複合材料のマイクロ構造における幾何学的非線形性と 破壊を考慮した均質化解析手法*

高野 直 樹^{*1}, 座 古 勝^{*1}
平 郡 久 司^{*2}, 菊 池 昇^{*2}

Homogenization Analysis Method for Composites Considering Geometrical Nonlinearity and Fracture of Microstructure

Naoki TAKANO, Masaru ZAKO,
Hisashi HEGURI and Noboru KIKUCHI

For the design and production of new advanced composite materials and structures, the need for numerical simulations of their mechanical behaviors is increasing. There are two requirements for the simulation. First, microstructural architectures must be considered. The homogenization analysis method, which is an applied mathematical method developed from late 1970's to early 1980's, seems to be the most appropriate method for modelling microstructures in current literature. The second requirement is the solution of nonlinear problems. Therefore, we have developed a nonlinear homogenization method where both geometrical nonlinearity due to large deformation of microstructures and material nonlinearity due to microscopic fractures are considered. The new formulation of the nonlinear homogenization method is based on a stepwise linear algorithm with initial stresses. Two examples, i. e., biomechanical problem and fracture behavior of woven fabric composite material, were solved.

Key Words: Homogenization Method, Composite Material, Nonlinear Problem, Large Deformation, Fracture

1. 結 言

金属材料の非線形力学挙動は現象的にも理論的にも説明されているが、複合材料に関しては、実験結果は数多く報告されているものの、理論的な研究が遅れている。一方、航空・宇宙、生体などの分野で用いられる最先端材料としての複合材料設計には、非線形性も含めた力学的挙動の解明が必須である。特に、複雑なマイクロ構造を有する織物複合材料などではマイクロメカニクス的アプローチが必要となる。そこで最近、このアプローチとしての均質化法に関心が集まっている。しかし、1970年代後半以降欧米の応用数学者ら⁽¹⁾により開発されてきた均質化法は、Guedes⁽²⁾、Chen⁽³⁾により熱弾塑性問題に適用されたほかには、非線形問題への適用例は報告されていない。

かかる理由から本論文では、マイクロ構造における幾何学的非線形性と、マイクロスコピックな破壊による材料非線形性の両者を考慮した非線形均質化法を提案する。前者はエラストマなどを基とするいわゆるFlexible Composites⁽⁴⁾や、骨、腱、靱帯などの生体力

学シミュレーション⁽⁵⁾において重要な問題であり、後者は構造材料としての複合材料の強度予測において重要な問題である。

マイクロ構造の変形状態を議論した研究にGlobal/Local Analysis⁽⁶⁾やRVE法⁽⁷⁾的なアプローチ⁽⁸⁾がある。しかし、Global/Local AnalysisではLocalモデルの境界での変位は、Globalモデルで適当な補間関数を仮定しないと求まらない。同様に、RVE法的なアプローチでも境界条件定義があいまいであるため、適用問題に限度がある⁽⁹⁾。そこで、ここで提案するマイクロ構造の大変形を考慮した均質化法は最も有効な手法であると考えられる。

また、提案手法は繰返し線形弾性解析に基づくステップ解析であり、前ステップまでの履歴を単に初期応力として扱うため、Guedes⁽²⁾やChen⁽³⁾による増分形(Rate Form)の定式化に比べ簡便な解析が可能となる。

以下、2章では初期応力を考慮した均質化法の定式化とステップ解析アルゴリズムを示す。3章ではマイクロ構造における大変形による非線形解析例として腱の解析を行い、実験結果と比較する。4章では、マイクロスコピックな破壊による解析例として織物複合材料平板の破壊挙動解析を行う。

