界面端近傍における特異残留応力場*

許 金 泉^{*1}, 武 藤 睦 治^{*2}

Singular Residual Stress Field near the Interface Edge

Jin-Quan Xu and Yoshiharu Mutoh

Details of the singularities of residual stress at the interface edge remain unclear. This paper presents a theoretical solution of the residual stress, and discusses paradoxical problems which are related to the logarithmic singularity, based on Goursat's stress function. It is found that logarithmic singularity occurs not only in some special cases, but also in the case in which material properties and geometrical shape are near to such special cases. This paper also shows that the residual stress cannot be described only by Dunders' parameters.

Key Words: Residual Stress, Interface Edge, Singularity, Stress Function, Paradox

1. 緒 言

近年、接合残留応力の界面端特異性に関して大きな混乱がみられる。須賀ら⁽¹⁾は平滑端面(90°/90°)接合材に対して、残留応力の界面端特異性が外部負荷時の応力特異性と全く同一であるという結果を導いている。一方、結城ら⁽²⁾は数値解析の結果から、残留応力の特異性には対数型の特異性もありうると提案している。その後、陳ら⁽³⁾が残留応力問題を表面力に置き換えて、半無限体異材の界面端応力特異性を詳しく調べている。このほかにもいくつかの理論的な研究が見られるが⁽⁴⁾、任意の接合角を有する異材の残留応力の界面端特異性や応力場の具体形など、問題はまだ解決していないのが現状である。そこで、本研究ではGoursatの応力関数を用いて、接合残留応力の理論解を導くとともに、その理論解に生じるパラドックス(Paradox)問題やパラドックスに起因する対数型の応力特異性を究明し、接合残留応力の界面端近傍における分布特性を明らかにする。

2. 界面端モデルと境界条件

本研究では一般的な異材界面端を考え、図1に示すように、材料"1"と材料"2"がそれぞれ θ_1 、 θ_2 の角

度で接合されており、接合時と使用時の有効温度差を ΔT とし、表面は自由とする。弾性の範囲で残留応力を考えるとき、境界条件は以下のように与えられる。

Fig.1 Model for edge of interface

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\theta 1} &= \sigma_{\theta 2}, \tau_{r\theta 1} = \tau_{r\theta 2} \\ u_{r1} &= u_{r2} + (\alpha_2^* - \alpha_1^*) \Delta T r, u_{\theta 1} = u_{\theta 2} \end{aligned} \right\} \text{at } \theta = 0 \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\theta 1} &= \tau_{r\theta 1} = 0 \quad \text{at } \theta = \theta_1 \\ \sigma_{\theta 2} &= \tau_{r\theta 2} = 0 \quad \text{at } \theta = \theta_2 \end{aligned} \right\}$$

ただし、ここでは図1に示す極座標系をとり、下付き1および2で材料"1"および"2"に対応するものを示す。また α を材料の線膨張係数とすると、 α^* は次式で与えられる。

* 原稿受付 1995年5月25日。

*¹ 正員、浙江大学力学系(中国浙江杭州)。*² 正員、長岡技術科学大学(〒940-21 長岡市土富岡町1603-1)。

$$\alpha = \begin{cases} (1+\nu)\alpha & \text{plane strain} \\ \alpha & \text{plane stress} \end{cases} \quad (2)$$

便利のために、残留応力を考えないときの境界条件も与えておく。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\theta 1} = \sigma_{\theta 2} = \tau_{\theta 1} = \tau_{\theta 2} \\ u_{r 1} = u_{r 2}, u_{\theta 1} = u_{\theta 2} \end{aligned} \right\} \text{at } \theta = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\theta 1} = \tau_{r \theta 1} = 0 \quad \text{at } \theta = \theta_1 \\ \sigma_{\theta 2} = \tau_{r \theta 2} = 0 \quad \text{at } \theta = \theta_2 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

すなわち残留応力を考えないときの界面端付近の応力場の理論解は式(3)の境界条件を満たす基本方程式の解であり、残留応力の理論解は式(1)の境界条件を満たす基本方程式の解である。

3. 残留応力の理論解の構成

式(1)と式(3)の境界条件を考察すると、両者の差は界面上の変位連続条件に、残留応力の場合に $(\alpha_2^* - \alpha_1^*) \Delta Tr$ の項が現れたことである。微分方程式の解の理論により残留応力の全解は、式(3)を満たす解と式(1)を満たす1つの特解の重ね合わせであることが明らかである。すなわち、

$$\sigma^{res} = \sigma(r^{\lambda-1}) + \sigma_T \quad (4)$$

ここで、 $\sigma(r^{\lambda-1})$ は残留応力を考えないときの界面端付近の特異応力場であり、 σ_T は式(1)を満たす特解である。 $\sigma(r^{\lambda-1})$ について多くの文献^{(6) (7)}があるが、その具体形を与えた文献は少ない。また、 σ_T には新たな特異性が現れるときもある。以下では、Goursatの応力関数により具体的に $\sigma(r^{\lambda-1})$ と σ_T を決める。

