単純支持された対称積層板の座屈荷重に対する感度解析*

小木曾 望^{*1}, 邵 曉 文^{*2}, 室 津 義 定^{*2}Sensitivity Analysis of Buckling Load
of the Simply Supported Symmetric Laminated Plate

Nozomu KOGISO, Shaowen SHAO and Yoshisada MUROTSU

In this paper, we describe the sensitivity analysis of buckling load of the simply supported symmetric laminated plate with respect to the material constants and the orientation angle of each ply. The objective is to clarify the dominant factor for the buckling load. Since the buckling load is obtained as the minimum eigenvalue by Galerkin's method, the sensitivity of the buckling load is formulated by making use of the sensitivity analysis of the eigenvalue problem. When the buckling load corresponds to a multimodal eigenvalue, the sensitivity should be obtained by another method which utilizes the directional derivatives. However, in the typical case of a double eigenvalue for the laminated plate, it is shown that such a method is not required. Finally, the dominant effect on the buckling load sensitivity is evaluated through numerical simulations. Then, it is demonstrated that the coupling term plays an important role in buckling sensitivity.

Key Words: Buckling, Composite Material, Galerkin's Method, Multiple Eigenvalue, Sensitivity Analysis

1 緒論

複合材料は比強度および比剛性が高いことから、軽量化が要求される航空宇宙分野で広く用いられている。平板構造物を軽量化するためには、その板厚を薄くする必要があり、圧縮荷重を受ける場合には座屈を考慮した設計が必要になる。そのために、座屈荷重を最大化する最適設計の研究が広く行われている^{1,2)}。

しかし、製造方法や工程により、複合材料の特性にはばらつきが生じやすく、実働下では負荷荷重にも変動があるので、これらのばらつきを考慮した設計が望まれる^{1,2)}。そのためには、これらの変動が座屈荷重におよぼす影響を評価することが必要となる。

本研究の目的は、各層の材料定数および配向角に関する座屈荷重の感度解析法を与え、数値シミュレーションにより座屈荷重の感度を支配する要因を明らかにすることである。そのために、まず単純支持された対称積層板の座屈荷重をガレルキン法によって定式化し、固有値問題に帰着させ、その最小固有値として求める³⁾。そして、座屈荷重の感度解析は固有値に対す

る感度解析法を応用して求める⁴⁾。また、固有値が重根となる場合は一般に微分不可能となるために、方向微分を用いた解析を行う⁵⁾。特に、複合材料平板の座屈解析で問題となる二重根は固有ベクトルが互いに直交しているため、方向微分を用いなくても感度を求めることが可能であることを示す。最後に、提案する感度解析法を用いて、材料定数あるいは配向角の変動が対称積層板の座屈荷重におよぼす影響を考察する。

2 積層板の曲げ剛性

モーメント M と曲率 κ の関係は、積層板の曲げ剛性 D を用いて次式で表される⁶⁾。

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ & D_{22} & D_{26} \\ \text{(Sym.)} & & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_6 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

各層の厚さが h_0 で一定であり、全体で n 層(n =偶数)からなっている場合は、図1に示す積層順序を表す変数 t を導入することで、各剛性項を和の形で表すことができる。

$$\left\{ D_{11} \ D_{22} \ D_{12} \ D_{66} \ D_{16} \ D_{26} \right\}^T$$

* 原稿受付 1995年6月7日。

^{*1} 正員、大阪府立大学大学院 (〒593 堺市学園町1-1)。^{*2} 正員、大阪府立大学工学部。

Fig. 1 The laminated plate made up of an even number of plies.

$$= \frac{h_0^3}{3} \sum_{t=1-n/2}^{n/2} \{t^3 - (t-1)^3\} \times \begin{bmatrix} U_1^{(t)} & \cos 2\theta_t & \cos 4\theta_t \\ U_1^{(t)} & -\cos 2\theta_t & \cos 4\theta_t \\ U_4^{(t)} & 0 & -\cos 4\theta_t \\ U_5^{(t)} & 0 & -\cos 4\theta_t \\ 0 & \sin 2\theta_t/2 & \sin 4\theta_t \\ 0 & \sin 2\theta_t/2 & -\sin 4\theta_t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ U_2^{(t)} \\ U_3^{(t)} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