* 原稿受付 1995年2月8日。

^{*1} 正員、大阪大学工学部 (〒565 吹田市山田丘2-1)。

^{*2} The University of Michigan (Ann Arbor, MI48109, USA)。

2. 定 式 化

2.1 初期応力を考慮した均質化法の定式化 三次元弾性体 Ω が周期的なマイクロスコピックなユニットセル Y の集合体であると仮定する。マクロスケール $\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3)$ に対し、ユニットセルにおける局所座標を $\mathbf{y}=(y_1, y_2, y_3)$ により定義し、そのスケール比 ε を $\mathbf{y}=\mathbf{x}/\varepsilon$ とすれば ε は非常に小さな数となる。この三次元弾性体の力学問題はマイクロ構造に依存するが、これを摂動法の問題ととらえ変位を式(1)のようにおく。式(1)の妥当性についてはすでに議論されている⁽²⁾。 $\mathbf{u}^\varepsilon$ はマイクロ構造の影響を考慮した変位ベクトル、 $\mathbf{u}^0, \mathbf{u}^1$ はそれぞれマクロ、マイクロスコピックな変位ベクトルである。

$$\mathbf{u}^\varepsilon \approx \mathbf{u}^0(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{u}^1(\mathbf{x}, \mathbf{y} = \mathbf{x}/\varepsilon) \quad (1)$$

ひずみベクトル $\mathbf{e}$ は、

$$\mathbf{e} = \partial_x \mathbf{u}^\varepsilon$$

$$\partial_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \end{bmatrix}^T$$

.....(2)

より定義されるため、これに式(1)を代入して整理すると、

$$\mathbf{e} \approx \partial_x \mathbf{u}^0 + \partial_y \mathbf{u}^1 \quad (3)$$

を得る。次に、応力-ひずみ関係を

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}^\varepsilon \mathbf{e} + \boldsymbol{\sigma}_0^\varepsilon \quad (4)$$

により定義する。ここに、 $\mathbf{E}^\varepsilon$ はマイクロ構造の影響を考慮した弾性応力-ひずみマトリックス、 $\boldsymbol{\sigma}_0^\varepsilon$ は初期応力である。解くべき問題を弱形式表示すると式(5)となる。

$$\int_\Omega (\delta \mathbf{e})^T \mathbf{E}^\varepsilon \mathbf{e} d\Omega = \int_{\Gamma_t} (\delta \mathbf{u}^0)^T \mathbf{t} d\Gamma - \int_\Omega (\delta \mathbf{e})^T \boldsymbol{\sigma}_0^\varepsilon d\Omega$$

$$\forall \delta \mathbf{u}^\varepsilon \quad (5)$$

ここに $\mathbf{t}$ は表面力を表す。これに式(3)を代入すれば、

$$\int_\Omega (\partial_x \delta \mathbf{u}^0 + \partial_y \delta \mathbf{u}^1)^T \mathbf{E}^\varepsilon (\partial_x \mathbf{u}^0 + \partial_y \mathbf{u}^1) dY d\Omega$$

$$= \int_{\Gamma_t} (\delta \mathbf{u}^0)^T \mathbf{t} d\Gamma - \int_\Omega (\partial_x \delta \mathbf{u}^0 + \partial_y \delta \mathbf{u}^1)^T \boldsymbol{\sigma}_0^\varepsilon d\Omega$$

$$\forall \delta \mathbf{u}^0, \delta \mathbf{u}^1 \quad (6)$$

を得る。ここで、 $\varepsilon \rightarrow 0$ とし平均化原理⁽¹⁾を適用すれば、

$$\int_\Omega \frac{1}{|Y|} \int_Y (\partial_x \delta \mathbf{u}^0 + \partial_y \delta \mathbf{u}^1)^T \mathbf{E} (\partial_x \mathbf{u}^0 + \partial_y \mathbf{u}^1) dY d\Omega$$

$$= \int_{\Gamma_t} (\delta \mathbf{u}^0)^T \mathbf{t} d\Gamma - \int_\Omega \frac{1}{|Y|} \int_Y (\partial_x \delta \mathbf{u}^0 + \partial_y \delta \mathbf{u}^1)^T \boldsymbol{\sigma}_0 dY d\Omega \quad \forall \delta \mathbf{u}^0, \delta \mathbf{u}^1 \quad (7)$$

