面内混合モード非定常高速伝播き裂先端漸近解の数式処理による導出*

西岡 俊久^{*1}, 近藤 慶治^{*2}

Derivation of In-plane Mixed-Mode Asymptotic Solutions for an Unsteadily Fast-Propagating Crack Tip Using a Symbolic Manipulation System

Toshihisa NISHIOKA and Keiji KONDO

Explicit expressions for in plane mixed mode asymptotic solutions of an unsteadily fast propagating crack tip had not been derived so far, due to seemingly insurmountable mathematical and algebraic difficulties. To overcome these difficulties, a symbolic manipulation system was used in the present study. The explicit expressions for the mixed mode transient stress and displacement fields up to the first five terms ($n=0\sim4$) in asymptotic series were successfully derived. It was found that the transient effects do not appear in the first three terms (rigid body ($n=0$), singular ($n=1$) and constant stress ($n=2$) terms), but appear only in the higher order terms greater than or equal to the third order ($n\geq3$). The transient effects in the near tip stress distributions were also visualized using the symbolic manipulation system. It was found that both effects of the crack acceleration and of the changes in the asymptotic coefficients increase the stress distribution ahead of the propagating crack tip. These stress increases in the unsteady part may clarify the problem of the crack acceleration effects in the dynamic fracture toughness versus crack velocity curves, which is one of important unsolved problems in dynamic fracture mechanics.

Key Words: Fracture Mechanics, Crack Propagation, Brittle Fracture, Elasticity, Stress Wave, Asymptotic Expansion, In plane Mixed Mode, Algebraic Manipulation, Dynamic Crack Propagation

1. 緒言

動的破壊力学の基礎を確立するためには、動的伝播中のき裂先端の漸近的挙動を把握することが極めて重要である。また、き裂先端漸近解は動的破壊力学の理論的基礎への貢献のみならず、動的破壊に関連する計算力学や実験力学などへの適用も期待できる。

弾性体中を高速で伝播するき裂先端の漸近解については、定常状態について Nishioka・Atluri⁽¹⁾により全モード統一的に導かれている。非定常漸近解については、はじめにモード I き裂伝播に対して、Freund・Rosakis ら^{(2),(3)}が応力場の漸近解第3次項まで解析的表示式を導出した。さらに最近、混合モードき裂伝播に対して、Deng⁽⁴⁾により漸近解導出の試みがなされた。しかしながら、数学的複雑さと膨大な代数処理のため、混合モード非定常漸近解の陽な表示式やモード I の第4次項以上の陽な表示式は導出に成功していない。また、モード I も含めて、変位場の非定常漸近解は著者らの知るかぎり、全く求められていない。変位場表示式から応力場表示式を求めることができるが、逆は一般に不可能であり、変位場の陽な表示式導出自身も極めて重要である。

本研究では、はじめに面内混合モード非定常高速伝播き裂の支配方程式と Nishioka・Atluri⁽¹⁾の定常漸近解との関連性を示し、非定常漸近解が定常漸近解より導出できることを示した。つぎに、膨大な代数処理などの数学的困難を克服するために、数式処理システム

(Mathematica)を用いた。これにより、加速・減速を伴う混合モード非定常高速き裂先端近傍の変位場および応力場に対する漸近解の第0次項から第4次項までの陽な表示式を導出するのに成功した。なお、本論文は文献(5)で発表した内容をまとめたものであり、応力場の表示式は文献(6)にも紹介している。また、変位場の陽な表示式は、変位に基礎を置く有限要素法や変位場が計測されるモアレ干渉法への適用などにより、計算力学的にも実験力学的にも極めて有用性が高い。

さらに、この非定常応力漸近解を用いて、き裂速度や応力拡大係数が急激に変化する場合の高速伝播き裂先端の応力場の可視化を行った。これにより、き裂加速度などの非定常効果について明らかにし、動的破壊力学の重要な未解決問題である動的破壊靱性のき裂加速度効果について、説明できる可能性を示した。

2. 面内混合モード伝播き裂の支配方程式

弾性体を支配する方程式は良く知られているように以下に示す Navier の式で表すことができる。

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,i} = \rho \ddot{u}_i \quad (1)$$

ここに、 u_i は変位を、 μ と λ はラーメの定数を、 ρ は密度を表す。本稿では、座標成分を意味する添字について総和規約を用いる。また、 $(\cdot)$ は時間微分を表し、 $(\cdot)_{,j}$ は $(\cdot)$ の座標 X_j に関する偏微分を表す。動的平面問題は二つの波動ポテンシャル ϕ, ψ を用いると便利である。この場合、変位は次式のように表される。

$$u_1 = \phi_1 + \psi_2 \quad (2.a)$$

$$u_2 = \phi_2 - \psi_1 \quad (2.b)$$

* 1994年11月11日 第7回計算力学講演会において講演、原稿受付 1995年7月21日。

^{*1} 正員、神戸商船大学 (〒658 神戸市東灘区深江南町5-1-1)。

^{*2} 学生員、神戸商船大学大学院。

式(2)を式(1)に代入して、以下の波動方程式が得られる。

$$C_d^2 \phi_{,\alpha\alpha} = \ddot{\phi}, \quad (\alpha = 1, 2) \quad (3.a)$$

$$C_s^2 \psi_{,\alpha\alpha} = \ddot{\psi}, \quad (\alpha = 1, 2) \quad (3.b)$$

ここに、 C_d および C_s はそれぞれ膨張波速度、せん断波速度を表す。

ここで、図1に示すような線形弾性体中を加速・減速を伴いながら平面内を動的伝播するき裂を考える。時刻 t のき裂長さを $a(t)$ で表す。したがって、き裂速度 $C(t)$ は $C = \dot{a}$ で表される。図1から判るように、移動座標は $x_1 = X_1 - a(t)$ および $x_2 = X_2$ で表される。ポテンシャル関数 ϕ, ψ を移動座標系で表すと時間微分は次のようになる。

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial t} - C(t) \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \quad (4.a)$$

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial t} - C(t) \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \quad (4.b)$$

同様に、次式が成立する。

$$\ddot{\phi} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - 2C(t) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial t} + C^2(t) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} - \dot{C}(t) \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \quad (5.a)$$

$$\ddot{\psi} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - 2C(t) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial t} + C^2(t) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} - \dot{C}(t) \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \quad (5.b)$$

式(5)を式(3)に代入して、整理すると移動座標系で表した波動方程式、すなわち伝播き裂の支配方程式は次のようになる。

$$C_d^2 \left(\beta_1^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} \right) + \dot{C}(t) \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + 2C(t) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial t} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (6.a)$$

$$C_s^2 \left(\beta_2^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} \right) + \dot{C}(t) \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + 2C(t) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial t} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (6.b)$$

ただし、 $\beta_1^2 = 1 - C^2/C_d^2$ 、 $\beta_2^2 = 1 - C^2/C_s^2$ である。

ここで、Deng⁽⁴⁾により面内混合問題に用いられた微分演算子

$$D_d = C_d^2 \left(\beta_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \quad (7.a)$$

$$D_s = C_s^2 \left(\beta_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \quad (7.b)$$

$$D_t = 2\sqrt{C(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left(\sqrt{C(t)} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (7.c)$$

を式(6)に適用すると、式(6)は次のようになる。

$$(D_d + D_t) \phi = 0 \quad (8.a)$$

$$(D_s + D_t) \psi = 0 \quad (8.b)$$

また、解析の便利のため、次のようなき裂速度により

Fig.1 Global coordinate system and moving coordinate system

変形する座標系あるいは複素変数を導入する。

$$z_1 = x_1 + i\beta_1 x_2 = r_1 e^{i\theta_1} \quad (9.a)$$

$$z_2 = x_1 + i\beta_2 x_2 = r_2 e^{i\theta_2} \quad (9.b)$$

ここに、 i は虚数を表す。

上記の微分演算子を極座標系で表すと、

$$D_d = C_d^2 \beta_1^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r_1^2} + \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} + \frac{1}{r_1^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta_1^2} \right) \quad (10.a)$$

$$D_s = C_s^2 \beta_2^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r_2^2} + \frac{1}{r_2} \frac{\partial}{\partial r_2} + \frac{1}{r_2^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta_2^2} \right) \quad (10.b)$$

$$D_t = 2\sqrt{C(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left[\sqrt{C(t)} \left(\cos \theta_\alpha \frac{\partial}{\partial r_\alpha} - \frac{\sin \theta_\alpha}{r_\alpha} \frac{\partial}{\partial \theta_\alpha} \right) \right] - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (10.c)$$