$U_i^{(t)}$ は対応する層の材料の弾性不変量を表し、各層の材料定数を用いて次式のように表すことができる。

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{E_x(3E_x + 3E_y + 2\nu_x E_y)}{8(E_x - \nu_x^2 E_y)} + \frac{E_s}{2} \\ U_2 &= \frac{E_x(E_x - E_y)}{2(E_x - \nu_x^2 E_y)} \\ U_3 &= \frac{E_x(E_x + E_y - 2\nu_x E_y)}{8(E_x - \nu_x^2 E_y)} - \frac{E_s}{2} \\ U_4 &= \frac{E_x(E_x + E_y + 6\nu_x E_y)}{8(E_x - \nu_x^2 E_y)} - \frac{E_s}{2} \\ U_5 &= \frac{E_x(E_x + E_y - 2\nu_x E_y)}{8(E_x - \nu_x^2 E_y)} + \frac{E_s}{2} \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 E_x は一方向材の繊維方向のヤング率、 E_y は直角方向のヤング率、 ν_x はポアソン比、 E_s は面内せん断係数を表す。

3 対称積層された単純支持積層板の座屈解析

図2に示す長さ a 、幅 b の対称積層板(アスペクト比 $R = a/b$)が、面内荷重(N_x, N_y, N_{xy})を受けるときの支配方程式は次式で与えられる³⁾。

$$\begin{aligned} &D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \\ &+ 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \end{aligned}$$

Fig. 2 The plate subject to compression and shear load.

$$= N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (4)$$

周辺単純支持の場合、境界条件は次式で与えられる。

For $x = 0, a$

$$w = M_x = D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

For $y = 0, b$

$$w = M_y = D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (5)$$

そして、変位 w を次式で仮定して座屈荷重を求める。

$$w = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (6)$$

3.1 カップリング項を無視したときの座屈解析
二軸圧縮荷重を受ける単純支持された積層板では、 D_{16} 、 D_{26} の値を無視して、直交異方性平板として座屈荷重を求めることが多い。この場合、座屈荷重倍数 λ は正確に求めることができる³⁾。

$$\lambda = \min_{m,n} \frac{\pi^2 [D_{11}m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})m^2n^2R^2 + D_{22}n^4R^4]}{a^2(m^2N_x + n^2R^2N_y)} \quad (7)$$

(m, n) はそれぞれ (x, y) 方向の座屈半波数を表す。

3.2 カップリング項を考慮したときの座屈解析

対称積層板の座屈解析において、カップリング剛性 D_{16} 、 D_{26} が存在するとき、あるいはせん断荷重を考慮するときには、座屈荷重を正確に求めることは不可能なので、近似解析を行う。エネルギー法を利用して得られるガレルキン方程式は次式となる³⁾。

$$\begin{aligned} &\pi^4 [D_{11}m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})m^2n^2R^2 + D_{22}n^4R^4 \\ &- N_x \frac{m^2a^2}{\pi^2} - N_y \frac{n^2R^2a^2}{\pi^2}] A_{mn} \\ &- 32\pi^2 mnR \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N M_{ij} [(m^2 + i^2)D_{16} \\ &+ (n^2 + j^2)D_{26}R^2 + N_{xy} \frac{a^2}{\pi^2}] A_{ij} = 0 \\ &m = 1, \dots, M, n = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (8)$$

ここで,

$$M_{ij} = \begin{cases} \frac{ij}{(m^2 - i^2)(n^2 - j^2)} & \begin{pmatrix} m+i & \text{odd} \\ n+j & \text{odd} \end{pmatrix} \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (9)$$

これは、未知係数 A_{mn} に対する $M \times N$ 次の斉次方程式となる。この方程式の係数マトリクスの行列式が0のとき、 A_{mn} が0でない解を持つ。そして、それに対応する (N_x, N_y, N_{xy}) の最小の値が座屈荷重である。

固有値問題としてこの方程式を解くために、荷重項と剛性項に分離する。

$$[\mathbf{K} - \lambda \mathbf{K}_G] \boldsymbol{\phi} = 0 \quad (10)$$

座屈荷重はその最小固有値 ($\lambda_{\min}$) で与えられ、対応する固有ベクトルが座屈モードを表す。 $\mathbf{K}$, $\mathbf{K}_G$ はそれぞれ剛性マトリクス、幾何剛性マトリクスであり、次式の形で表される。

$$K_{mn} = \pi^4 [D_{11}m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})m^2n^2R^2 + D_{22}n^4R^4] \quad (11)$$

$$K_{mn}^{ij} = -32\pi^2 mnRM_{ij}[(m^2 + i^2)D_{16} + (n^2 + j^2)D_{26}R^2] \quad (12)$$

$$K_{Gmn} = \pi^2 a^2 (m^2 N_x + n^2 R^2 N_y) \quad (13)$$

$$K_{Gmn}^{ij} = 32a^2 mnRM_{ij}N_{xy} \quad (14)$$

添字 m, n, i, j は式(8)の添字に対応する。この座屈荷重方程式(10)は、 $m+n$ が奇数の時と、 $m+n$ が偶数の時の二つに分割でき、座屈荷重はこれら二つの方程式の最小固有値の小さい方の値として得られる。