を得る。ここに、 $|Y|$ はユニットセルの体積を表す。式(7)が任意の仮想変位について成立するためには、

$$\int_\Omega \frac{1}{|Y|} \int_Y (\partial_y \delta \mathbf{u}^1)^T \mathbf{E} (\partial_x \mathbf{u}^0 + \partial_y \mathbf{u}^1) dY d\Omega$$

$$= - \int_\Omega \frac{1}{|Y|} \int_Y (\partial_y \delta \mathbf{u}^1)^T \boldsymbol{\sigma}_0 dY d\Omega \quad \forall \delta \mathbf{u}^1$$

.....(8)

$$\int_\Omega \frac{1}{|Y|} \int_Y (\partial_x \delta \mathbf{u}^0)^T \mathbf{E} (\partial_x \mathbf{u}^0 + \partial_y \mathbf{u}^1) dY d\Omega$$

$$= \int_{\Gamma_t} (\delta \mathbf{u}^0)^T \mathbf{t} d\Gamma - \int_\Omega \frac{1}{|Y|} \int_Y (\partial_x \delta \mathbf{u}^0)^T \boldsymbol{\sigma}_0 dY d\Omega$$

$$\forall \delta \mathbf{u}^0 \quad (9)$$

が成り立たねばならない。式(8)はマイクロスコピックな平衡方程式、式(9)なマクロスコピックな平衡方程式であり、両式を同時に満足する解を求めることになる。

ここで、マイクロスコピックな変位が次式のように変数分離できると仮定する。

$$\mathbf{u}^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\boldsymbol{\chi}(\mathbf{y}) \partial_x \mathbf{u}^0(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y}) \quad (10)$$

ここに、 $\boldsymbol{\chi}$ は異種材料より成る複合材料の材料物性の違いによる特性変位、 $\boldsymbol{\varphi}$ は初期応力による特性変位である。式(10)をマイクロスコピックな平衡方程式(8)に代入し、

$$\int_\Omega \frac{1}{|Y|} \int_Y (\partial_y \delta \mathbf{u}^1)^T \mathbf{E} \{ (\mathbf{I} - \partial_y \boldsymbol{\chi}) \partial_x \delta \mathbf{u}^0 + \partial_y \boldsymbol{\varphi} \} dY d\Omega$$

$$= - \int_\Omega \frac{1}{|Y|} \int_Y (\partial_y \delta \mathbf{u}^1)^T \boldsymbol{\sigma}_0 dY d\Omega \quad \forall \delta \mathbf{u}^1$$

.....(11)

を得る。上述の仮定より $\boldsymbol{\chi}$ および $\boldsymbol{\varphi}$ はそれぞれ、

$$\int_Y (\partial_y \delta \mathbf{u}^1)^T \mathbf{E} \partial_y \boldsymbol{\chi} dY = \int_Y (\partial_y \delta \mathbf{u}^1)^T \mathbf{E} dY \quad \forall \delta \mathbf{u}^1$$

.....(12)

$$\int_Y (\partial_y \delta \mathbf{u}^1)^T \mathbf{E} \partial_y \boldsymbol{\varphi} dY = - \int_Y (\partial_y \delta \mathbf{u}^1)^T \boldsymbol{\sigma}_0 dY$$

$$\forall \delta \mathbf{u}^1 \quad (13)$$

を解くことにより得られる。式(12)、(13)はユニットセルの周期境界条件のもとで唯一解をもつ⁽¹⁾。また、マクロスコピックな平衡方程式(9)は、

$$\int_\Omega (\partial_x \delta \mathbf{u}^0)^T \frac{1}{|Y|} \int_Y \mathbf{E} (\mathbf{I} - \partial_y \boldsymbol{\chi}) dY (\partial_x \mathbf{u}^0) d\Omega$$