4. $\sigma(r^{\lambda-1})$ の具体形

残留応力を考えないときの界面端の応力特異性に関しては多くの文献^{(6) (11)}がある。陳ら⁽⁸⁾の方法に従って、特異性オーダーを決める特性方程式および応力場の形を求める。まず、Goursatの応力関数を次のようにとる。

$$\left. \begin{aligned} \varphi_j &= A_j Z^\lambda + B_j Z^{\bar{\lambda}} \\ \psi_j &= C_j Z^\lambda + D_j Z^{\bar{\lambda}} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ここで、 $j = 1$ および 2 は材料"1"および"2"に対応

$$\sigma_\theta + i\tau_{r\theta} = \left[A_j \lambda^2 e^{i(\lambda-1)\theta} + \bar{B}_j \lambda e^{-i(\lambda-1)\theta} + C_j \lambda e^{i(\lambda+1)\theta} \right] r^{\lambda-1} + \left[\bar{B}_j \lambda^2 e^{i(\bar{\lambda}-1)\theta} + \bar{A}_j \bar{\lambda} e^{-i(\bar{\lambda}-1)\theta} + D_j \bar{\lambda} e^{i(\bar{\lambda}+1)\theta} \right] r^{\bar{\lambda}-1} \quad (6)$$

$$2\mu_j (u_r + iv_\theta) = \left[\kappa_j A_j e^{i(\lambda-1)\theta} - \bar{B}_j \lambda e^{-i(\lambda-1)\theta} - \bar{D}_j e^{-i(\lambda+1)\theta} \right] r^\lambda + \left[\kappa_j \bar{B}_j e^{i(\bar{\lambda}-1)\theta} - \bar{A}_j \bar{\lambda} e^{-i(\bar{\lambda}-1)\theta} - \bar{C}_j e^{i(\bar{\lambda}+1)\theta} \right] r^{\bar{\lambda}} \quad (7)$$

するものを示す。上付き"-"は共役複素数を示す。極座標におけるGoursatの応力関数の形式により応力場と変位場は式(6)、(7)ようになる。ここで μ は材料のせん断弾性係数であり、 κ はポアソン比 ν と次式の関係を持つ。

$$\kappa_j = \begin{cases} 3 - 4\nu_j & \text{plane strain} \\ \frac{3 - \nu_j}{1 + \nu_j} & \text{plane stress} \end{cases} \quad (8)$$

式(3)の境界条件を式(6)および(7)に代入すると、

$$\left. \begin{aligned} A_1 \lambda e^{i(\lambda-1)\theta_1} + \bar{B}_1 e^{-i(\lambda-1)\theta_1} + C_1 e^{i(\lambda+1)\theta_1} &= 0 \\ A_2 \lambda e^{i(\lambda-1)\theta_2} + \bar{B}_2 e^{-i(\lambda-1)\theta_2} + C_2 e^{i(\lambda+1)\theta_2} &= 0 \\ B_1 \bar{\lambda} e^{i(\bar{\lambda}-1)\theta_1} + \bar{A}_1 e^{-i(\bar{\lambda}-1)\theta_1} + D_1 e^{i(\bar{\lambda}+1)\theta_1} &= 0 \\ B_2 \bar{\lambda} e^{i(\bar{\lambda}-1)\theta_2} + \bar{A}_2 e^{-i(\bar{\lambda}-1)\theta_2} + D_2 e^{i(\bar{\lambda}+1)\theta_2} &= 0 \\ A_1 \lambda + \bar{B}_1 + C_1 &= A_2 \lambda + \bar{B}_2 + C_2 \\ B_1 \bar{\lambda} + \bar{A}_1 + D_1 &= B_2 \bar{\lambda} + \bar{A}_2 + D_2 \\ \Gamma(\kappa_1 A_1 - \bar{B}_1 \bar{\lambda} - \bar{D}_1) &= \kappa_2 A_2 - \bar{B}_2 \bar{\lambda} - \bar{D}_2 \\ \Gamma(\kappa_1 B_1 - \bar{A}_1 \bar{\lambda} - \bar{C}_1) &= \kappa_2 B_2 - \bar{A}_2 \bar{\lambda} - \bar{C}_2 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