一般に実対称行列の固有値問題(10)の数値解法は、 $\mathbf{K}$ が実対称行列、 $\mathbf{K}_G$ が正定値実対称行列である場合に限られる。剛性マトリクス $\mathbf{K}$ は常に正定値対称行列であるが、荷重マトリクス $\mathbf{K}_G$ は荷重条件によっては正定値にならない場合がある。そこで、 $\mu = 1/\lambda$ とおき、固有値問題を

$$[\mathbf{K}_G - \mu \mathbf{K}] \boldsymbol{\phi} = 0 \quad (15)$$

とおきかえて固有値 μ を求める。座屈荷重は最大固有値の逆数 $\lambda = 1/\mu_{\max}$ である。

4 固有値問題と感度解析

ガレルキン法の座屈解析は固有値問題に帰着するので、座屈荷重に対する感度解析は固有値問題の感度解析を利用して解くことができる。まず、最初に固有値問題に対する感度解析の手法について述べる。

4.1 単根固有値に対する感度解析

設計変数を a_i , ($i = 1, \dots, I$) で表し、これに対する固有値の感度を導出する。行列 $\mathbf{K}$ および $\mathbf{K}_G$ は設計変数 a_i の滑らかな関数であると仮定する。式(10)の j 番目の固有値 λ_j が単根であり、それに対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{\phi}_j$ とおく。ここで固有ベクトル $\boldsymbol{\phi}_j$ は $\mathbf{K}_G$ -直交性であると仮定する。固有値方程式(10)を設計変数 a_i で微分し、左から $\boldsymbol{\phi}_j^T$ をかけて整理すると、 λ_j が単根の場合の固有値の感度が得られる⁴⁾。

$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial a_i} = \boldsymbol{\phi}_j^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial a_i} - \lambda_j \frac{\partial \mathbf{K}_G}{\partial a_i} \right) \boldsymbol{\phi}_j, \quad i = 1, \dots, I \quad (16)$$

4.2 座屈荷重に関する注意

3.2節で示したように、実際の数値計算では、固有値方程式(15)より固有値 $\mu = 1/\lambda$ を求める。座屈荷重に対応する固有値 $\mu_{\max}$ に対する感度は、式(16)の λ_j を $\mu_{\max}$ に置き換えたものになる。したがって、座屈荷重 $\lambda_{\min}$ に対する感度は次式で表される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda_{\min}}{\partial a_i} &= -\frac{1}{\mu_{\max}^2} \cdot \frac{\partial \mu_{\max}}{\partial a_i} \\ &= -\frac{1}{\mu_{\max}^2} \cdot \boldsymbol{\phi}_{\max}^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}_G}{\partial a_i} - \mu_{\max} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial a_i} \right) \boldsymbol{\phi}_{\max} \end{aligned} \quad (17)$$

4.3 多重根の固有値の感度解析

式(10)の一般固有値問題の解が N 次の多重根 $\tilde{\lambda} = \lambda_j$, ($j = 1, \dots, N$) になる場合を考える。一般に、固有値が重根となる場合は、それに対応する固有ベクトル $\boldsymbol{\phi}_j$, ($j = 1, \dots, N$) がユニークではなくなるために微分不可能となり、感度を求めるためには方向微分を行う必要がある⁵⁾。このとき、これらの固有ベクトルの任意の線形結合で表されたベクトルがもとの固有値問題(10)を満足する。設計の変化に対して連続なベクトル $\tilde{\boldsymbol{\phi}}_j$ が、固有ベクトル $\boldsymbol{\phi}_k$ の線形結合で表されるとする。

$$\tilde{\boldsymbol{\phi}}_j = \sum_{k=1}^N \beta_{jk} \boldsymbol{\phi}_k, \quad j = 1, \dots, N \quad (18)$$

ここで β_{jk} は未知係数である。多重根の固有値に対する感度計算は固有値の副問題として解くことができる。

まず、設計変数の任意の1要素 a_i の変化 Δa_i による $\mathbf{K}$ および $\mathbf{K}_G$ の変化を一次の項まで考慮し、このときの固有値の感度 μ_j , 固有ベクトルの感度 ν_j とする。このとき、式(18)の未知数 β_{ij} に対する方程式として次式が導かれる。

$$\sum_{k=1}^N \beta_{jk} \left[\boldsymbol{\phi}_k^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial a_i} - \tilde{\lambda} \frac{\partial \mathbf{K}_G}{\partial a_i} \right) \boldsymbol{\phi}_k - \mu_j \delta_{sk} \right] = 0, \quad s, k = 1, \dots, N \quad (19)$$

この方程式の解は β_{jk} の係数行列の行列式が0になるときにのみ存在する.

$$\det \left[\phi_s^T \left(\frac{\partial K}{\partial a_i} - \tilde{\lambda} \frac{\partial K_G}{\partial a_i} \right) \phi_k - \mu_j \delta_{sk} \right] = 0 \quad (20)$$

$$s, k = 1, \dots, N, \quad i = 1, \dots, I$$

これは、一つの設計変数 a_i の変化 Δa_i に関する多重根の固有値 $\tilde{\lambda}$ の感度 μ_j , ($j = 1, \dots, N$)を決定するための方程式である. 式(20)の行列の非対角項が0であれば, 多重根の固有値 $\tilde{\lambda}$ の方向微分行列の固有値は式(16)で得られる感度と等しい.