$$= \int_{\Gamma_t} (\delta \mathbf{u}^0)^T \mathbf{t} d\Gamma - \int_\Omega (\partial_x \delta \mathbf{u}^0)^T \frac{1}{|Y|} \int_Y \boldsymbol{\sigma}_0 dY d\Omega$$

$$- \int_\Omega (\partial_x \delta \mathbf{u}^0)^T \frac{1}{|Y|} \int_Y \mathbf{E} \partial_y \boldsymbol{\varphi} dY d\Omega \quad \forall \delta \mathbf{u}^0$$

.....(14)

のように変形できる。ここで、均質化された等価物性

値, 均質化された初期応力を

$$\mathbf{E}^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y \mathbf{E}(\mathbf{I} - \partial_y \chi) dY \quad (15)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_0^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y (\boldsymbol{\sigma}_0 + \mathbf{E} \partial_y \varphi) dY \quad (16)$$

により定義すれば, マクロスコピックな平衡方程式は簡単に式(17)のように書ける,

$$\int_{\Omega} (\partial_x \delta \mathbf{u}^0)^T \mathbf{E}^H (\partial_x \mathbf{u}^0) d\Omega = \int_{\Gamma_t} (\delta \mathbf{u}^0)^T \mathbf{t} d\Gamma - \int_{\Omega} (\delta \mathbf{u}^0)^T \boldsymbol{\sigma}_0^H d\Omega \quad \forall \delta \mathbf{u}^0 \quad (17)$$

マイクロスコピックな応力は,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{E} \mathbf{e} + \boldsymbol{\sigma}_0 \\ &= \mathbf{E} \{ (\mathbf{I} - \partial_y \chi) \partial_x \mathbf{u}^0 + \partial_y \varphi \} + \boldsymbol{\sigma}_0 \end{aligned} \quad (18)$$

より計算できる,

なお, 上式はすべて, 有限要素法により離散化することにより容易に解ける,

2.2 繰返し弾性解析に基づく非線形均質化解析手法
2.1 節で示した定式化は弾性範囲において成り立つ, 2.2 節では, 非線形問題を区間線形化し初期応力を用いた繰返し弾性解析により解く手法を示す, ただし荷重増分は十分小さくとることにする, 以下に解析手順を示す,

(1) 第1ステップ

第1ステップでは初期応力がないので, 以下のようになる,

(a) 初期状態でマイクロスコピックな式(12)を解き, 式(15)より等価物性値を求める,

(b) 初期荷重増分に対しマクロスコピックな式(19)を解く,

$$\int_{\Omega} (\partial_x \delta \mathbf{u}^0)^T \mathbf{E}^H (\partial_x \mathbf{u}^0) d\Omega = \int_{\Gamma_t} (\delta \mathbf{u}^0)^T \mathbf{t} d\Gamma \quad \forall \delta \mathbf{u}^0 \quad (19)$$

(c) マイクロスコピックな応力を式(20)より, 変位を式(21)より計算し, 初期のマイクロ構造の座標に変位を足し込み座標更新を行う,

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}(\mathbf{I} - \partial_y \chi) \partial_x \mathbf{u}^0 \quad (20)$$

Fig.1 Unit cell of microstructure of rat tendon

$$\mathbf{u}^1 = -\chi \partial_x \mathbf{u}^0 \quad (21)$$

(2) 第2ステップ以降繰返し

(a) 更新されたマイクロ構造の座標(形状)に対し, ステップのはじめにおけるマイクロスコピックな応力状態を初期応力として考慮に入れて式(12)および(13)を解き, 式(15), (16)により等価物性値, 均質化された初期応力を求める,