となる。

3. 定常高速伝播き裂先端近傍の

一般漸近解⁽¹⁾

ここでは、一定き裂速度 C で定常状態で伝播するき裂を考える。この場合、時間微分演算子(7.c)はゼロとなるので、支配方程式は次式になる。

$$D_d \phi = 0 \quad (11.a)$$

$$D_s \psi = 0 \quad (11.b)$$

式(11.a)および(11.b)はそれぞれ式(9.a)および(9.b)中の座標系 $(x_1, \beta_1 x_2)$ 、 $(x_1, \beta_2 x_2)$ で表すとラプラス方程式になり、波動ポテンシャルは次のように複素変数 z_1 、 z_2 の解析関数で表せる⁽¹⁾。

$$\phi = -\frac{1}{\mu} \operatorname{Re} \left[\int \Phi(z_1) dz_1 \right] \quad (12.a)$$

$$\psi = -\frac{1}{\mu} \operatorname{Im} \left[\frac{1}{\beta_2} \int \Psi(z_2) dz_2 \right] \quad (12.b)$$

ここに、 $\Phi(z_1)$ および $\Psi(z_2)$ は複素ポテンシャルである。これらにより、応力および変位は次式で評価できる。

$$\sigma_{11} = -\operatorname{Re} \left[(1 + 2\beta_1^2 - \beta_2^2) \Phi'(z_1) + 2\Psi'(z_2) \right] \quad (13.a)$$

$$\sigma_{22} = \operatorname{Re} \left[(1 + \beta_2^2) \Phi'(z_1) + 2\Psi'(z_2) \right] \quad (13.b)$$

$$\sigma_{12} = \operatorname{Im} \left[2\beta_1 \Phi'(z_1) + (1 + \beta_2^2) / \beta_2 \Psi'(z_2) \right] \quad (13.c)$$

$$\mu u_1 = -\operatorname{Re} [\Phi(z_1) + \Psi(z_2)] \quad (14.a)$$

$$\mu u_2 = \operatorname{Im} [\beta_1 \Phi(z_1) + (1/\beta_2) \Psi(z_2)] \quad (14.b)$$

複素ポテンシャル関数は次のように級数展開できる。

$$\Phi(z_1) = \sum_n P_n z_1^\lambda = \sum_n (P_n^0 + iP_n^*) r_1^{\lambda_n} e^{i\lambda_n \theta_1} \quad (15.a)$$

$$\Psi(z_2) = \sum_n Q_n z_2^\lambda = \sum_n (Q_n^0 + iQ_n^*) r_2^{\lambda_n} e^{i\lambda_n \theta_2} \quad (15.b)$$

ここで n はゼロから無限大をとる整数であり、 P_n および Q_n は未定複素係数である。き裂上下面 ($\theta = \pm \pi$) の応力自由条件 ($\sigma_{12} = \sigma_{22} = 0$) およびき裂先端前方の変位の有限性より、上記の問題は固有値問題となる。この固有値解析より、固有値が $\lambda_n = n/2$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) と決定され、また未定係数間の関係が決定される。

この定常状態における高速伝播き裂先端近傍の応力場および変位場に対する一般漸近解は、全モードに対して、Nishioka・Atluri⁽¹⁾により統一的に与えられており、面内混合モードに対しては次式のようになる。

$$\sigma_{11} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{K_n^0 B_I(C)}{\sqrt{2\pi}} \frac{n(n+1)}{2} \left\{ (1+2\beta_1^2 - \beta_2^2) r_1^{\frac{n}{2}-1} \cos\left(\frac{n}{2}-1\right) \theta_1 \right. \right. \\ \left. \left. - 2h(n) r_2^{\frac{n}{2}-1} \cos\left(\frac{n}{2}-1\right) \theta_2 \right\} \right. \\ \left. + \frac{K_n^* B_{II}(C)}{\sqrt{2\pi}} \frac{n(n+1)}{2} \left\{ (1+2\beta_1^2 - \beta_2^2) r_1^{\frac{n}{2}-1} \sin\left(\frac{n}{2}-1\right) \theta_1 \right. \right. \\ \left. \left. - 2h(\bar{n}) r_2^{\frac{n}{2}-1} \sin\left(\frac{n}{2}-1\right) \theta_2 \right\} \right] \quad (16.a)$$

$$\sigma_{22} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{K_n^0 B_I(C)}{\sqrt{2\pi}} \frac{n(n+1)}{2} \left\{ -(1+\beta_2^2) r_1^{\frac{n}{2}-1} \cos\left(\frac{n}{2}-1\right) \theta_1 \right. \right. \\ \left. \left. - 2h(n) r_2^{\frac{n}{2}-1} \cos\left(\frac{n}{2}-1\right) \theta_2 \right\} \right. \\ \left. + \frac{K_n^* B_{II}(C)}{\sqrt{2\pi}} \frac{n(n+1)}{2} \left\{ -(1+\beta_2^2) r_1^{\frac{n}{2}-1} \sin\left(\frac{n}{2}-1\right) \theta_1 \right. \right. \\ \left. \left. - 2h(\bar{n}) r_2^{\frac{n}{2}-1} \sin\left(\frac{n}{2}-1\right) \theta_2 \right\} \right] \quad (16.b)$$

$$\sigma_{12} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{K_n^0 B_I(C)}{\sqrt{2\pi}} \frac{n(n+1)}{2} \left\{ -2\beta_1 r_1^{\frac{n}{2}-1} \sin\left(\frac{n}{2}-1\right) \theta_1 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(1+\beta_2^2)}{\beta_2} h(n) r_2^{\frac{n}{2}-1} \sin\left(\frac{n}{2}-1\right) \theta_2 \right\} \right. \\ \left. + \frac{K_n^* B_{II}(C)}{\sqrt{2\pi}} \frac{n(n+1)}{2} \left\{ 2\beta_1 r_1^{\frac{n}{2}-1} \cos\left(\frac{n}{2}-1\right) \theta_1 \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{(1+\beta_2^2)}{\beta_2} h(\bar{n}) r_2^{\frac{n}{2}-1} \cos\left(\frac{n}{2}-1\right) \theta_2 \right\} \right] \quad (16.c)$$

対応する変位の定常漸近解は次式で表される。

$$u_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{K_n^0 B_I(C)}{2\mu} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} (n+1) \left\{ r_1^{n/2} \cos \frac{n}{2} \theta_1 - h(n) r_2^{n/2} \cos \frac{n}{2} \theta_2 \right\} \right. \\ \left. + \frac{K_n^* B_{II}(C)}{2\mu} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} (n+1) \left\{ r_1^{n/2} \sin \frac{n}{2} \theta_1 - h(\bar{n}) r_2^{n/2} \sin \frac{n}{2} \theta_2 \right\} \right] \quad (17.a)$$

$$u_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{K_n^0 B_I(C)}{2\mu} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} (n+1) \left\{ -\beta_1 r_1^{n/2} \sin \frac{n}{2} \theta_1 + \frac{h(n)}{\beta_2} r_2^{n/2} \sin \frac{n}{2} \theta_2 \right\} \right. \\ \left. + \frac{K_n^* B_{II}(C)}{2\mu} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} (n+1) \left\{ \beta_1 r_1^{n/2} \cos \frac{n}{2} \theta_1 - \frac{h(\bar{n})}{\beta_2} r_2^{n/2} \cos \frac{n}{2} \theta_2 \right\} \right] \quad (17.b)$$

ここで、 K_n^0 , K_n^* はモード I、II に関する一般項の係数であり、式(15)中の係数と直接関係付けられる。また、 $\bar{n}=n+1$ であり、 $h(n)$ は漸近次数 n に依存し、 n が奇数のとき $h(n)=2\beta_1\beta_2/(1+\beta_2^2)$ 、偶数のとき $h(n)=(1+\beta_2^2)/2$ で定義される。さらに、 B_I , B_{II} はき裂速度の関数で次式で表される。

$$B_I(C) = (1+\beta_2^2) / \{ 4\beta_1\beta_1 - (1+\beta_2^2)^2 \} \quad (18.a)$$

$$B_{II}(C) = 2\beta_2 / \{ 4\beta_1\beta_1 - (1+\beta_2^2)^2 \} \quad (18.b)$$

式(16)、(17)の一般漸近解を見ると、 $n=0$ のとき、各応力成分はゼロになるために剛体変位項を表し、 $n=1$ のとき、 $O(r^{1/2})$ の特異応力項とそれに対応する変位 $O(r^{1/2})$ を表す。また、 $n=2$ のとき、一定応力項と線形変位項を表し、 $n \geq 3$ はこれらより高次の項を表している。したがって、特異項の係数 K_I^0 , K_I^* は応力拡大係数 K_I , K_{II} と一致する。