ただし、 $\Gamma = \mu_2/\mu_1$ である。式(9)の前半の4つの式から C_j , D_j を解いて、5および6番目の式に代入すると次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} A_2 &= F_1(\lambda, \theta_1, \theta_2) A_1 + F_2(\lambda, \theta_1, \theta_2) \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 &= F_3(\lambda, \theta_1, \theta_2) A_1 + F_4(\lambda, \theta_1, \theta_2) \bar{B}_1 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} F_1(\lambda, \theta_1, \theta_2) &= \frac{N(\lambda, \theta_2) M(\lambda, \theta_1) - \lambda^2 M(\theta_2) N(\theta_1)}{4K(\lambda, \theta_2)} \\ F_2(\lambda, \theta_1, \theta_2) &= \lambda \frac{M(\theta_1) N(\lambda, \theta_2) - M(\theta_2) N(\lambda, \theta_1)}{4K(\lambda, \theta_2)} \\ F_3(\lambda, \theta_1, \theta_2) &= \lambda \frac{M(\lambda, \theta_2) N(\theta_1) - M(\theta_1) N(\theta_2)}{4K(\lambda, \theta_2)} \\ F_4(\lambda, \theta_1, \theta_2) &= \frac{M(\lambda, \theta_2) N(\lambda, \theta_1) - \lambda^2 M(\lambda, \theta_1) N(\theta_2)}{4K(\lambda, \theta_2)} \\ M(x) &= 1 - e^{2ix}, N(x) = 1 - e^{-2ix} \\ K(\lambda, x) &= \sin^2 \lambda x - \lambda^2 \sin^2 x \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

式(10)を式(9)の最後の2つの式に代入すると、次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} & \left[\Gamma \kappa_1 + \Gamma e^{2i\lambda\theta_1} - \kappa_2 F_1 + \lambda F_3 (1 - e^{2i\lambda\theta_2}) - e^{2i\lambda\theta_2} F_1 \right] A_1 + \left[-\Gamma \lambda + \Gamma \lambda e^{2i\theta_1} - \kappa_2 F_2 + \lambda F_4 (1 - e^{2i\theta_2}) - e^{2i\lambda\theta_2} F_2 \right] \bar{B}_1 = 0 \\ & \left[-\Gamma \lambda + \Gamma \lambda e^{-2i\theta_1} - \kappa_2 F_3 + \lambda F_1 (1 - e^{-2i\theta_2}) - e^{-2i\lambda\theta_2} F_3 \right] A_1 + \left[\Gamma \kappa_1 + \Gamma e^{-2i\lambda\theta_1} - \kappa_2 F_4 + \lambda F_2 (1 - e^{-2i\theta_2}) - e^{-2i\lambda\theta_2} F_4 \right] \bar{B}_1 = 0 \end{aligned} \right\} \dots (12)$$

式(12)が非零解を有する条件は次式となる。

$$\begin{aligned} & 4(1-\Gamma)^2 K(\lambda\theta_1) K(\lambda\theta_2) + (\kappa_2 + 1)^2 K(\lambda\theta_1) - 4(1-\Gamma) K(\lambda\theta_1) (\kappa_2 + 1) \sin^2 \lambda\theta_2 \\ & + \left[\Gamma(\kappa_1 + 1)^2 \right] K(\lambda\theta_2) + 4\Gamma(1-\Gamma)(\kappa_1 + 1) K(\lambda\theta_2) \sin^2 \lambda\theta_1 - \Gamma(\kappa_2 + 1)(\kappa_1 + 1) [K(\lambda\theta_1) + K(\lambda\theta_2) - K(\lambda\theta_2 - \theta_1)] = 0 \end{aligned} \dots (13)$$

式(13)にDunders'パラメータを利用するために、まず

$$\left. \begin{aligned} \alpha' &= \Gamma(\kappa_1 + 1) - (\kappa_2 + 1) \\ \beta' &= \Gamma(\kappa_1 - 1) - (\kappa_2 - 1) \\ \gamma' &= \Gamma(\kappa_1 + 1) + (\kappa_2 + 1) \end{aligned} \right\} \dots (14)$$

とし、 α' および β' を γ' で除し、それぞれ α および β とする。

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{\alpha'}{\gamma'} = \frac{\Gamma(\kappa_1 + 1) - (\kappa_2 + 1)}{\Gamma(\kappa_1 + 1) + (\kappa_2 + 1)} \\ \beta &= \frac{\beta'}{\gamma'} = \frac{\Gamma(\kappa_1 - 1) - (\kappa_2 - 1)}{\Gamma(\kappa_1 + 1) + (\kappa_2 + 1)} \end{aligned} \right\} \dots (15)$$

$$\left. \begin{aligned} A\beta^2 + 2B\alpha\beta + C\alpha^2 + 2D\beta + 2E\alpha + F &= 0 \\ A &= 4K(\lambda\theta_1)K(\lambda\theta_2) \\ B &= 2\lambda^2 \sin^2 \theta_1 K(\lambda\theta_2) + 2\lambda^2 \sin^2 \theta_2 K(\lambda\theta_1) \\ C &= 4\lambda^2 (\lambda^2 - 1) \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 + K(\lambda\theta_2 + \theta_1) \\ D &= 2\lambda^2 [\sin^2 \theta_1 \sin^2 \lambda\theta_2 - \sin^2 \theta_2 \sin^2 \lambda\theta_1] \\ E &= -D + K(\lambda\theta_2) - K(\lambda\theta_1) \\ F &= K(\lambda\theta_1 - \theta_2) \end{aligned} \right\} \dots (16)$$