(b) 荷重増分に対しマクロスコピックな式(17)を解く,

(c) マイクロスコピックな応力を式(18)より, 変位を式(10)より計算し, ステップのはじめにおけるマイクロ構造の座標に足し込み座標更新を行う,

ここで, マイクロ構造における破壊を考慮する場合には, マイクロスコピックな応力に基づき破壊判定をマイクロ構造の有限要素ごとに行う, 本論文では Hoffman の破壊則⁽¹⁰⁾を用いた, 破壊した要素については, 破壊後, 応力 ひずみマトリックスを零(実際の数値計算では 1.0×10^{-5} を使用)として扱う,

3. マイクロ構造における大変形を考慮した非線形解析

例題として腱の引張特性のシミュレーションを行う, 腱のようにコラーゲン線維⁽¹¹⁾より成る生体軟組織の力学的特性の解明に数値シミュレーションの適用が盛んに試みられているが, 大変形の影響があることが知られており⁽¹²⁾, 非線形解析が必要となる, これには腱のマイクロスコピックな階層構造⁽¹³⁾を考慮した解析が必要不可欠となるため, 2章で示した非線形均質化法は有用であると考えられる,

図1に鼠の腱を想定し, マイクロスコピックなユニットセルの有限要素モデルを示す, 本モデルは線維(ヤング率 1500 MPa, ポアソン比 0.4)と間質物質(ヤン

Fig.2 Deformation of unit cell of tendon under tension

グ率 1 MPa, ポアソン比 0.49) から成り, 線維の体積含有率は 49% である^{(13)~(16)}. 波状の線維形状は $\sin$ 関数とし, 周期長さは $200\ \mu\text{m}$ とした⁽¹⁵⁾.

図 2 にシミュレーションより得られたユニットセルの変形を示す. これは Diamant ら⁽¹⁶⁾ の実験写真の結果と良好に一致している. 図 3 にはマクロスコピック

Fig. 3 Relation between tensile strain and load

Fig. 4 Comparison of tangential modulus between experiments and simulation

Fig. 5 Uniform tension of woven fabric composite materials

な荷重とひずみの関係を示す. 波状の線維が伸ばされ, 傾きが立上り硬化する様子がわかる. この傾きの変化を実験⁽¹⁶⁾⁽¹⁷⁾と比較して図 4 に示す. ここで, 実験では立上り後の傾きだけが測定可能であり, 立上り時のひずみ値の測定は極めて困難である⁽¹⁴⁾. したがって, シミュレーションと実験結果は良好に一致しているといえる. なお, 上図では引張ひずみ増分を 0.3% ずつ与えた場合の結果を示したが, 引張ひずみ増分を 0.1% , 0.5% とした場合ともよく一致していた.

(a) Fiber bundle and resin

(b) Fiber bundle composed of fiber and resin

Fig. 6 Microstructural model of woven fabric composite material

Fig. 7 Stress-strain curve for woven fabric composite material under uniform tension

4. マイクロ構造における破壊を考慮した非線形解析

ステップ解析の過程においてマイクロ構造における破壊判定を Hoffman の破壊則⁽¹⁰⁾ により行い、繊維複合材料の破壊挙動解析を行う。

Fig. 8 Reduction of homogenized elastic constants due to microscopic fracture

図5に示す繊維複合材料平滑材の一樣引張解析を行う。本解析では全体にわたってマクロスコピックには一樣応力状態を想定しているため平滑材中のマクロな応力の分布はないとしており、平滑材全体で一つのマイクロ問題だけを解けばよいことになる。

図6にガラス繊維(ヤング率78 GPa, ポアソン比0.28)とエポキシ樹脂(ヤング率4 GPa, ポアソン比0.3)から成る繊維複合材料のマイクロモデルを示す。図6(a)のモデルは繊維束と樹脂より成る。繊維束の体積含有率は20.8%である。繊維束は図6(b)のように多数の繊維の束であるとした。図6(b)中、繊維の体積含有率は60%である。したがって、繊維複合材料中の繊維の体積含有率は約12.5%となる。本モデルの詳細⁽¹⁸⁾ は別報に詳しい。