4. 非定常高速伝播き裂先端近傍の漸近解

いま、3節の定常高速伝播き裂先端近傍の漸近解を与えるポテンシャル関数を ϕ_0 , ψ_0 で表すと、 ϕ_0 , ψ_0 は式(11.a)および(11.b)を満足する。過渡的に速度 $C(t)$ で伝播しているき裂に対して、式(8)を満足するポテンシャル関数は、次式のように、定常項 ϕ_0 , ψ_0 と過渡効果を含む修正項 ϕ^* , ψ^* の和で表すことができる。

$$\phi(r_1, \theta_1, t) = \phi_0(r_1, \theta_1, t) + \phi^*(r_1, \theta_1, t) \quad (19.a)$$

$$\psi(r_2, \theta_2, t) = \psi_0(r_2, \theta_2, t) + \psi^*(r_2, \theta_2, t) \quad (19.b)$$

定常項 ϕ_0 , ψ_0 は前節で述べたように、Nishioka・Atluri⁽¹⁾によって求められており、次式で表される。

$$\phi_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n^0 \cos\left(\frac{n}{2}+1\right) \theta_1 + A_n^* \sin\left(\frac{n}{2}+1\right) \theta_1 \right] r_1^{\frac{n}{2}+1} \quad (20.a)$$

$$\psi_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \left[B_n^* \cos\left(\frac{n}{2}+1\right) \theta_2 + B_n^0 \sin\left(\frac{n}{2}+1\right) \theta_2 \right] r_2^{\frac{n}{2}+1} \quad (20.b)$$

ただし、式中の $A_n^0(t)$, $B_n^0(t)$, $A_n^*(t)$, $B_n^*(t)$ は漸近展開の係数であり、この節では時間変化を伴うものとする。

式(19)を式(8)に代入すると次式が得られる。

$$(D_0 + D_1) \phi^* = -D_1 \phi_0 \quad (21.a)$$

$$(D_3 + D_1) \psi^* = -D_1 \psi_0 \quad (21.b)$$

したがって、修正項 ϕ^* , ψ^* は Nishioka・Atluri⁽¹⁾の定常解 ϕ_0 , ψ_0 から導出できる。ただし、き裂速度 C が一定でない場合、式(21)などに現われる β_i , r_i , θ_i ($i=1,2$) は時間に依存することになる。したがって、これらの時間微分が必要になる。

非定常修正項 ϕ^* , ψ^* は ϕ_0 , ψ_0 が変数分離型であることと微分演算子の構造より、次のように展開できるものとする⁽⁴⁾。

$$\phi^* = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\theta_1, t) r_1^{\frac{n}{2}+1} \quad (22.a)$$

$$\psi^* = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(\theta_2, t) r_2^{\frac{n}{2}+1} \quad (22.b)$$

式(22)および式(20)を式(21)に代入し、 r_1 および r_2 に関する同次項を整理すると微分方程式が得られる。

$$L_n f_n = 0 \quad (n=0, 1, 2) \quad (23.a)$$

$$M_n g_n = 0 \quad (n=0, 1, 2) \quad (23.b)$$

$$-\beta_1^2 C_d^2 L_n f_n = \left[\frac{n \dot{C}(t)}{2} \left(1 - \frac{(n-2)C^2(t)}{2\beta_1^2 C_d^2} \right) A_n^0 \lambda(t) + n C(t) A_n^0 \lambda(t) \right] \cos\left(\frac{n}{2}-1\right) \theta_1 \\ + \left[\frac{n \dot{C}(t)}{2} \left(1 - \frac{(n-2)C^2(t)}{2\beta_1^2 C_d^2} \right) A_n^* \lambda(t) + n C(t) A_n^* \lambda(t) \right] \sin\left(\frac{n}{2}-1\right) \theta_1 \\ + \frac{n \dot{C}(t)}{2} \frac{(n-2)C^2(t)}{2\beta_1^2 C_d^2} \left[A_n^0 \lambda(t) \cos\left(\frac{n-3}{2}\right) \theta_1 + A_n^* \lambda(t) \sin\left(\frac{n-3}{2}\right) \theta_1 \right] \quad (n=3,4) \quad (24.a)$$

$$-\beta_2^2 C_s^2 M_n g_n = \left[\frac{n \dot{C}(t)}{2} \left(1 - \frac{(n-2)C^2(t)}{2\beta_1^2 C_s^2} \right) B_n^* \lambda(t) + n C(t) B_n^* \lambda(t) \right] \cos\left(\frac{n}{2}-1\right) \theta_2 \\ + \left[\frac{n \dot{C}(t)}{2} \left(1 - \frac{(n-2)C^2(t)}{2\beta_2^2 C_s^2} \right) B_n^0 \lambda(t) + n C(t) B_n^0 \lambda(t) \right] \sin\left(\frac{n}{2}-1\right) \theta_2 \\ + \frac{n \dot{C}(t)}{2} \frac{(n-2)C^2(t)}{2\beta_2^2 C_s^2} \left[B_n^* \lambda(t) \cos\left(\frac{n-3}{2}\right) \theta_2 + B_n^0 \lambda(t) \sin\left(\frac{n-3}{2}\right) \theta_2 \right] \quad (n=3,4) \quad (24.b)$$

ここで、上式中の演算子 L_n および M_n は次式で表される。

$$L_n = \frac{\partial^2}{\partial \theta_1^2} + \left(\frac{n}{2} + 1\right)^2 \quad (25.a)$$

$$M_n = \frac{\partial^2}{\partial \theta_2^2} + \left(\frac{n}{2} + 1\right)^2 \quad (25.b)$$

式(23)の解は定常項と同形になるものをのぞくと、

$$f_n = 0 \quad (n=0, 1, 2) \quad (26.a)$$

$$g_n = 0 \quad (n=0, 1, 2) \quad (26.b)$$

となる。また、式(24)の解は演算子 L_n および M_n が2次常微分演算子であり、非同次項が三角関数のため、次式のようになる⁴⁾。

$$f_n = -\frac{1}{4\beta_1^2 C_d^2} \left\{ 2C(\theta) \tilde{A}_{n-2}^0(\theta) + \tilde{C}(\theta) \left[1 - \frac{(n-2)C^2(\theta)}{2\beta_1^2 C_d^2} \right] A_{n-2}^0(\theta) \right\} \cos\left(\frac{n-1}{2}\theta_1\right) \\ + \left\{ 2C(\theta) \tilde{A}_{n-2}^*(\theta) + \tilde{C}(\theta) \left[1 - \frac{(n-2)C^2(\theta)}{2\beta_1^2 C_d^2} \right] A_{n-2}^*(\theta) \right\} \sin\left(\frac{n-1}{2}\theta_1\right) \\ + \frac{nC^2(\theta)C(\theta)}{4\beta_1^2 C_d^2} \left\{ A_{n-2}^0(\theta) \cos\left(\frac{n-3}{2}\theta_1\right) + A_{n-2}^*(\theta) \sin\left(\frac{n-3}{2}\theta_1\right) \right\} \quad (n=3, 4) \quad (27.a)$$

$$g_n = -\frac{1}{4\beta_2^2 C_s^2} \left\{ 2C(\theta) \tilde{B}_{n-2}^*(\theta) + \tilde{C}(\theta) \left[1 - \frac{(n-2)C^2(\theta)}{2\beta_2^2 C_s^2} \right] B_{n-2}^*(\theta) \right\} \cos\left(\frac{n-1}{2}\theta_2\right) \\ + \left\{ 2C(\theta) \tilde{B}_{n-2}^0(\theta) + \tilde{C}(\theta) \left[1 - \frac{(n-2)C^2(\theta)}{2\beta_2^2 C_s^2} \right] B_{n-2}^0(\theta) \right\} \sin\left(\frac{n-1}{2}\theta_2\right) \\ + \frac{nC^2(\theta)C(\theta)}{4\beta_2^2 C_s^2} \left\{ B_{n-2}^*(\theta) \cos\left(\frac{n-3}{2}\theta_2\right) + B_{n-2}^0(\theta) \sin\left(\frac{n-3}{2}\theta_2\right) \right\} \quad (n=3, 4) \quad (27.b)$$