式(14)を式(13)に代入し、さらに式(15)を利用するとBogyの特異性オーダに関する特性方程式と全く同じ方程式が得られる。

ただし、 θ_2 はマイナスの角度であることに注意が必要である。式(16)を満たす λ に対応して、式(9)の非零解は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} H(\lambda\theta_1, \theta_2) &= (\beta - \alpha) \lambda M(\theta_1) - (1 - \alpha) F_2 \\ \bar{B}_1 &= \left[1 + \alpha + (\beta - \alpha) M(\lambda\theta_1) - (1 - \alpha) F_1 \right] A_1 / H(\lambda\theta_1, \theta_2) \\ A_2 &= \left[\lambda M(\theta_2) (\beta - \alpha) K(\lambda\theta_1) / K(\lambda\theta_2) - (1 + \alpha) F_2 \right] A_1 / H(\lambda\theta_1, \theta_2) \\ \bar{B}_2 &= \left\{ K(\lambda\theta_1) \left[-M(\lambda\theta_2) (\beta - \alpha) + 1 - \alpha \right] / K(\lambda\theta_2) - (1 + \alpha) F_4 \right\} A_1 / H(\lambda\theta_1, \theta_2) \\ C_1 &= \left\{ (\beta - \alpha) \left[M(\lambda\theta_1) - \lambda^2 M(\theta_1) - 4K(\lambda\theta_1) \right] + (1 + \alpha) \left[1 - N(\lambda\theta_1) \right] \right. \\ & \quad \left. + (1 - \alpha) \left[\lambda F_2 - F_1 + N(\lambda\theta_2) K(\lambda\theta_1) / K(\lambda\theta_2) \right] \right\} A_1 / H(\lambda\theta_1, \theta_2) \\ C_2 &= \left\{ K(\lambda\theta_1) \left[(\beta - \alpha) \left[M(\lambda\theta_2) - \lambda^2 M(\theta_2) - 4K(\lambda\theta_1) \right] + (1 - \alpha) \left[N(\lambda\theta_2) - 1 \right] \right] / K(\lambda\theta_2) \right. \\ & \quad \left. + (1 + \alpha) \left[\lambda F_2 - F_4 - N(\lambda\theta_1) \right] \right\} A_1 / H(\lambda\theta_1, \theta_2) \\ \bar{D}_1 &= \left\{ \lambda (\beta - \alpha) \left[M(\lambda\theta_1) - M(\theta_1) \right] + (1 + \alpha) \lambda \left[1 - M(\theta_1) \right] \right. \\ & \quad \left. - (1 - \alpha) \lambda \left[\lambda F_1 - F_2 - \lambda M(\theta_2) K(\lambda\theta_1) / K(\lambda\theta_2) \right] \right\} A_1 / H(\lambda\theta_1, \theta_2) \\ \bar{D}_2 &= \left\{ K(\lambda\theta_1) \left[\lambda (\beta - \alpha) \left[M(\lambda\theta_2) - M(\theta_2) \right] - (1 - \alpha) \lambda \left[1 - M(\theta_2) \right] \right] / K(\lambda\theta_2) \right. \\ & \quad \left. + (1 + \alpha) \left[\lambda F_4 + F_2 - \lambda M(\theta_1) \right] \right\} A_1 / H(\lambda\theta_1, \theta_2) \end{aligned} \right\} \dots (17)$$

ここで、 A_k は未知係数であり、荷重条件やその他の拘束条件により定まる。式(17)を式(6)に代入し、式(16)の λ の解が多数個ありうることを考慮すると、界面端近傍の応力場は次式で与えられる。

$$\sigma_{\theta_j} + i\tau_{r\theta_j} = \sum_{k=1}^N \left\{ \left[A_k^* \lambda_k^2 e^{i(\lambda_k-1)\theta} + \bar{B}_j^* \lambda_k e^{-i(\lambda_k-1)\theta} + C_j^* \lambda_k e^{i(\lambda_k+1)\theta} \right] r^{\lambda_k-1} + \left[B_j^* \bar{\lambda}_k^2 e^{i(\bar{\lambda}_k-1)\theta} + \bar{A}_j^* \bar{\lambda}_k e^{-i(\bar{\lambda}_k-1)\theta} + D_j^* \bar{\lambda}_k e^{i(\bar{\lambda}_k+1)\theta} \right] r^{\bar{\lambda}_k-1} \right\} \quad \dots(18)$$