次に, 設計変数のすべての要素 a_i , ($i = 1, \dots, I$)が同時に変化する一般的な場合を考える. 多重根の固有値は通常の意味での微分は不可能であり, 設計空間で方向微分を行う必要がある. 設計変数 a_i , ($i = 1, \dots, I$)の実際の変化量 $\Delta \mathbf{a} = (\Delta a_1, \dots, \Delta a_I)$ に対する N 次多重固有値 $\tilde{\lambda}$ の感度 $\Delta \lambda_j$, ($j = 1, \dots, N$)を決定する方程式は次式で表される.

$$\det [f_{sk}^T \Delta \mathbf{a} - \delta_{sk} \Delta \lambda] = 0, \quad s, k = 1, \dots, N \quad (21)$$

ここで,

$$f_{sk} = \left(\phi_s^T \left[\frac{\partial K}{\partial a_1} - \tilde{\lambda} \frac{\partial K_G}{\partial a_1} \right] \phi_k, \dots, \phi_s^T \left[\frac{\partial K}{\partial a_I} - \tilde{\lambda} \frac{\partial K_G}{\partial a_I} \right] \phi_k \right) \quad (22)$$

K , K_G の対称性より, $f_{sk} = f_{ks}$ である. $\Delta \lambda$ に対するこの方程式(21)を解くことにより, N 次多重固有値の変化 $\Delta \lambda = \Delta \lambda_j$ を求めることができる. この値は設計変数ベクトルの変化方向 $\Delta \mathbf{a}$ に依存した量である.

5 座屈荷重の感度解析

各層の材料定数 E_x , E_y , E_s , ν_x および配向角 θ を設計変数としたときの座屈荷重 λ の感度解析を行う. 座屈荷重に対する感度, つまり固有値に対する感度を求めるためには, 式(17)に示すようにその係数マトリクス K , K_G の設計変数に関する微分が必要となる. ここでは荷重成分は定数としているので, $\partial K_G / \partial a_i = \mathbf{0}$ である. したがって, 剛性マトリクス K の感度係数 $\partial K / \partial a_i$ のみが必要となる. 式(11)および(12)に示すように, 剛性マトリクスの成分は, 曲げ剛性 D の線形結合で表されている. さらに曲げ剛性は材料定数および配向角の関数として表される. したがって, 剛性マトリクスの各成分の設計変数に関する感度は次式のように表される.

$$\frac{\partial K_{mn}}{\partial a_i} = \pi^4 \left[m^4 \frac{\partial D_{11}}{\partial a_i} + \frac{\partial D_{22}}{\partial a_i} n^4 R^4 \right.$$

$$\left. + 2 \left(\frac{\partial D_{12}}{\partial a_i} + 2 \frac{\partial D_{66}}{\partial a_i} \right) m^2 n^2 R^2 \right] \quad (23)$$

$$\frac{\partial K_{mn}^U}{\partial a_i} = -32mnR\pi^2 M_{ij} \left[(m^2 + i^2) \frac{\partial D_{16}}{\partial a_i} + (n^2 + j^2) \frac{\partial D_{26}}{\partial a_i} R^2 \right] \quad (24)$$

5.1 曲げ剛性の微係数 ここで, 各層の材料定数および配向角に関する曲げ剛性 D の微係数を求める. 式(2)に示したように, 曲げ剛性 D は弾性不変量 U_i および配向角 θ によって定まる.

t 層の配向角, 材料定数に関する曲げ剛性の偏微分を順に示す. まず, t 層の配向角 θ_t に関する偏微分は次のようになる.

$$\frac{\partial}{\partial \theta_t} \left\{ D_{11} \ D_{22} \ D_{12} \ D_{66} \ D_{16} \ D_{26} \right\}^T = \frac{h_0^3}{3} \{ t^3 - (t-1)^3 \} \times \begin{bmatrix} -2 \sin 2\theta_t & -4 \sin 4\theta_t \\ 2 \sin 2\theta_t & -4 \sin 4\theta_t \\ 0 & 4 \sin 4\theta_t \\ 0 & 4 \sin 4\theta_t \\ \cos 2\theta_t & 4 \cos 4\theta_t \\ \cos 2\theta_t & -4 \cos 4\theta_t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2^{(t)} \\ U_3^{(t)} \end{Bmatrix} \quad (25)$$

材料定数に関する偏微分は第 t 層の E_x , E_y , ν_x , E_s を a_i で代表させると次式で表される.

