、接触領域を θ_1 と仮定して解析を行い、式(15)、式(16)の境界条件と式(17)、式(18)の補足条件の満足度を計算する。さらに、 θ_1 から選点間の間隔 ($\Delta\theta$) だけ接触領域 ($\theta_1 + \Delta\theta$) を広げ、同様の計算を行う。この手順を、仮定した接触領域が θ_2 となるまで続け、これらの中で補足条件を満たし、なおかつ最も境界条件を満足する領域をその時刻における接触領域 θ_c とする。

本解析では、仮想境界の分割数 $m=400$ であるが、実境界で接触が予想される領域 ($0 \leq \theta \leq \pi/10$) に対応する仮想境界を密に分割し、その分割数は 80 で、他の領域 ($\pi/10 \leq \theta \leq \pi$) の分割密度の約 2 倍とした。また、最適仮想境界距離係数 $\alpha_s=0.4$ 、時間間隔 $\Delta t=0.5(a/c_1)$ 、安定条件パラメータ $\beta=30.2$ である。なお、区間中点にも選点法を適用し、2 m 個の未知量に対し $2(m+1)$ 個の境界方程式をつくり、最小二乗法処理によって未知量を決定する。

解析精度の検討における基準変位 u_0 と基準応力 τ_0 は、 $u_0=\alpha_1/2$ 、 $\tau_0=q_0$ とする。ここで、 α_1 は両球の最大接近量、 q_0 は最大接触応力で、これは同一形状同一材質の二つの弾性球が互いに v_0 の速度で衝突する場合を、Hertz の弾性接触理論を用いて準静的に解析した

Fig. 5 Time variation of inner stresses ($v_0/c_1=0.002$)

結果から

$$\alpha_1 = \left\{ \frac{5\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\pi(1-\nu)^2}{(1-2\nu)} \right\}^{2/5} \left(\frac{2v_0}{c_1} \right)^{4/5} \cdot a \quad \dots\dots (21)$$

$$q_0 = 2G \left\{ \frac{10}{\pi^4(1-\nu)^3(1-2\nu)} \right\}^{1/5} \left(\frac{2v_0}{c_1} \right)^{2/5} \quad \dots\dots (22)$$

である⁽⁵⁾。解析精度については解析対象時間のすべての時刻において、式(14)の判定基準を満足した。

図3は衝突速度 $v_0 = 0.002 \cdot c_1$ のときの各時刻における接触面の表面力 p_3 分布である。これらはいずれも接触端近傍で少々乱れが見られるものの Hertz 形の接触応力分布を示した。また、本解析の最大衝突力が作用する時刻は $t = 9(a/c_1)$ であり、これは破線の Hertz の準静的解析から得られる最大衝突力が作用する時刻における接触応力分布⁽⁵⁾と非常によく一致し

ている。図4は衝突速度 $v_0 = 0.002 \cdot c_1$ のときの静止座標に対する表面変位 U_3 分布の時間変化を、図5は x_3 軸上の内部応力分布の時間変化を示す。図5によれば、応力 σ_{33} は接触面 ($x_3 = a$) で最大値をとり、球内部に向かうに従い急激に減少し、球中心 ($x_3 = 0$) でほぼ零となっている。一方、主せん断応力 $\tau_1 = (\sigma_{22} - \sigma_{33})/2$ は接触面から少し内部に入った点で最大値をとり、時間の経過とともにその位置が変化する。

図6は3種類の衝突速度に対して、接触面の最大表面力 $p_{3\max}$ と弾性球に働く衝突力 P_c の時間変動を示したものである。この図から、最大表面力は放物線状に、衝突力は正弦曲線状に変動している。また、衝突速度の増加とともに両者の最大値は増加するが、弾性球

Fig. 6 Maximum surface tractions and forces of collision vs. time

Fig. 7 Displacements vs. time

Fig. 8 Velocities vs. time

Fig. 9 Comparison of maximum force of collision and duration of collision

の衝突時間は減少している。

図7, 8はそれぞれ弾性球の最初の衝突点($x_1=0$, $x_3=a$)および球中心($x_1=0$, $x_3=0$)における, 静止座標に対する変位 U_3 と速度 V_3 の時間変動を示したものである。図7から, 衝突点における変位は衝突中は零であり, 衝突終了後は一定こう配の直線となっている。この直線のこう配は衝突速度の大きなものほど大きい。球中心の変位は, 衝突中放物線状に, 衝突終了後直線的に変化する。図8から, 衝突点における速度は衝突中理論上零であるが, 本解析では若干の振動が見られるものの, ほぼ速度零を保った。また, 衝突終了と同時に速度 v_0 で剛体壁から離れる。一方, 球中心における速度は衝突中 v_0 から $-v_0$ へと滑らかに変化する。

図9は衝突速度に対する衝突時間 t_c と弾性球に作用する最大衝突力 P_{cmax} を, Hertz の準静的解析結果⁽⁵⁾と比較したものである。両者は衝突速度の増加に伴い相違する傾向にあるものの, 比較的一致している。このことから, Hertz の弾性接触理論を用いた準静的解析結果はかなりの妥当性があることが確認できた。

6. ま と め

本報は, 弾性球の衝突を時間依存基本解を用いる間

接仮想境界積分法によって, 三次元動弾性・接触問題として解析した。その結果, 以下のことが示された。

- (1) 接触面における表面力, 表面変位および内部応力分布の時間変化を明らかにした。
- (2) 最大表面力と衝突力の時間変動を明らかにした。
- (3) 衝突点および球中心の変位と速度の時間変動を明らかにした。
- (4) 本解析による衝突時間と最大衝突力を Hertz の準静的解析によるそれらと比較した結果, 両者はよく一致し, 後者の妥当性がこの種の衝突問題に対して確認された。

文 献

- (1) Kishida, M., *Theo. Appl. Mech.*, **28**(1980), 139-151.
- (2) 岸田路也・藤村和男, 機論, **48**-427, A(1982), 358-366.
- (3) 石井悟・岸田路也, 機論, **58**-555, A(1992), 2119-2124.
- (4) 石井悟・岸田路也, 機論, **61**-587, A(1995), 1633-1638.
- (5) Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N., *Theory of Elasticity*, 2nd ed., (1951), 383-384, McGraw Hill.
- (6) Hughes, T. J. R., ほか4名, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **8**(1976), 249-276.
- (7) Eringen, A. C. and Suhubi, E. S., *Elastodynamics*, **II** (1975), 348-356, Academic Press.
- (8) Love, A. E., *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, (1944), 304-305, Dover Publications.
- (9) 松本浩之・ほか3名, 機論, **54**-501, A(1988), 1024-1029.