これらより、非定常ポテンシャル関数が決まり、き裂先端の応力場および変位場における非定常漸近解を表すことができる。しかし、この時点からでも、変位場を求めるのに要する微分演算回数は160回、応力場を求めるのに要する微分演算回数は720回が必要であり、さらに、これらの項数間の和、差などの膨大な演算量が必要となる。この膨大な演算を正確に処理し、非定常高速伝播き裂先端の応力場、変位場の陽な表示式を導出するためには、コンピュータによる数式処理システムの利用が不可欠である。本研究では数式処理システム (Mathematica) を用いて非定常ポテンシャル関数より応力場および変位場に対する非定常漸近解の第4次項までの導出に成功した。

このようにして得られた、面内混合モードについての応力の非定常漸近解は次式のようになる^{(5), (6)}。

$$\frac{\sigma_{11}}{\mu} = \frac{K_I(\theta) B_I(C)}{\mu\sqrt{2\pi}} \left\{ \left(1 + 2\beta_1^2 - \beta_2^2 \right) r_1^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\theta_1}{2} - \frac{4\beta_1\beta_2}{1+\beta_2^2} r_2^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\theta_2}{2} \right\} \\ + 2 \left(1 + 2\beta_1^2 - \beta_2^2 \right) A_2^0(\theta) + 4\beta_2 B_2^0(\theta) \\ + \left\{ D_I^1 \left\{ A_1^0(\theta) \right\} \left[\frac{(1+\beta_1^2)(\beta_1^2 - \beta_2^2) - (1-\beta_1^2)^2}{2(1-\beta_1^2)} \cos \frac{\theta_1}{2} + \frac{1+2\beta_1^2 - \beta_2^2}{8} \cos \frac{3\theta_1}{2} \right] \right. \\ + \tilde{A}_1^0(\theta) \left[\frac{(2\beta_1^2 - \beta_2^2 - 1)\beta_1^2}{1-\beta_1^2} \cos \frac{\theta_1}{2} + \left\{ \frac{5(2\beta_1^2 - \beta_2^2)}{8} - \frac{\beta_1^2 - \beta_2^2}{1-\beta_1^2} - \frac{3}{8} \right\} \cos \frac{3\theta_1}{2} \right. \\ + \left. \left. \frac{1+2\beta_1^2 - \beta_2^2}{16} \cos \frac{7\theta_1}{2} \right\] + \frac{15(1+2\beta_1^2 - \beta_2^2)}{4} A_3^0(\theta) \cos \frac{\theta_1}{2} \right\} \frac{1}{r_1^{\frac{1}{2}}} \\ + 2\beta_2 \left\{ \frac{1}{8} D_I^1 \left\{ B_1^0(\theta) \right\} \cos \frac{3\theta_2}{2} + \frac{1}{4} \tilde{B}_1^0(\theta) \left(\cos \frac{\theta_2}{2} + \frac{1}{4} \cos \frac{3\theta_2}{2} + \frac{1}{8} \cos \frac{7\theta_2}{2} \right) \right. \\ \left. - \frac{15}{4} B_3^0(\theta) \sin \frac{\theta_2}{2} \right\} \frac{1}{r_2^{\frac{1}{2}}} \\ + \left\{ 3 - \beta_1^2 + 2\beta_1^4 - 3\beta_2^2 - \beta_1^2\beta_2^2 \right\} D_I^1 \left\{ A_2^0(\theta) \right\} + 6 \left(1 + 2\beta_1^2 - \beta_2^2 \right) A_4^0(\theta) \left\{ r_1 \cos \theta_1 \right. \\ \left. + \left\{ \frac{2}{3} \beta_2 \left[D_I^1 \left\{ B_2^0(\theta) \right\} + 2\tilde{B}_2^0(\theta) \right] + 12\beta_2 B_4^0(\theta) \right\} r_2 \cos \theta_2 \right. \\ + \frac{K_{II}(\theta) B_{II}(C)}{\mu\sqrt{2\pi}} \left\{ \left(1 + 2\beta_1^2 - \beta_2^2 \right) r_1^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\theta_1}{2} + \left(1 + \beta_2^2 \right) r_2^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\theta_2}{2} \right\} \\ + \left\{ D_I^1 \left\{ A_1^*(\theta) \right\} \left[\frac{(1+\beta_1^2)(\beta_1^2 - \beta_2^2) - (1-\beta_1^2)^2}{2(1-\beta_1^2)} \sin \frac{\theta_1}{2} + \frac{1+2\beta_1^2 - \beta_2^2}{8} \sin \frac{3\theta_1}{2} \right] \right. \\ + \tilde{A}_1^*(\theta) \left[\frac{(1-\beta_2^2)\beta_1^2}{1-\beta_1^2} \sin \frac{\theta_1}{2} - \left\{ \frac{3-5\beta_2^2}{8} - \frac{\beta_1^2 - \beta_2^2}{1-\beta_1^2} \right\} \sin \frac{3\theta_1}{2} \right. \\ + \left. \left. \frac{1+\beta_2^2}{16} \sin \frac{7\theta_1}{2} \right\] - \frac{15(1+\beta_2^2)}{4} A_3^*(\theta) \sin \frac{\theta_1}{2} \right\} \frac{1}{r_1^{\frac{1}{2}}} \\ - 2\beta_2 \left\{ \frac{1}{8} D_I^1 \left\{ B_1^*(\theta) \right\} \sin \frac{3\theta_2}{2} - \frac{1}{4} \tilde{B}_1^*(\theta) \left(\sin \frac{\theta_2}{2} - \frac{1}{4} \sin \frac{3\theta_2}{2} - \frac{1}{8} \sin \frac{7\theta_2}{2} \right) \right. \\ \left. - \frac{15}{4} B_3^*(\theta) \sin \frac{\theta_2}{2} \right\} \frac{1}{r_2^{\frac{1}{2}}} \\ + \left\{ 1 - 3\beta_1^2 + 6\beta_1^4 - \beta_2^2 - 3\beta_1^2\beta_2^2 \right\} D_I^1 \left\{ A_2^*(\theta) \right\} + 2\tilde{A}_2^*(\theta) + 6 \left(1 + 2\beta_1^2 - \beta_2^2 \right) A_4^*(\theta) \left\{ r_1 \sin \theta_1 \right. \\ \left. + \left\{ \frac{2}{3} \beta_2 \left[D_I^1 \left\{ B_2^*(\theta) \right\} + 2\tilde{B}_2^*(\theta) \right] + 12\beta_2 B_4^*(\theta) \right\} r_2 \sin \theta_2 \right\} \quad (28.a)$$