ただし、 N は $0 < \text{Re } \lambda < 1$ の範囲内の式(16)の解の個数であり、 A_j^* , B_j^* , C_j^* , D_j^* は λ_k に対応する係数の解である。

5. σ_r の具体形

式(1)の境界条件を満たす特解を求めるため、Goursatの応力関数を次のようにとる。

$$\begin{aligned} \varphi_j &= Z[E_j \log Z + F_j] \\ \psi_j &= Z[G_j \log Z + H_j] \end{aligned} \quad j=1, 2 \quad \dots(19)$$

応力場と変位場は

$$\sigma_{\theta_j} + i\tau_{r\theta_j} = (E_j + \bar{E}_j + G_j e^{2i\theta}) \log r + i\theta(E_j - \bar{E}_j) + 2E_j + \bar{E}_j + F_j + \bar{F}_j + e^{2i\theta}[(1+i\theta)G_j + H_j] \quad \dots(20)$$

$$2\mu_j(u_{rj} + iu_{\theta j})_{\theta=0} = (\kappa_j E_j - \bar{E}_j - \bar{G}_j) r \log r + (\kappa_j F_j - \bar{F}_j - \bar{H}_j - \bar{E}_j) r \quad \dots(21)$$

式(1)の境界条件を式(20)および(21)に代入すると

$$\left. \begin{aligned} E_1 + \bar{E}_1 + G_1 e^{2i\theta_1} &= 0 \\ E_2 + \bar{E}_2 + G_2 e^{2i\theta_2} &= 0 \\ E_1 + \bar{E}_1 + G_1 &= E_2 + \bar{E}_2 + G_2 \\ \Gamma(\kappa_1 E_1 - \bar{E}_1 - \bar{G}_1) &= \kappa_2 E_2 - \bar{E}_2 - \bar{G}_2 \\ F_1 + \bar{F}_1 + H_1 e^{2i\theta_1} + E_1 - 2\bar{E}_1 \theta_1 i &= 0 \\ F_2 + \bar{F}_2 + H_2 e^{2i\theta_2} + E_2 - 2\bar{E}_2 \theta_2 i &= 0 \\ F_1 + \bar{F}_1 + H_1 + E_1 &= F_2 + \bar{F}_2 + H_2 + E_2 \\ \Gamma(\kappa_1 F_1 - \bar{F}_1 - \bar{H}_1 - \bar{E}_1) &= \kappa_2 F_2 - \bar{F}_2 - \bar{H}_2 - \bar{E}_2 + 2\mu_2(\alpha_2^* - \alpha_1^*)\Delta T \end{aligned} \right\} \quad \dots(22)$$

式(22)は E_j , F_j しか含まない方程式に簡単化することができる。

$$\left. \begin{aligned} (E_1 + \bar{E}_1)(1 - e^{-2i\theta_1}) &= (E_2 + \bar{E}_2)(1 - e^{-2i\theta_2}) \\ E_2 &= \frac{1+\alpha}{1-\alpha} E_1 + \frac{\beta-\alpha}{1-\alpha} (E_1 + \bar{E}_1)(1 - e^{2i\theta_1}) \\ (F_1 + \bar{F}_1)(1 - e^{-2i\theta_1}) &= (F_2 + \bar{F}_2)(1 - e^{-2i\theta_2}) + (E_1 - 2\bar{E}_1 \theta_1 i) e^{-2i\theta_1} - E_1 - (E_2 - 2\bar{E}_2 \theta_2 i) e^{-2i\theta_2} + E_2 \\ \frac{1+\alpha}{1-\alpha} F_1 + \frac{\beta-\alpha}{1-\alpha} (F_1 + \bar{F}_1)(1 - e^{2i\theta_1}) &= F_2 + \frac{\beta-\alpha}{1-\alpha} (\bar{E}_1 + 2\bar{E}_1 \theta_1 i) e^{2i\theta_1} - \frac{\beta-\alpha}{1-\alpha} \bar{E}_1 + \frac{2\mu_2}{\kappa_2+1} (\alpha_2^* - \alpha_1^*) \Delta T \end{aligned} \right\} \quad \dots(23)$$

式(23)を解くには、いくつかの場合に分ける必要がある。

$$\Delta_1 = (1 - \cos 2\theta_1) \sin 2\theta_2 - (1 - \cos 2\theta_2) \sin 2\theta_1 = 4 \sin(\theta_1 - \theta_2) \sin \theta_1 \sin \theta_2 \quad \dots(24)$$