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \left\{ D_{11} \ D_{22} \ D_{12} \ D_{66} \ D_{16} \ D_{26} \right\}^T = \frac{h_0^3}{3} \{ t^3 - (t-1)^3 \} \times \begin{bmatrix} \partial U_1^{(t)} / \partial a_i & \cos 2\theta_t & \cos 4\theta_t \\ \partial U_1^{(t)} / \partial a_i & -\cos 2\theta_t & \cos 4\theta_t \\ \partial U_4^{(t)} / \partial a_i & 0 & -\cos 4\theta_t \\ \partial U_5^{(t)} / \partial a_i & 0 & -\cos 4\theta_t \\ 0 & \sin 2\theta_t / 2 & \sin 4\theta_t \\ 0 & \sin 2\theta_t / 2 & -\sin 4\theta_t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{\partial U_2^{(t)}}{\partial a_i} \\ \frac{\partial U_3^{(t)}}{\partial a_i} \end{Bmatrix} \quad (26)$$

これらより, 各層の材料定数に関する曲げ剛性 D_{ij} の微分は配向角およびそのプライの位置 t に依存することがわかる. たとえば, 同一材料からなるアングルプライ積層板 $([+(\theta/-\theta)_m]_s)$ の場合は, D_{11} , D_{22} , D_{12} および D_{66} の材料変数に関する微分は $(t^3 - (t-1)^3)$ に比例する. 一方, D_{16} , D_{26} の材料変数に関する微分はその絶対値が $(t^3 - (t-1)^3)$ に比例する. つまり, 外側プライが曲げ剛性に対して支配的な影響をおよぼす.

5.2 U_i の偏微分項 材料定数 E_x , E_y , ν_x , E_s に関する弾性不変量 U_i の偏微分は, 式(3)より次式で表される.

$$\frac{\partial U_1}{\partial E_x} = \frac{3E_x^2 - 6\nu_x^2 E_x E_y - 2\nu_x^3 E_y^2 - 3\nu_x^2 E_y^2}{8(E_x - \nu_x^2 E_y)^2}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_2}{\partial E_x} &= \frac{E_x^2 - 2\nu_x^2 E_x E_y + \nu_x^2 E_y^2}{2(E_x - \nu_x^2 E_y)^2} \\ \frac{\partial U_3}{\partial E_x} &= \frac{\partial U_5}{\partial E_x} = \frac{(E_x - \nu_x E_y)(E_x + \nu_x E_y - 2\nu_x^2 E_y)}{8(E_x - \nu_x^2 E_y)^2} \\ \frac{\partial U_4}{\partial E_x} &= \frac{E_x^2 - 2\nu_x^2 E_x E_y - 6\nu_x^3 E_y^2 - \nu_x^2 E_y^2}{8(E_x - \nu_x^2 E_y)^2}\end{aligned}\quad (27)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_1}{\partial E_y} &= \frac{E_x^2(3 + 2\nu_x + 3\nu_x^2)}{8(E_x - \nu_x^2 E_y)^2} \\ \frac{\partial U_2}{\partial E_y} &= \frac{E_x^2(\nu_x^2 - 1)}{2(E_x - \nu_x^2 E_y)^2} \\ \frac{\partial U_3}{\partial E_y} &= \frac{\partial U_5}{\partial E_y} = \frac{E_x^2(1 - \nu_x)^2}{8(E_x - \nu_x^2 E_y)^2} \\ \frac{\partial U_4}{\partial E_y} &= \frac{E_x^2(1 + 6\nu_x + \nu_x^2)}{8(E_x - \nu_x^2 E_y)^2}\end{aligned}\quad (28)$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial E_s} = \frac{\partial U_5}{\partial E_s} = \frac{1}{2} \quad \frac{\partial U_2}{\partial E_s} = 0 \quad \frac{\partial U_3}{\partial E_s} = \frac{\partial U_4}{\partial E_s} = -\frac{1}{2} \quad (29)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_1}{\partial \nu_x} &= \frac{E_x E_y (E_x + 3\nu_x E_x + 3\nu_x E_y + \nu_x^2 E_y)}{4(E_x - \nu_x^2 E_y)^2} \\ \frac{\partial U_2}{\partial \nu_x} &= \frac{\nu_x E_x E_y (E_x - E_y)}{(E_x - \nu_x^2 E_y)^2} \\ \frac{\partial U_3}{\partial \nu_x} &= \frac{\partial U_5}{\partial \nu_x} = \frac{E_x E_y (\nu_x - 1)(E_x - \nu_x E_y)}{4(E_x - \nu_x^2 E_y)^2} \\ \frac{\partial U_4}{\partial \nu_x} &= \frac{E_x E_y (3E_x + \nu_x E_x + \nu_x E_y + 3\nu_x^2 E_y)}{4(E_x - \nu_x^2 E_y)^2}\end{aligned}\quad (30)$$