$$+ \frac{15}{4} B_3^0(\theta) \cos \frac{\theta_2}{2} \left\{ r_2^{\frac{1}{2}} \right. \\ + \left\{ 3 - \beta_1^2 + 2\beta_1^4 - 3\beta_2^2 - \beta_1^2\beta_2^2 \right\} D_I^1 \left\{ A_2^0(\theta) \right\} + 6 \left(1 + 2\beta_1^2 - \beta_2^2 \right) A_4^0(\theta) \left\{ r_1 \cos \theta_1 \right. \\ + \left\{ \frac{2}{3} \beta_2 \left[D_I^1 \left\{ B_2^0(\theta) \right\} + 2\tilde{B}_2^0(\theta) \right] + 12\beta_2 B_4^0(\theta) \right\} r_2 \cos \theta_2 \\ + \frac{K_{II}(\theta) B_{II}(C)}{\mu\sqrt{2\pi}} \left\{ \left(1 + 2\beta_1^2 - \beta_2^2 \right) r_1^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\theta_1}{2} + \left(1 + \beta_2^2 \right) r_2^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\theta_2}{2} \right\} \\ + \left\{ D_I^1 \left\{ A_1^*(\theta) \right\} \left[\frac{(1+\beta_1^2)(\beta_1^2 - \beta_2^2) - (1-\beta_1^2)^2}{2(1-\beta_1^2)} \sin \frac{\theta_1}{2} + \frac{1+2\beta_1^2 - \beta_2^2}{8} \sin \frac{3\theta_1}{2} \right] \right. \\ + \tilde{A}_1^*(\theta) \left[\frac{(2\beta_1^2 - \beta_2^2 - 1)\beta_1^2}{1-\beta_1^2} \sin \frac{\theta_1}{2} - \left\{ \frac{5(2\beta_1^2 - \beta_2^2)}{8} - \frac{\beta_1^2 - \beta_2^2}{1-\beta_1^2} - \frac{3}{8} \right\} \sin \frac{3\theta_1}{2} \right. \\ + \left. \left. \frac{1+2\beta_1^2 - \beta_2^2}{16} \sin \frac{7\theta_1}{2} \right\] + \frac{15(1+2\beta_1^2 - \beta_2^2)}{4} A_3^*(\theta) \sin \frac{\theta_1}{2} \right\} \frac{1}{r_1^{\frac{1}{2}}} \\ + 2\beta_2 \left\{ \frac{1}{8} D_I^1 \left\{ B_1^*(\theta) \right\} \sin \frac{3\theta_2}{2} - \frac{1}{4} \tilde{B}_1^*(\theta) \left(\sin \frac{\theta_2}{2} - \frac{1}{4} \sin \frac{3\theta_2}{2} - \frac{1}{8} \sin \frac{7\theta_2}{2} \right) \right. \\ \left. - \frac{15}{4} B_3^*(\theta) \sin \frac{\theta_2}{2} \right\} \frac{1}{r_2^{\frac{1}{2}}} \\ + \left\{ 1 - 3\beta_1^2 + 6\beta_1^4 - \beta_2^2 - 3\beta_1^2\beta_2^2 \right\} D_I^1 \left\{ A_2^*(\theta) \right\} + 2\tilde{A}_2^*(\theta) \\ + 6 \left(1 + 2\beta_1^2 - \beta_2^2 \right) A_4^*(\theta) \left\{ r_1 \sin \theta_1 + \left\{ \frac{2}{3} \beta_2 \left[D_I^1 \left\{ B_2^*(\theta) \right\} + 2\tilde{B}_2^*(\theta) \right] + 12\beta_2 B_4^*(\theta) \right\} r_2 \sin \theta_2 \right\} \quad (28.a)$$

$$\frac{\sigma_{22}}{\mu} = \frac{K_I(\theta) B_I(C)}{\mu\sqrt{2\pi}} \left\{ \left(1 + \beta_2^2 \right) r_1^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\theta_1}{2} + \frac{4\beta_1\beta_2}{1+\beta_2^2} r_2^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\theta_2}{2} \right\} \\ - 2 \left(1 + \beta_2^2 \right) A_2^0(\theta) - 4\beta_2 B_2^0(\theta) \\ + \left\{ D_I^1 \left\{ A_1^0(\theta) \right\} \left[\frac{(1+\beta_1^2)(\beta_1^2 - \beta_2^2) - (1-\beta_1^2)^2}{2(1-\beta_1^2)} \cos \frac{\theta_1}{2} + \frac{1+\beta_2^2}{8} \cos \frac{3\theta_1}{2} \right] \right. \\ + \tilde{A}_1^0(\theta) \left[\frac{(1-\beta_2^2)\beta_1^2}{1-\beta_1^2} \cos \frac{\theta_1}{2} + \left\{ \frac{3-5\beta_2^2}{8} - \frac{\beta_1^2 - \beta_2^2}{1-\beta_1^2} \right\} \cos \frac{3\theta_1}{2} - \frac{1+\beta_2^2}{16} \cos \frac{7\theta_1}{2} \right. \\ + \left. \left. \frac{15(1+\beta_2^2)}{4} A_3^0(\theta) \cos \frac{\theta_1}{2} \right\] \frac{1}{r_1^{\frac{1}{2}}} \right. \\ - 2\beta_2 \left\{ \frac{1}{8} D_I^1 \left\{ B_1^0(\theta) \right\} \cos \frac{3\theta_2}{2} + \frac{1}{4} \tilde{B}_1^0(\theta) \left(\cos \frac{\theta_2}{2} + \frac{1}{4} \cos \frac{3\theta_2}{2} + \frac{1}{8} \cos \frac{7\theta_2}{2} \right) \right. \\ + \left. \frac{15}{4} B_3^0(\theta) \cos \frac{\theta_2}{2} \right\} \frac{1}{r_2^{\frac{1}{2}}} \\ + \left\{ 3 - 7\beta_1^2 + 3\beta_2^2 + \beta_1^2\beta_2^2 \right\} D_I^1 \left\{ A_2^0(\theta) \right\} + 6 \left(1 + \beta_2^2 \right) A_4^0(\theta) \left\{ r_1 \cos \theta_1 \right. \\ + \left\{ \frac{2}{3} \beta_2 \left[D_I^1 \left\{ B_2^0(\theta) \right\} + 2\tilde{B}_2^0(\theta) \right] + 12\beta_2 B_4^0(\theta) \right\} r_2 \cos \theta_2 \\ + \frac{K_{II}(\theta) B_{II}(C)}{\mu\sqrt{2\pi}} \left\{ \left(1 + \beta_2^2 \right) r_1^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\theta_1}{2} - \left(1 + \beta_2^2 \right) r_2^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\theta_2}{2} \right\} \\ + \left\{ D_I^1 \left\{ A_1^*(\theta) \right\} \left[\frac{(1+\beta_1^2)(\beta_1^2 - \beta_2^2) - (1-\beta_1^2)^2}{2(1-\beta_1^2)} \sin \frac{\theta_1}{2} + \frac{1+\beta_2^2}{8} \sin \frac{3\theta_1}{2} \right] \right. \\ + \tilde{A}_1^*(\theta) \left[\frac{(1-\beta_2^2)\beta_1^2}{1-\beta_1^2} \sin \frac{\theta_1}{2} - \left\{ \frac{3-5\beta_2^2}{8} - \frac{\beta_1^2 - \beta_2^2}{1-\beta_1^2} \right\} \sin \frac{3\theta_1}{2} \right. \\ + \left. \left. \frac{1+\beta_2^2}{16} \sin \frac{7\theta_1}{2} \right\] - \frac{15(1+\beta_2^2)}{4} A_3^*(\theta) \sin \frac{\theta_1}{2} \right\} \frac{1}{r_1^{\frac{1}{2}}} \\ - 2\beta_2 \left\{ \frac{1}{8} D_I^1 \left\{ B_1^*(\theta) \right\} \sin \frac{3\theta_2}{2} - \frac{1}{4} \tilde{B}_1^*(\theta) \left(\sin \frac{\theta_2}{2} - \frac{1}{4} \sin \frac{3\theta_2}{2} - \frac{1}{8} \sin \frac{7\theta_2}{2} \right) \right. \\ \left. - \frac{15}{4} B_3^*(\theta) \sin \frac{\theta_2}{2} \right\} \frac{1}{r_2^{\frac{1}{2}}} \\ + \left\{ 1 - 5\beta_1^2 + \beta_2^2 + 3\beta_1^2\beta_2^2 \right\} D_I^1 \left\{ A_2^*(\theta) \right\} + 2\tilde{A}_2^*(\theta) + 6 \left(1 + \beta_2^2 \right) A_4^*(\theta) \left\{ r_1 \sin \theta_1 \right. \\ + \left\{ \frac{2}{3} \beta_2 \left[D_I^1 \left\{ B_2^*(\theta) \right\} + 2\tilde{B}_2^*(\theta) \right] + 12\beta_2 B_4^*(\theta) \right\} r_2 \sin \theta_2 \right\} \quad (28.b)$$