とすると、 $\Delta_1 = 0$ と $\Delta_1 \neq 0$ によって解が異なる。

5・1 $\Delta_1 \neq 0$ の特解 このとき、式(23)が次式に示す解を有する。

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= i \operatorname{Im} E_1 = i \left\{ \frac{\mu_2}{\omega_1} \frac{4(1-\alpha)}{\kappa_2 + 1} \Delta_1 (\alpha_2^* - \alpha_1^*) \Delta T \right\} \\ E_2 &= \frac{1+\alpha}{1-\alpha} E_1 \\ \operatorname{Re} F_1 &= \frac{1}{2\Delta_1} [Q_1 \sin 2\theta_2 - Q_2(1 - \cos 2\theta_2)] \operatorname{Im} E_1 \\ \operatorname{Re} F_2 &= \frac{1}{2\Delta_1} [Q_1 \sin 2\theta_1 - Q_2(1 - \cos 2\theta_1)] \operatorname{Im} E_1 \\ G_1 &= G_2 = 0 \\ H_1 &= [(2\theta_1 - i) \operatorname{Im} E_1 - 2 \operatorname{Re} F_1] e^{-2i\theta_1} \\ H_2 &= [(2\theta_2 - i) \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \operatorname{Im} E_1 - 2 \operatorname{Re} F_2] e^{-2i\theta_2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= \frac{1+\alpha}{1-\alpha} (2\theta_2 \cos 2\theta_2 - \sin 2\theta_2) - (2\theta_1 \cos 2\theta_1 - \sin 2\theta_1) \\ Q_2 &= \frac{1+\alpha}{1-\alpha} (1 - \cos 2\theta_2 - 2\theta_2 \sin 2\theta_2) - (1 - \cos 2\theta_1 - 2\theta_1 \sin 2\theta_1) \\ \omega_1 &= [1 + \alpha + 2(\beta - \alpha)(1 - \cos 2\theta_1)] [Q_1 \sin 2\theta_2 - Q_2(1 - \cos 2\theta_2)] \\ &\quad - (1 - \alpha) [Q_1 \sin 2\theta_1 - Q_2(1 - \cos 2\theta_1)] + 2\Delta_1 (\beta - \alpha) [2\theta_1 \cos 2\theta_1 - \sin 2\theta_1] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

である。従って、式(20)より残留応力の特解は次のようになる。

$$\sigma_{\theta} + i\tau_{r\theta} = (1 + 2i\theta)E_j + 2 \operatorname{Re} F_j [1 - e^{2i(\theta - \theta_j)}] \dots\dots\dots (27)$$

式(27)には見掛け上新たな応力特異場はないが、 $\omega_1 = 0$ の時、この解がパラドックスとなる。すなわち、 $\omega_1 = 0$ およびその近辺では式(27)の解は使えない。現実の異材では $\omega_1 = 0$ となる形状と材料の組み合わせはたくさん存在している。図2はその一部を示している。 $\omega_1 \rightarrow 0$ の時の理論解を求めるのは困難であるが、次のような考察により、この場合対数型の応力特異性

を有することが推測される。すなわち、残留応力の特解は次のようにおける。

$$\sigma_{\theta} + i\tau_{r\theta} = \lim_{\lambda \rightarrow 1} \sigma(r^{\lambda-1}) + (1 + 2i\theta)E_j + 2 \operatorname{Re} F_j [1 - e^{2i(\theta - \theta_j)}] \dots\dots\dots (28)$$

$\lambda = 1$ は明らかに式(16)の解であり、従って $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma(r^{\lambda-1})$ は式(18)に示すものである。明らかに式(28)は式(1)の境界条件を満たす。しかも $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma(r^{\lambda-1})$ には一つの未知係数 A_1 をふくむ。この A_1 を適当に決めれば式(28)は

Fig.2 Combinations of materials and geometries for $\omega_1=0$

$$\sigma_{\theta} + i\tau_{r\theta} = \frac{\lim_{\lambda \rightarrow 1} f(r^{\lambda-1})}{\omega_1} \dots\dots\dots (29)$$

の形にすることができる。しかも $\omega_1 \rightarrow 0$ の時、 $0 \neq 0$ の極限形式を有することが可能である。そこで、L'Hospital法則を用いると残留応力の特解は、 $\omega_1 \rightarrow 0$ のとき

$$\sigma_{\theta} + i\tau_{r\theta} = \frac{\lim_{\lambda \rightarrow 1} f(r^{\lambda-1})}{d\omega_1/d\lambda} \ln r \dots\dots\dots (30)$$

すなわち、対数型の特異性を有する。ただし、 λ と材料定数 α 、 β の関係が複雑なため、具体的に $f(r^{\lambda-1})$ を与えるのは困難である。しかし、対数型の特異性を有することさえわかれば、 $f(r^{\lambda-1})$ は数値解析により決められる。

5.2 $\Delta_1 = 0$ の特解 式(24)より、 $\Delta_1 = 0$ となるのは $\theta_1 - \theta_2 = \pi$ 、 $\theta_1 = \pi$ あるいは $\theta_2 = -\pi$ の二つの場合である。