これにより、各層の材料定数および配向角に対する曲げ剛性の偏微分が得られる。これを式(23)、(24)に代入することで、ガレルキン法の剛性マトリクスの各成分に対する偏微分項が得られる。さらにその偏微分項を式(17)に代入することで、座屈荷重の感度を得ることができる。

6 重根固有値に対する問題

座屈荷重が重根となる場合を考える。一般に、座屈モードが (m, n) から $(m+1, n)$ あるいは $(m, n+1)$ に変化する場合が多いので、この場合に限って考える。

この場合に考慮すべき二つの固有値で、重根になる直前での座屈荷重に対応するモード (m, n) で $m+n$ が奇数であれば、重根になったときのもう一方のモードの和は $m+n+1$ で偶数となる。あるいはその逆が成り立つ。つまり、この重根をはさんで、 $m+n$ は偶数から奇数へ、あるいは奇数から偶数へと変化する。すでに示したように、ガレルキン法で得られた座屈方程式は、 $m+n$ が奇数の場合と偶数の場合に分離できる。したがって、この場合に得られる固有ベクトルは、 $m+n$ が奇数あるいは偶数に対応する成分しかもたない。このとき、式(22)の $f_{12} = f_{21}$ は $\mathbf{0}$ となる。こ

れにより、式(21)は対角成分のみが残る。したがって、固有値の変化は設計変数の変化方向 $\Delta \mathbf{a}$ に関係なく、単根に対する感度と同じ手法で求めることができる。しかし、設計変数の変化によって二重根が二つの単根へと分離するときに、最小固有値の方を座屈荷重とするように選ぶことに注意しなければならない。また、座屈荷重が三重根以上の多重根になるとき、あるいは二重根であっても $m+n$ が共に偶数あるいは共に奇数となるときは、4.3節で示した手順により、重根に対する固有値の感度を求める必要がある。

7 計算例

計算例として、T300/5208 からなる8層対称アングルブライ積層板 $[(+\theta/-\theta)_2]_s$ が周辺単純支持された場合を考える。材料定数は、 $E_x = 181.0 \text{ GPa}$, $E_y = 10.3 \text{ GPa}$, $E_s = 7.17 \text{ GPa}$ および $\nu_x = 0.28$ である。ガレルキン法で $M = 10$, $N = 10$ と設定し、 $m+n$ が奇数の場合と偶数の場合に分離した 50×50 の2つのマトリクスを用いて座屈荷重の計算を行った。ここでは、積層構成の影響を考えるために、座屈荷重 λ を次式で示すように積層板の長さ a 、アスペクト比 R および板厚 h を用いて規準化する。

$$\lambda^* = 12a^2\lambda/(\pi^2 R^2 h^3) \quad (31)$$

以下に示す感度はこの規準化された座屈荷重に対する感度である。

7.1 固有モードの影響と重根固有値に関する感度
単軸圧縮荷重を受ける場合 ($N_x = 1$, $N_y = N_{xy} = 0$) の $[(+\theta/-\theta)_2]_s$ 積層板で、配向角を 0° から 90° の間での低次モードの固有値を図3-(a)に示す。 $58^\circ \sim 59^\circ$ で座屈荷重に対応する最低次の固有値のモードが変化し、 $67^\circ \sim 68^\circ$ で二番目に低い固有値のモードが変化する。

次に、1番目と2番目の固有値の最外層の E_x に対する感度を図3-(b)に示す。 $58^\circ \sim 59^\circ$ では一次モードと二次モードが入れ替わるため、感度が不連続になることが分かる。この重根は、 $m+n$ が偶数から奇数へと変化する場合に相当するので、6章に示したように、2つの固有値に対する単根の感度として計算できる。また、 $67^\circ \sim 68^\circ$ で二次モードが変化するの、ここでも感度が不連続になる。この場合は $m+n$ がともに偶数のモードによる重根なので、4.3節に示した重根に対する感度解析が必要となる。

いずれの場合も重根では異なった2つの感度が存在することになる。したがって、最適化を行う際にはこれを考慮して探索方向を求める必要がある。

(a) Lower eigenvalues.

(b) Sensitivity with respect to E_x of the outer-most ply.

Fig. 3 Lower eigenvalue and their sensitivities.