$$\begin{aligned}
& - \left\{ \frac{2}{3} \beta_2 D_3^I \{B_2^*(t)\} - 12\beta_2 B_4^*(t) \right\} r_2 \sin \theta_2 \\
& \frac{\sigma_{12}}{\mu} = \frac{K_{II}(t) B_{II}(C)}{\mu \sqrt{2\pi}} 2\beta_1 \left\{ r_1^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\theta_1}{2} - r_2^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\theta_2}{2} \right\} \\
& + 2\beta_1 \left\{ \frac{1}{8} D_7^I \{A_1^0(t)\} \sin \frac{3\theta_1}{2} - \frac{1}{4} \tilde{A}_1^0(t) \left[\sin \frac{\theta_1}{2} - \frac{1}{4} \sin \frac{3\theta_1}{2} - \frac{1}{8} \sin \frac{7\theta_1}{2} \right] \right. \\
& - \frac{15}{4} A_3^0(t) \sin \frac{\theta_1}{2} \left. \right\} r_1^{\frac{1}{2}} \\
& - \left\{ \frac{1}{2} D_5^I \{B_1^0(t)\} \left[(1 - \beta_2^2) \sin \frac{\theta_2}{2} - \frac{1 + \beta_2^2}{4} \sin \frac{3\theta_2}{2} \right] \right. \\
& - \frac{\tilde{B}_1^0(t)}{2} \left[\beta_2^2 \sin \frac{\theta_2}{2} + \frac{5\beta_2^2 - 3}{8} \sin \frac{3\theta_2}{2} + \frac{1 + \beta_2^2}{16} \sin \frac{7\theta_2}{2} \right] \\
& + \frac{15(1 + \beta_2^2)}{4} B_3^0(t) \sin \frac{\theta_2}{2} \left. \right\} r_2^{\frac{1}{2}} \\
& + \left\{ \frac{2}{3} \beta_1 D_7^I \{A_2^0(t)\} - 12\beta_1 A_4^0(t) \right\} r_1 \sin \theta_1 \\
& + \left\{ \frac{3\beta_2^2 - 1}{3} \left[D_5^I \{B_2^0(t)\} + 2\tilde{B}_2^0(t) \right] - 6(1 + \beta_2^2) B_4^0(t) \right\} r_2 \sin \theta_2 \\
& + \frac{K_{II}(t) B_{II}(C)}{\mu \sqrt{2\pi}} \left\{ 2\beta_1 r_1^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\theta_1}{2} - \frac{(1 + \beta_2^2)^2}{2\beta_2} r_2^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\theta_2}{2} \right\} \\
& + 4\beta_1 A_2^*(t) - 2(1 + \beta_2^2) B_2^*(t) \\
& + 2\beta_1 \left\{ \frac{1}{8} D_7^I \{A_1^*(t)\} \cos \frac{3\theta_1}{2} + \frac{\tilde{A}_1^*(t)}{4} \left[\cos \frac{\theta_1}{2} + \frac{1}{4} \cos \frac{3\theta_1}{2} + \frac{1}{8} \cos \frac{7\theta_1}{2} \right] \right. \\
& + \frac{15}{4} A_3^*(t) \cos \frac{\theta_1}{2} \left. \right\} r_1^{\frac{1}{2}} \\
& - \left\{ \frac{1}{2} D_5^I \{B_1^*(t)\} \left[(1 - \beta_2^2) \cos \frac{\theta_2}{2} + \frac{1 + \beta_2^2}{4} \cos \frac{3\theta_2}{2} \right] \right. \\
& - \frac{\tilde{B}_1^*(t)}{2} \left[\beta_2^2 \cos \frac{\theta_2}{2} - \frac{5\beta_2^2 - 3}{8} \cos \frac{3\theta_2}{2} - \frac{1 + \beta_2^2}{16} \cos \frac{7\theta_2}{2} \right] + \frac{15(1 + \beta_2^2)}{4} B_3^*(t) \cos \frac{\theta_2}{2} \left. \right\} r_2^{\frac{1}{2}} \\
& + \left\{ \frac{2}{3} \beta_1 \left[D_7^I \{A_2^*(t)\} + 2\tilde{A}_2^*(t) \right] + 12\beta_1 A_4^*(t) \right\} r_1 \cos \theta_1 \\
& - \left\{ \frac{3 - \beta_2^2}{3} D_5^I \{B_2^*(t)\} + 6(1 + \beta_2^2) B_4^*(t) \right\} r_2 \cos \theta_2 \\
& \quad \quad \quad (28. c)
\end{aligned}$$

また、対応する変位の非定常漸近解は次のようになる。

$$\begin{aligned}
u_1 &= A_0^0(t) + \beta_2 B_0^0(t) + \frac{K_{II}(t) B_{II}(C)}{\mu} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ r_1^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\theta_1}{2} - \frac{2\beta_1 \beta_2}{1 + \beta_2^2} r_2^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\theta_2}{2} \right\} \\
&+ 2 A_2^0(t) r_1 \cos \theta_1 + 2\beta_2 B_2^0(t) r_2 \cos \theta_2 \\
&+ \left\{ D_7^I \{A_1^0(t)\} \left[\frac{1}{4} \cos \frac{\theta_1}{2} + \frac{1}{6} \cos \frac{3\theta_1}{2} \right] \right. \\
&- \frac{\tilde{A}_1^0(t)}{4} \left[\frac{1}{2} \cos \frac{\theta_1}{2} - \frac{1}{3} \cos \frac{3\theta_1}{2} + \frac{1}{4} \cos \frac{5\theta_1}{2} \right] + \frac{5}{2} A_3^0(t) \cos \frac{3\theta_1}{2} \left. \right\} r_1^{\frac{3}{2}} \\
&+ \left\{ D_5^I \{B_1^0(t)\} \left[\frac{\beta_2}{4} \cos \frac{\theta_2}{2} - \frac{\beta_2}{6} \cos \frac{3\theta_2}{2} \right] \right. \\
&+ \frac{\tilde{B}_1^0(t)}{4} \left[\frac{3\beta_2}{2} \cos \frac{\theta_2}{2} - \frac{\beta_2}{3} \cos \frac{3\theta_2}{2} - \frac{\beta_2}{4} \cos \frac{5\theta_2}{2} \right] + \frac{5\beta_2}{2} B_3^0(t) \cos \frac{3\theta_2}{2} \left. \right\} r_2^{\frac{3}{2}} \\
&+ \left\{ \frac{2 + \cos 2\theta_1}{6} D_7^I \{A_2^0(t)\} + 3A_4^0(t) \cos 2\theta_1 \right\} r_1^2 \\
&+ \left\{ \frac{\beta_2(2 - \cos 2\theta_2)}{6} \left[D_5^I \{B_2^0(t)\} + 2\tilde{B}_2^0(t) \right] + 3\beta_2 B_4^0(t) \cos 2\theta_2 \right\} r_2^2 \\
&+ \frac{K_{II}(t) B_{II}(C)}{\mu} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ r_1^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\theta_1}{2} - \frac{1 + \beta_2^2}{2} r_2^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\theta_2}{2} \right\} \\
&+ 2A_2^*(t) r_1 \sin \theta_1 - 2\beta_2 B_2^*(t) r_2 \sin \theta_2 \\
&- \left\{ D_7^I \{A_1^*(t)\} \left[\frac{1}{4} \sin \frac{\theta_1}{2} - \frac{1}{6} \sin \frac{3\theta_1}{2} \right] \right. \\
&- \frac{\tilde{A}_1^*(t)}{4} \left[\frac{1}{2} \sin \frac{\theta_1}{2} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\theta_1}{2} + \frac{1}{4} \sin \frac{5\theta_1}{2} \right] - \frac{5}{2} A_3^*(t) \sin \frac{3\theta_1}{2} \left. \right\} r_1^{\frac{3}{2}} \\
&+ \left\{ D_5^I \{B_1^*(t)\} \left[\frac{\beta_2}{4} \sin \frac{\theta_2}{2} + \frac{\beta_2}{6} \sin \frac{3\theta_2}{2} \right] \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\beta_2}{4} \tilde{B}_1^*(t) \left[\frac{3}{2} \sin \frac{\theta_2}{2} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\theta_2}{2} - \frac{1}{4} \sin \frac{5\theta_2}{2} \right] - \frac{5\beta_2}{2} B_3^*(t) \sin \frac{3\theta_2}{2} \left. \right\} r_2^{\frac{3}{2}} \\
& + \frac{1}{6} \left\{ D_7^I \{A_2^*(t)\} + 2\tilde{A}_2^*(t) \right\} \sin 2\theta_1 + 3A_4^*(t) \sin 2\theta_1 \left. \right\} r_1^2 \\
& + \left\{ \frac{\beta_2}{6} D_5^I \{B_2^*(t)\} \sin 2\theta_2 - 3\beta_2 B_4^*(t) \sin 2\theta_2 \right\} r_2^2 \\
& \quad \quad \quad (29. a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_2 &= \frac{K_{II}(t) B_{II}(C)}{\mu} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ -\beta_1 r_1^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\theta_1}{2} + \frac{2\beta_1}{1 + \beta_2^2} r_2^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\theta_2}{2} \right\} \\
&- 2\beta_1 A_2^0(t) r_1 \sin \theta_1 - 2B_2^0(t) r_2 \sin \theta_2 \\
&+ \left\{ D_7^I \{A_1^0(t)\} \left[\frac{\beta_1}{4} \sin \frac{\theta_1}{2} + \frac{\beta_1}{6} \sin \frac{3\theta_1}{2} \right] \right. \\
&+ \frac{\beta_1}{4} \tilde{A}_1^0(t) \left[\frac{3}{2} \sin \frac{\theta_1}{2} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\theta_1}{2} - \frac{1}{4} \sin \frac{5\theta_1}{2} \right] - \frac{5\beta_1}{2} A_3^0(t) \sin \frac{3\theta_1}{2} \left. \right\} r_1^{\frac{3}{2}} \\
&+ \left\{ D_5^I \{B_1^0(t)\} \left[\frac{1}{4} \sin \frac{\theta_2}{2} - \frac{1}{6} \sin \frac{3\theta_2}{2} \right] \right. \\
&- \frac{1}{4} \tilde{B}_1^0(t) \left[\frac{1}{2} \sin \frac{\theta_2}{2} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\theta_2}{2} + \frac{1}{4} \sin \frac{5\theta_2}{2} \right] - \frac{5}{2} B_3^0(t) \sin \frac{3\theta_2}{2} \left. \right\} r_2^{\frac{3}{2}} \\
&+ \left\{ \frac{\beta_1}{6} D_7^I \{A_2^0(t)\} \sin 2\theta_1 - 3\beta_1 A_4^0(t) \sin 2\theta_1 \right\} r_1^2 \\
&- \left\{ \frac{1}{6} \left[D_5^I \{B_2^0(t)\} + 2\tilde{B}_2^0(t) \right] \sin 2\theta_1 + 3B_4^0(t) \sin 2\theta_1 \right\} r_2^2 \\
&+ \beta_1 A_2^*(t) - B_2^*(t) + \frac{K_{II}(t) B_{II}(C)}{\mu} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \beta_1 r_1^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\theta_1}{2} - \frac{1 + \beta_2^2}{2\beta_2} r_2^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\theta_2}{2} \right\} \\
&+ 2\beta_1 A_2^*(t) r_1 \cos \theta_1 - 2B_2^*(t) r_2 \cos \theta_2 \\
&+ \left\{ D_7^I \{A_1^*(t)\} \left[\frac{\beta_1}{4} \cos \frac{\theta_1}{2} - \frac{\beta_1}{6} \cos \frac{3\theta_1}{2} \right] \right. \\
&+ \frac{\beta_1}{4} \tilde{A}_1^*(t) \left[\frac{3}{2} \cos \frac{\theta_1}{2} - \frac{1}{3} \cos \frac{3\theta_1}{2} - \frac{1}{4} \cos \frac{5\theta_1}{2} \right] + \frac{5}{2} \beta_1 A_3^*(t) \cos \frac{3\theta_1}{2} \left. \right\} r_1^{\frac{3}{2}} \\
&- \left\{ D_5^I \{B_1^*(t)\} \left[\frac{1}{4} \cos \frac{\theta_2}{2} + \frac{1}{6} \cos \frac{3\theta_2}{2} \right] \right. \\
&- \frac{\tilde{B}_1^*(t)}{4} \left[\frac{1}{2} \cos \frac{\theta_2}{2} - \frac{1}{3} \cos \frac{3\theta_2}{2} + \frac{1}{4} \cos \frac{5\theta_2}{2} \right] - \frac{5}{2} B_3^*(t) \cos \frac{3\theta_2}{2} \left. \right\} r_2^{\frac{3}{2}} \\
&+ \left\{ \frac{\beta_1}{6} (2 - \cos 2\theta_1) \left[D_7^I \{A_2^*(t)\} + 2\tilde{A}_2^*(t) \right] + 3\beta_1 A_4^*(t) \cos 2\theta_1 \right\} r_1^2 \\
&- \left\{ \frac{2 + \cos 2\theta_2}{6} D_5^I \{B_2^*(t)\} + 3B_4^*(t) \cos 2\theta_2 \right\} r_2^2 \\
& \quad \quad \quad (29. b)
\end{aligned}$$