ケース 1、 $\theta_1 - \theta_2 = \pi$ この場合、両自由縁が直線となる。多くの平滑端面 (90°/90°) 接合もこの場

合に属する。

$$\Delta_2 = 2\beta - 2(\beta - \alpha) \cos 2\theta_1 \dots\dots\dots (31)$$

とすると、 $\Delta_2 = 0$ と $\Delta_2 \neq 0$ に分けて、式(22)の解は次のようになる。

$\Delta_2 \neq 0$:

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= E_2 = G_1 = G_2 = 0 \\ \text{Re} F_1 &= \text{Re} F_2 = \frac{1-\alpha}{\Delta_2} \frac{2\mu_2}{\kappa_2-1} (\dot{\alpha}_2 - \dot{\alpha}_1) \Delta T \\ D_1 &= -2 \text{Re} F_1 e^{-2i\theta_1} \\ D_2 &= -2 \text{Re} F_2 e^{-2i\theta_2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (32)$$

残留応力の特解は

$$\sigma_{\theta} + i\tau_{r\theta} = 2 \text{Re} F_j [1 - e^{2i(\theta - \theta_j)}] \dots\dots\dots (33)$$

式(33)にも見掛け上、新たな特異性は生じないが、 $\Delta_2 = 0$ のとき、この解がパラドックスとなるため、前節と同じ考察で $\Delta_2 \rightarrow 0$ の時、対数型の特異性が現れることが推測される。ただし、この場合は次のように $\Delta_2 \rightarrow 0$ のときの理論解を与えることができる。

$\Delta_2 = 0$:

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= (1+iQ_3) \frac{8\mu_2(\cos 2\theta_1 - 1)}{\omega_2(\kappa_2 + 1)} (\dot{\alpha}_2 - \dot{\alpha}_1) \Delta T \\ E_2 &= \frac{1+\alpha}{1-\alpha} E_1 + \frac{\beta-\alpha}{1-\alpha} (E_1 + \bar{E}_1) (1 - e^{2i\theta_1}) \\ G_1 &= -(E_1 + \bar{E}_1) e^{-2i\theta_1}, G_2 = -(E_2 + \bar{E}_2) e^{-2i\theta_2} \\ F_2 &= \frac{1+\alpha}{1-\alpha} F_1 + \frac{\beta-\alpha}{1-\alpha} (F_1 + \bar{F}_1) (1 - e^{2i\theta_1}) + \frac{\beta-\alpha}{1-\alpha} \bar{E}_1 - \frac{\beta-\alpha}{1-\alpha} (\bar{E}_1 + 2E_1 \theta_1 i) e^{2i\theta_1} - \frac{2\mu_2}{\kappa_2+1} (\dot{\alpha}_2 - \dot{\alpha}_1) \Delta T \\ D_1 &= -(E_1 - 2\bar{E}_1 \theta_1 i) e^{-2i\theta_1} - (F_1 + \bar{F}_1) e^{-2i\theta_1} \\ D_2 &= -(E_2 - 2\bar{E}_2 \theta_2 i) e^{-2i\theta_2} - (F_2 + \bar{F}_2) e^{-2i\theta_2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (34)$$

ここで、 F_j は任意の未知係数であり、

$$\left. \begin{aligned} Q_3 &= \frac{(1-\alpha)(\theta_2 - \theta_1)(1 - \cos 2\theta_1) + 2(\beta - \alpha) \sin 2\theta_1 [1 - \cos 2\theta_1 - \theta_2 \sin 2\theta_1]}{2\alpha(1 - \cos 2\theta_1) - \sin 2\theta_1 [(1+\alpha)\theta_2 - (1-\alpha)\theta_1]} \\ \omega_2 &= 2(1 - \cos 2\theta_1) \theta_3 \left[\frac{1+\alpha}{1-\alpha} \theta_2 - \theta_1 + \frac{2(\beta - \alpha)}{1-\alpha} (\sin 2\theta_1 - 2\theta_1 \cos 2\theta_1) \right] \\ &\quad + 2(\theta_1 - \theta_2) \sin 2\theta_1 - \frac{4(\beta - \alpha)}{1-\alpha} (1 - \cos 2\theta_1) [(\theta_2 + 2\theta_1) \sin 2\theta_1 + 1 - \cos 2\theta_1] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (35)$$

残留応力の特解は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\theta_j} + i\tau_{r\theta_j} &= \phi(\theta) \log r + \sigma_0 \\ \phi(\theta) &= (E_j + \bar{E}_j) \left(1 - e^{2i(\theta - \theta_j)} \right) \\ \sigma_0 &= i\theta \left[E_j - \bar{E}_j + G_j e^{2i\theta} \right] + E_j + (E_j + \bar{E}_j) \left[1 - e^{2i(\theta - \theta_j)} \right] + (F_j + \bar{F}_j) \left[1 - e^{2i(\theta - \theta_j)} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (36)$$