図5中の角度 $\theta=0^\circ$ の場合の負荷応力とひずみの関係を図7に示す。図7より Knee 点の存在が認められる。

負荷応力の増加に伴う等価物性値の変化を図8に示す。初期状態では、面内で等方性($E_x=E_y$)である。引張方向(x 方向)の引張弾性係数 E_x は初期繊維束破壊

Fig. 9 Reduction of homogenized elastic constants against woven structure and applied stress

とともに低下するが、引張応力と垂直方向(y 方向)の引張弾性係数 E_y はなお高い値を維持している。このとき、引張方向の繊維束が破断した。さらに負荷応力を増すと引張応力と垂直方向の繊維束が破断し、 E_y も低下する。このように、マイクロスコピックな破壊を考慮すると弾性係数は徐々に低下することがわかる。図9には θ を $0^\circ \sim 45^\circ$ の範囲で 7.5° 間隔で変化させ、同様の計算を行った結果をまとめたものを示す。

今後、図6(a)において、より細かい要素分割を行うとともに、繊維束断面形状をだ円形にした現実的なモデルを用いれば、微視破壊進展解析が詳細に行えることがわかった。

5. 結 言

本論文では、複合材料のマイクロ構造における幾何学的非線形性と、マイクロスコピックな破壊による材料非線形性を考慮した非線形力学挙動の均質化解析手法を提案した。腱の大変形下での硬化、および繊維複合材料の破壊挙動の解析を行い、これまでに報告されている実験結果と比較し良好な結果が得られることを示した。

腱の解析を行うにあたり、Scott J. Hollister 教授 (Orthopaedic Research Laboratories, The University of Michigan) には有益なご指導をいただいたので深謝する。

文 献

- (1) 例えば, Lions, J. L., *Some methods in the mathematical analysis of systems and their control*, (1981), Science Press, Beijing.
- (2) Guedes, J. M., *Nonlinear computational models for composite materials using homogenization*, (1990), 106, Ph. D. dissertation, the University of Michigan.
- (3) Chen, C. H., *Modeling of the thermal elasto plastic behavior for composite materials using the homogenization method*, (1992), 146, Ph. D. dissertation, The University of Michigan.
- (4) Chou, T. W., *Microstructural design of fiber composites*, (1992), 443, Cambridge University Press.
- (5) 例えば, Hollister, S. J. and Riemer, B. A., *SPIE Vol. 2035 Mathematical Methods in Medical Imaging II*, (1993), 95.
- (6) Woo, K. and Whitcomb, J., *J. Compos. Mater.*, **28** 14 (1994), 1305-1321.
- (7) Hashin, Z., *J. Appl. Mech.*, **60**(1983), 481-505.
- (8) 古野利男・ほか2名, *機論*, **60**-573, A(1994), 1260-1265.
- (9) Hollister, S. J. and Kikuchi, N., *Comp. Mech.*, **10**(1992), 73-95.
- (10) Hoffman, O., *J. Compos. Mater.*, **1**(1967), 200-206.
- (11) 日本機械学会編, *生体力学*, (1991), 65, オーム社.
- (12) 日本機械学会編, *バイオメカニクス概説*, (1993), 52, オーム社.
- (13) Kastelic, J., ほか2名, *Connective Tissue Res.*, **6**(1978), 11-23.
- (14) Kastelic, J., ほか2名, *J. Biomech.*, **13**(1980), 887-893.
- (15) Ault, H. K. and Hoffman, A. H., *J. Biomech. Eng.*, **114** (1992), 142-146.
- (16) Diamant, J., ほか4名, *Proc. R. Soc. Lond.*, **180**(1972), 293-315.
- (17) Haut, R. C. and Little, R. W., *J. Biomech.*, **5**(1972), 423-430.
- (18) 高野直樹・ほか2名, *機論*, **61** 585, A(1995), 1038-1043.