ここで式中の $A_n^0(t)$, $B_n^0(t)$, $A_n^*(t)$, $B_n^*(t)$ は漸近展開の係数であり、 $K_n^0(t)$, $K_n^*(t)$ に関係している。これらの関係式はき裂面での境界条件 ($\sigma_{22} = \sigma_{12} = 0$) から求めることができる。剛体変位項、特異項、一定応力項 ($n=0, 1, 2$) に対しては

$$A_n^0(t) = \frac{2(n+1)}{n+2} \frac{B_{II}(C)}{\mu \sqrt{2\pi}} K_n^0(t) \quad (30. a)$$

$$B_n^0(t) = -\frac{2(n+1)}{n+2} \frac{h(n) B_{II}(C)}{\mu \sqrt{2\pi} \beta_2} K_n^0(t) \quad (30. b)$$

$$A_n^*(t) = \frac{2(n+1)}{n+2} \frac{B_{II}(C)}{\mu \sqrt{2\pi}} K_n^*(t) \quad (30. c)$$

$$B_n^*(t) = \frac{2(n+1)}{n+2} \frac{h(n) B_{II}(C)}{\mu \sqrt{2\pi} \beta_2} K_n^*(t) \quad (30. d)$$

となり、また、第3次項 ($n=3$) に対しては

$$\begin{aligned}
30 \left\{ (1 + \beta_2^2) A_3^*(t) - 2\beta_2 B_3^*(t) \right\} &= \left\{ \frac{5 - 13\beta_1^2 + 5\beta_2^2 + 3\beta_1^2 \beta_2^2}{1 - \beta_1^2} D_7^I \{A_1^*(t)\} \right. \\
&- 2\beta_2 D_5^I \{B_1^*(t)\} + \frac{1}{4} \left\{ 5(1 + \beta_2^2) \tilde{A}_1^*(t) + 22\beta_2 \tilde{B}_1^*(t) \right\} \\
&- 2\beta_1 A_3^0(t) + (1 + \beta_2^2) B_3^0(t) \left. \right\} = - \left\{ 2\beta_1 D_7^I \{A_1^0(t)\} + (5 - 3\beta_2^2) D_5^I \{B_1^0(t)\} \right. \\
&- \frac{1}{4} \left\{ 22\beta_1 \tilde{A}_1^0(t) - 5(1 + \beta_2^2) \tilde{B}_1^0(t) \right\} \left. \right\} \quad (31. a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
30 \left\{ 2\beta_1 A_3^0(t) + (1 + \beta_2^2) B_3^0(t) \right\} &= - \left\{ 2\beta_1 D_7^I \{A_1^0(t)\} + (5 - 3\beta_2^2) D_5^I \{B_1^0(t)\} \right. \\
&- \frac{1}{4} \left\{ 22\beta_1 \tilde{A}_1^0(t) - 5(1 + \beta_2^2) \tilde{B}_1^0(t) \right\} \left. \right\} \quad (31. b)
\end{aligned}$$

となる。さらに、第4次項 ($n=4$) に対しては次式が成

$$18 \left\{ (1 + \beta_1^2) A_1^0(t) + 2\beta_2 B_1^0(t) \right\} = - \left\{ \frac{3 - 7\beta_1^2 + 3\beta_2^2 + \beta_1^2 \beta_2^2}{1 - \beta_1^2} D_1^0 \{ A_2^0(t) \} \right. \\ \left. + 2\beta_2 D_1^0 \{ B_2^0(t) \} - 4\beta_2 B_2^0(t) \right\} \quad (32. a)$$

$$18 \left\{ 2\beta_1 A_1^*(t) - (1 + \beta_2^2) B_1^*(t) \right\} = - \left\{ 2\beta_1 D_1^* \{ A_2^*(t) \} - (3 - \beta_2^2) D_1^* \{ B_2^*(t) \} \right. \\ \left. - 4\beta_1 A_2^*(t) \right\} \quad (32. b)$$
$$A_n^0(t) = \frac{3(n+1)}{n+2} \frac{C^2(t) B_I(C)}{\mu \sqrt{2\pi} \beta_1^4 C_d^4} K_n^0(t) \ddot{a} \quad (33. a)$$

$$B_n^0(t) = - \frac{3(n+1)}{n+2} \frac{C^2(t) h(n) B_l(C)}{\mu \sqrt{2\pi} \beta_2^5 C_s^4} K_n^0(t) \ddot{a} \quad (33.b)$$

$$A_n^*(t) = \frac{3(n+1)}{n+2} \frac{C^2(t) B_{II}(C)}{\mu \sqrt{2\pi} \beta_1^4 C^4} K_n^*(t) \ddot{a} \quad (33.c)$$