すなわち残留応力には新たに対数型の特異性が生じる。

ケース 2、 $\theta_1 = \pi$ 、 $\theta_2 \neq -\pi$ このとき、式 (22) の解は

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= E_2 = G_1 = G_2 = 0 \\ \text{Re} F_2 &= 0, H_2 = 0 \\ \text{Re} F_1 &= \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \frac{2\mu_2}{\kappa_2+1} (\alpha_2^* - \alpha_1^*) \Delta T \\ H_1 &= -2 \text{Re} F_1 e^{-2i\theta_2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (37)$$

となり、残留応力の特解は

$$\sigma_{\theta_j} + i\tau_{r\theta_j} = 2 \text{Re} F_j \left[1 - e^{2i(\theta - \theta_j)} \right] \dots\dots\dots (38)$$

ケース 3、 $\theta_1 = \pi$ 、 $\theta_2 = \pi$

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= E_2 = G_1 = G_2 = 0 \\ F_2 &= \frac{1+\alpha}{1-\alpha} F_1 - \frac{2\mu_2}{\kappa_2+1} (\alpha_2^* - \alpha_1^*) \Delta T \\ H_1 &= -(F_1 + \bar{F}_1), H_2 = -(F_2 + \bar{F}_2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (39)$$

ここで、 F_1 は任意の未知係数である。残留応力の特解は

$$\sigma_{\theta_j} + i\tau_{r\theta_j} = 2 \text{Re} F_j \left[1 - e^{2i(\theta - \theta_j)} \right] \dots\dots\dots (40)$$

明らかに、現実の異材ではケース 2 とケース 3 において、残留応力の特解には新たな特異性はない。また以上のすべての解に、材料定数の影響として α および β のほかに $\mu_2/(\kappa_2+1)$ の項がある。すなわち残留応力に対しては、Dunders' パラメータで表しきれない。

6. 考察

数学的に対数型の特異性が生じるのは $\Delta_1 \neq 0$ 、 $\omega_1 \rightarrow 0$ の場合と $\Delta_1 = 0$ 、 $\Delta_2 \rightarrow 0$ の場合の二つの極限状態だけであるが、実際にはこの極限状況の近くでも近似的に対数型の特異性が現れると考えられる。特に定数項の応力 σ が材料の降伏強度よりも大きい場合、または特異応力の支配域内で特異応力よりも大きい場合⁽⁹⁾ では、パラドックスとなる点の特異性（対数型の特異性）と考え合わせ、近似的に対数型の特異性とみな

す方が強度解析上便利であろう。また、数値解析の結果では、パラドックスとなる点の近くで、ほぼ対数型の特異性を有することはすでに文献(2)に示されている。

また、平滑端面（90°/90°）接合材においては理論上対数型の特異性が現れる条件として、 $\Delta_2 = 0$ すなわち $\alpha = 2\beta$ となる。これは Bogy⁽⁶⁾ の表面力を受ける異材界面端に関する結果と一致する。しかしパラドックスの問題を考えると、 $\alpha - 2\beta$ が小さい場合でも近似的に対数の特異性がある。

7. 結 論

本研究は残留応力の界面端における特異性を解明し、その応力場の全形を示した。得られた結果は以下の通りである。

1) 残留応力の界面端特異性は外部負荷と同じ特異性のほかに、新たに対数型の特異性が現れる可能性がある。

2) 対数型特異性の起因は理論解にパラドックスを含むことである。パラドックスとなる材料的組み合わせや幾何学形状では、対数型の特異性が理論的にも現れる。

3) パラドックスに近い材料の組み合わせや幾何学形状では理論上定数項の応力が非常に大きくなり、近似的に対数型の特異性を有すると考えられる。

4) 残留応力は Dunders' パラメータだけでは表しきれない。

参考文献

1. Suga T. Mizuno K. and Miyazawa K., "Thermal stresses in ceramic/metal joints", Proc. MRS, Joints of metal and ceramics, 1988, pp.137-142.
2. 結城・許, "異材界面端の熱応力・残留応力の対数型 応力特異性", 機論 A, 58-556 (1992), pp.2394-2401.
3. 陳・西谷, 機論 A, 59-564 (1993), pp.1937-1943.
4. 井上・古口・矢田, 機論 A, 61-581 (1995), pp.73-79.
5. 結城・許, 機論 A, 57-536 (1991), pp.864-870.
6. Bogy D.B, J. Appl. Mech, 38 (1971), pp.327-386.
7. 久保・大路, 機論 A, 57-535 (1991), pp.632-636.
8. 陳・西谷, 機論 A, 58-547 (1992), pp.372-378.
9. 三好・小池, 機講論, No.910-62 (1991-9), Vol. A, pp.652-654.
10. 陳・西谷, 機論 A, 59-566 (1993), pp.2389-2396.
11. 陳・西谷, 機論 A, 59-566 (1993), pp.2397-2403.