7.2 積層構成の影響 配向角が座屈荷重におよぼす影響は、その絶対値の変動が問題となる。単軸圧縮荷重を受ける場合の各層の配向角に関する絶対感度 $\partial\lambda/\partial\theta$ を図 4 に示す。ここで、“4th ply”は最外層、“1st ply”は対称面に最も近い最内層である。図 3-(b)と同様に、座屈モードが変化する点で不連続となる。配向角の値によっては負の値をとることもあり、積層構成によって大きく異なる。また、感度の絶対値が大きく、配向角の変動が座屈荷重におよぼす影響は大きい。

材料定数の変動が座屈荷重におよぼす影響は、絶対感度と材料定数の積である相対感度 $(\partial\lambda/\partial a_i) \times a_i$ で表される。単軸圧縮荷重を受ける場合の各層の材料定数に対する座屈荷重の相対感度を図 5 に示す。この感度の値はすべての配向角において常に正となる。すなわち、材料定数の値が増加すれば座屈荷重は上昇する。

各材料定数に関する相対感度を比較すると、 E_x に関する感度が大きい。これより、 E_x の変動に対する座屈荷重の変動が大きく、 E_y 、 E_s 、 ν_x の変動に対して座屈荷重の変化は小さいことがわかる。

座屈荷重は曲げ剛性に支配されるので、一般に外側の層が座屈荷重に与える影響が内側の層が与える影響

Fig. 4 Buckling load sensitivity with respect to the ply orientation angle.

よりも大きいことが知られている。しかし、 $59^\circ \sim 64^\circ$ 付近の E_x に関する感度は、内側の層に対する感度が外側の層に対する感度よりも大きい。また、せん断荷重を受けるとき ($N_x = N_y = 0, N_{xy} = 1$) は、広い範囲で内側の層に対する感度の方が大きくなっていることがわかる (図 6 参照)。これは、カップリング項 D_{16} 、 D_{26} の影響であることを後で示す。

座屈荷重は曲げ剛性の関数であり、曲げ剛性に対しては外側のプライの影響が中央面からの距離の二乗に比例するので、一般に座屈に関しても外側プライの影響が支配的になると考えられている。しかし、これらの結果から見ると外側プライに関する感度の方が内側プライに関する感度よりも小さくなる場合もあり、外側プライの影響が支配的になるとは言えない。

7.3 曲げ剛性 D_{ij} に関する感度解析 ここでは、外側プライに関する感度が内側プライに関する感度よりも小さくなる原因を考える。既に述べたように、曲げ剛性 D_{ij} には外側プライが支配的な影響をおよぼすことが分かっている。したがって、曲げ剛性の各要素が座屈荷重に与える影響を明らかにすることにする。

a カップリング項を無視した場合 カップリング項を無視した場合の座屈荷重は式 (7) で表されるように、曲げ剛性の各成分に関して線形なので、その微分は次式で表されるように座屈半波数が同じ区間では一定となる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial\lambda}{\partial D_{11}} &= \frac{\pi^2 m^4}{a^2(m^2 N_x + n^2 R^2 N_y)} \\ \frac{\partial\lambda}{\partial D_{22}} &= \frac{\pi^2 n^4 R^4}{a^2(m^2 N_x + n^2 R^2 N_y)} \\ \frac{\partial\lambda}{\partial D_{12}} &= \frac{2\pi^2 m^2 n^2 R^2}{a^2(m^2 N_x + n^2 R^2 N_y)} \\ \frac{\partial\lambda}{\partial D_{66}} &= \frac{4\pi^2 m^2 n^2 R^2}{a^2(m^2 N_x + n^2 R^2 N_y)} \end{aligned} \quad (32)$$

たとえば、アングルプライ積層板 $([+\theta/-\theta]_m)_s$ の

(a) With respect to E_x . (b) With respect to E_y . (c) With respect to E_s . (d) With respect to ν_x .

Fig. 5 Buckling load sensitivity with respect to the material constants.

Fig. 6 Shear buckling load sensitivity with respect to E_x .

場合は、 D_{11} 、 D_{22} 、 D_{12} および D_{66} の材料変数に関する微分は $(t^3 - (t-1)^3)$ に比例する。座屈荷重の曲げ剛性に関する微分は座屈半波数にのみ支配されるので、各層の変数に関する座屈荷重の感度は、 $(t^3 - (t-1)^3)$ に支配される。