$$B_n^*(t) = \frac{3(n+1)}{n+2} \frac{C^2(t) h(n)}{u \cdot 2\pi \beta_2^5 C_s^4} B_{II}(C) K_n^*(t) \ddot{a} \quad (33.d)$$

$$D_t^I \{A_n^0(t)\} = -\frac{6(n+1)}{n+2} \frac{C^{1/2}(t)}{\mu_1 2\pi \beta_1^2 C_d^2} \frac{d}{dt} \{C^{1/2}(t) B_{II}(C) K_n^0(t)\} \quad (34. a)$$

$$D_t^1 \{A_n^*(t)\} = -\frac{6(n+1)}{n+2} \frac{C^{1/2}(t)}{\mu_1 2\pi\beta_1 C_2^1} \frac{d}{dt} \{C^{1/2}(t) B_{II}(t) C_n^*(t)\} \quad (34.b)$$

$$D_s^I \{B_n^0(t)\} = \frac{6(n+1)}{n+2} \frac{C^{1/2}(t)}{\mu \sqrt{2\pi} \beta_2^2 C^2} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{C^{1/2}(t)^{h(n)} B_l(C)}{\beta_2} K_n^0(t) \right\} \quad (34.c)$$

$$D_s^1\{B_n^*(t)\} = -\frac{6(n+1)}{n+2} \frac{C^{1/2}(t)}{4\pi\beta_2 C^2} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{C^{1/2}(t)}{\beta_2} \frac{h(n)B_{II}(C)}{K_n^*(t)} \right\} \quad (34.d)$$

さらに、き裂加速度がゼロで各係数の時間微分がゼロのとき、式(31), (32)の右辺はゼロとなり、これらの関係式は式(30)と同形になる。また、これらの条件および関係式を式(28)および(29)に代入すると、Nishioka・Atluri⁽¹¹⁾による定常漸近解(16), (17)の $n=0\sim4$ の解と一致する。

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}|_{\text{transient}} = & \underbrace{(\sigma_{ij})_{n=1}}_{\text{(singular terms)}}|_{\text{steady}} + \underbrace{(\sigma_{ij})_{n=2}}_{\text{(constant-stress terms)}}|_{\text{steady}} \\ & + \underbrace{(\sigma_{ij})_{n \geq 3}}_{\text{(high-order terms)}}|_{\text{steady}} + \underbrace{(\sigma_{ij})_{n \geq 3}}_{\text{(high-order terms)}}|_{\text{transient}} \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} u_i|_{\text{transient}} = & (u_i)_{n=0}|_{\text{steady}} + (u_i)_{n=1}|_{\text{steady}} \\ & \text{(rigid-body terms)} \quad \text{(singular terms)} \\ & + (u_i)_{n=2}|_{\text{steady}} \\ & \text{(linear-displacement terms)} \\ & + (u_i)_{n \geq 3}|_{\text{steady}} + (u_i)_{n \geq 3}|_{\text{transient}} \\ & \text{(high-order terms)} \quad \text{(high-order terms)} \end{aligned} \quad (36)$$

漸近場係数時間変化率が正および負の場合の非定常応力部をそれぞれ図7および図8に示す。これらの図より、漸近場係数時間変化率が正のとき、き裂先端前方領域における応力を高める効果を示し、逆に負のとき、き裂先端前方領域における応力を低める効果を示すことが判る。また、これらの図から、特にき裂先端後方(Wake部)の応力を大きく変化させる効果があることが判る。

Fig.2 Near-tip stress distribution for an unsteadily fast propagating crack

Fig.3 Steady part in the near-tip stress distribution

Fig.4 Unsteady part in the near-tip stress distribution

加減速を伴う脆性高速破壊について、Takahashi・Arakawa⁽⁸⁾は高分子材料に対して、コースティック法により応力拡大係数を計測した。この研究により、脆性破壊中の応力拡大係数は、同一き裂速度に対して、加速過程($\ddot{a} > 0$ および $K_I > 0$)のときが減速過程($\ddot{a} < 0$ および $K_I < 0$)のときよりも低くなることを明らかにしている。これに対する十分な説明は現在までなされておらず、動的破壊力学における重要な未解決問題の一つとされてきた⁽⁹⁾。

Fig.5 Crack acceleration ($\ddot{a} > 0$) effects on the transient near-tip stress distribution

Fig.6 Crack deceleration ($\ddot{a} < 0$) effects on the transient near-tip stress distribution

本研究の結果はこの動的破壊の加減速効果を定性的に説明できる可能性を有している。通常、高分子材料中の高速伝播き裂先端ではマイクロクラック群が生じているクレーズゾーンあるいはプロセスゾーンが先行する。加速過程は図5および図7の場合に相当するが、これらの図より、き裂前方のクレーズゾーンが非定常効果により、より大きな引張応力を受けることになる。したがって、より低い応力拡大係数でき裂は進展できる。逆に、減速過程では、図6および図8より、き裂

前方のクレーズゾーンはより低い引張応力あるいは圧縮応力を受けることになり、より高い応力拡大係数でき裂進展に必要なになる。

以上より、動的破壊力学で重要な未解決問題⁽⁹⁾である動的伝播破壊靱性値に対するき裂加速度効果⁽⁸⁾について、本研究で得られた非定常効果が定性的に実験結果の傾向と一致していることが判る。しかしながら、この問題に関してはさらなる研究が必要であろう。

5. 結言

本研究では以下のような成果を得た。

- (1) 非定常高速伝播き裂先端近傍の面内混合モード応力場および変位場について、漸近解の陽な表示式を第0次項から第4次項まで導出した。とくに、変位場の非定常漸近解はモードIを含めても初めてのものである。
- (2) 本研究で求めた式は、特別な場合として、Rosakisら^{(2),(3)}によるモードI非定常応力漸近解($n=1\sim3$)と一致した。また、定常条件を代入するとNishioka・Atluri⁽¹⁾の定常漸近解と一致した。
- (3) き裂速度や応力拡大係数が急激に変化しながら伝播する場合の非定常応力 σ_{22} の分布を可視化した。これにより、き裂先端近傍での非定常効果の様相を明らかにした。
- (4) 非定常応力部をき裂加速度の効果と応力拡大係数を含む漸近場係数の時間変化による効果に分解して、可視化した。これにより、動的破壊力学の重要な未解決問題⁽⁹⁾である動的伝播破壊靱性値に対するき裂加速度効果⁽⁸⁾について説明できる可能性を示した。

文献

- (1) Nishioka, T. and Atluri, S.N., Path Independent Integrals, Energy Release Rates, and General Solutions of Near-Tip Fields in Mixed-Mode Dynamic Fracture Mechanics, Eng. Fract. Mech., 18, (1983), 1.
- (2) Rosakis, A.J., Liu, C. and Freund, L.B., A Note on the Asymptotic Stress Field of A Non-Uniformly Propagating Dynamic Crack, Int. J. Fract. 50, 3, (1991), 39.
- (3) Freund, L.B. and Rosakis, A.J., The Structure of the Near Tip Field During Transient Elastodynamic Crack Growth, J. Mech. Phys. Solids, 40, 3, (1992), 699.
- (4) Deng, X., Transient, Asymptotic, Elastodynamic Analysis: A Simple Method and Its Application to Mixed-Mode Crack Growth, Int. J. Solids Struct., 30, 4, (1993), 513.
- (5) 西岡・近藤・混合モード非定常高速伝播き裂先端漸近解の数式処理による導出、機講論, No.940-54, (1994), 348.
- (6) Nishioka, T., Recent Developments in Computational Dynamic Fracture Mechanics, *Dynamic Fracture Mechanics*, (M.H. Aliabadi, Ed.), Computational Mechanics Publications, Chapter 1, (1995), 1.
- (7) Nishioka, T., Murakami, R., Ohishi, Y. and Maeda, N., A Theory of Caustics For Mixed-Mode Fast Running Cracks (4th Report, Higher-Order Theory), JSME Int. J., Series A, 37, 1 (1994), 22.
- (8) Takahashi, K. and Arakawa, K., Dependence of Crack Acceleration on the Dynamic Stress-Intensity Factor in Polymers, Exp. Mech., 27, (1987), 195.
- (9) Aoki, S., On the Mechanics of Dynamic Fracture, JSME Int. J., Series I, 31, 3, (1988), 487.

Fig.7 Positive loading rate ($\dot{K}_n^0 > 0$) effects on the transient near tip stress distribution

Fig.8 Negative loading rate ($\dot{K}_n^0 < 0$) effects on the transient near tip stress distribution