カップリング項を無視した場合の、単軸圧縮荷重を受ける $[(+0/-0)_2]_S$ 積層板の感度解析の結果を図7に示す。曲げ剛性 D_{ij} に関する座屈荷重の感度は、座屈モードが同一の領域では一定であることが分かる。 E_x に関する感度では、最外層である第4層の感度に比べ、第3層の感度は $(3^3 - 2^3)/(4^3 - 3^3) = 0.51$ 倍に、第2層の感度は $(2^3 - 1^3)/(4^3 - 3^3) = 0.19$ 倍に、第1層の感度は $1/(4^3 - 3^3) = 0.027$ 倍となっている。他の材料定数に対しても同じことが成り立つ。配向角に関する感度は、配向角の正負によって、感度の正負も異なっているが、その絶対値は材料定数と同様に $t^3 - (t-1)^3$ に比例している。この結果は、カップリングを考慮した場合の結果(図4, 5)と大きく異なっている。

b カップリング項を考慮した場合 カップリングを考慮した場合、曲げ剛性に関する剛性マトリクス K の微分は次式で表される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_{mn}}{\partial D_{11}} &= \pi^4 m^4 & \frac{\partial K_{mn}}{\partial D_{22}} &= \pi^4 n^4 R^4 \\ \frac{\partial K_{mn}}{\partial D_{12}} &= 2\pi^4 m^2 n^2 R^2 & \frac{\partial K_{mn}}{\partial D_{66}} &= 4\pi^4 m^2 n^2 R^2 \\ \frac{\partial K_{mn}^{ij}}{\partial D_{16}} &= -32\pi^2 mn(m^2 + i^2)RM_{ij} & (33) \\ \frac{\partial K_{mn}^{ij}}{\partial D_{26}} &= -32\pi^2 mn(n^2 + j^2)R^3M_{ij} \end{aligned}$$

これを、式(17)に代入して、曲げ剛性に関する座屈荷重の感度が求められる。

単軸圧縮荷重を受ける場合のこの感度を図8に示す。 D_{11} 、 D_{22} 、 D_{12} 、 D_{66} に関する感度が配向角によってほんのわずかであるが変化していることがわかる。また、これらの値はいつも正であるのに対して、 D_{16} 、

(a) With respect to D_{ij} . (b) With respect to E_x .

Fig. 7 Buckling load sensitivity without coupling.

D_{26} に関する感度は負となっている。したがって、カップリング項が増加するにつれて座屈荷重は減少する。

各層が曲げ剛性におよぼす影響はすべての成分に対して中央面からプライ位置までの距離の三乗に比例し外側プライがおよぼす影響が支配的になる。カップリング項を考慮しない場合は、座屈荷重の曲げ剛性に関する微分が同じ座屈モードに対しては一定であるために、各層の変数が曲げ剛性に与える影響と座屈荷重に与える影響は同じように外側プライが支配的になる。

しかし、カップリング項を考慮すると、座屈荷重の曲げ剛性に関する微分は、カップリングを考慮しない場合に比べて大きく異なってくる。特にここで示した例では、カップリング項に関する微分が負の値になる。そのために、外側プライが与える影響よりも内側プライが与える影響の方が大きくなる場合もある。各層の変動が座屈荷重の変動におよぼす影響を考慮するときにはこのことに注意しなければならない。

8 結論

単純支持された対称積層板の座屈荷重に対する各種の変動要因の影響を評価するために、各層の材料

Fig. 8 Buckling load sensitivity with respect to D_{ij} with coupling.

定数および配向角が独立に変化する場合を仮定し、単純支持された対称積層板の座屈荷重をガレルキン法で求め、各層の材料定数および配向角に関する感度解析法の定式化を行った。単根および重根に対する一般的な感度評価法を与えると同時に、特別な場合には、二重根になる場合でも単根と同じように感度を求めることができることを示した。

また、数値計算例から次の結論が得られた。

- 座屈荷重の対する感度は、繊維方向のヤング率 E_x および配向角に関する感度が支配的となる。
- 曲げ剛性に支配される座屈荷重は、一般に外側の層の影響が内側の層の影響よりも大きいことが知られているが、積層構成や荷重条件によってはカップリング項 D_{16} 、 D_{26} による影響のためにそれが成り立たない。

参考文献

- 日本機械学会 編, 構造・材料の最適設計, (1989), 技報堂出版。
- Haftka, R. T., and Gürdal, Z., *Elements of Structural Optimization*, Third revised and expanded edition, (1992), Kluwer Academic Publishers.
- Whitney, J. M., *Structural Analysis of Laminated Anisotropic Plates*, (1987), Technomic.
- 中桐 滋, 久田 俊明, 確率有限要素法入門, (1985), 培風館。
- Seyranian, A. P., Lund, E., and Olhoff, N., Multiple Eigenvalues in Structural Optimization Problems, *Structural Optimization*, Vol. 8, (1994), pp. 207 - 227.
- Tsai, S. W., and Hahn, H. T. 著, 藤井 太一 監訳, 複合材料の強度解析と設計入門, (1986), 日刊工業新聞社。