固体の一次元増分衝撃理論*

谷 本

昇^{*1}

One-Dimensional Theory of Incremental Impact on Solids

Noboru TANIMOTO

An elastic plastic viscoplastic constitutive equation for static preloaded materials subjected to dynamic loading is proposed, from which an equation for the speed of an incremental impulsive stress wave is derived. Using the proposed equation, the proposed theory predicts that the slope of the incremental dynamic stress strain curve $d\sigma/d\varepsilon$ coincides with the modulus of longitudinal elasticity E at the beginning point of incremental impact, and thereafter, decreases with increasing incremental strain. Using the derived equation, the proposed theory predicts that speed of the precursor of the incremental impulsive stress wave coincides with that of the longitudinal elastic stress wave c_0 at the beginning point of incremental impact, and thereafter, speed of the incremental impulsive stress wave corresponding to any strain except elastic strain decreases with increasing strain. Using both equations, relation between incremental dynamic stress strain curves and the speed of an incremental impulsive stress wave is theoretically derived, which agrees with experimental results.

Key Words: Incremental Dynamic Loading, Incremental Dynamic Stress Strain Curve, Speed of Incremental Impulsive Stress Wave, Elastic Plastic Viscoplastic Constitutive Equation, Understress, Overstress

1. 序 論

固体材料の動的挙動に関して、静的前負荷を受けた材料(除荷はしない)に動的負荷を加えた場合(静的前負荷と同じ方向に)の挙動の問題がある。いわゆる、増分衝撃問題である。一つは、増分衝撃負荷後の材料の応力・ひずみ関係がどのようなになるかということと、他は、増分衝撃負荷後の材料内を伝ばする応力波伝ば速度がどのようなになるかということである。この二つの現象は、便宜上分けて考えられる場合もあるが、材料に外力が負荷されると、その外力は応力波として伝ばし、その波に対応して応力やひずみが生じるのであるから、両者は関係があると考えられるので、さらに、三番めとして、両者の間にどのような関係があるかという問題が生じる。

増分衝撃負荷に関する実験は数多くなされ、増分動的応力・ひずみ曲線が求められている。Bachilev ら⁽¹⁾⁽²⁾(1953)は銅、すずおよびアルミニウムの増分動的応力・ひずみ曲線を求めている。Campbell ら⁽³⁾(1970)はねじりせん断試験で軟鋼、銅およびアルミニウムの、

白井と白樫⁽⁴⁾⁽⁵⁾(1971)は黄銅と銅の、Nicholas⁽⁶⁾(1971)はねじりせん断試験でチタンの増分動的応力・ひずみ曲線を求めており、以後、多くの増分動的応力・ひずみ曲線が求められている^{(7)~(15)}。これら増分衝撃実験結果は次のことを示している。

[1] ひずみに対応する増分衝撃応力は、同じひずみに対応する静的応力より大きくなる。

[2] 増分衝撃開始点近傍で、増分動的応力・ひずみ曲線の傾き $d\sigma/d\varepsilon$ は、縦弾性係数 E (ねじりせん断の場合は横弾性係数 μ) にほぼ等しい。

[3] 増分動的応力・ひずみ曲線の傾き $d\sigma/d\varepsilon$ は、ひずみの増加とともに小さくなる。

[4] 軟鋼について、増分動的曲線で、ひずみに対応する応力はひずみ速度の増加とともに大きくなる⁽¹³⁾。

[5] 軟鋼について、増分衝撃後のひずみに対応する応力は、静的前ひずみの増加とともに大きくなる⁽¹¹⁾。

[6] 増分動的応力 σ_1 と、静的前負荷がない場合の、同じひずみ速度の動的応力・ひずみ曲線の応力 σ_2 の大小関係は材料によって異なり、およそ次のようである。

(a) $\sigma_1 > \sigma_2$: 軟鋼⁽¹³⁾

* 1995 年 9 月 13 日 機械学会第 73 期全国大会において講演、原稿受付 1995 年 9 月 19 日。

*¹ 正員、宇部工業高等専門学校 (〒755 宇部市常盤台)。

(b) $\sigma_1 \leq \sigma_2$: 銅, アルミニウム, 黄銅, チタン, マグネシウム, 亜鉛, すず, SUS 430

一方, 増分衝撃応力波伝ば速度を伝ばする応力波伝ば実験で, Sternglass ら⁽¹⁶⁾(1953)は, 静的引張りを与えた銅に引張増分衝撃を負荷し, 先行波の伝ば速度は弾性波のそれと一致すること, 任意のパルスに対応する増分衝撃応力波の伝ば速度は, 静的曲線上の前負荷点での接線係数から求めた伝ば速度よりかなり大きくなること, ひずみは伝ばの距離とともに減衰することを見出ししている。以後, いくつかの増分衝撃応力波の伝ば実験がなされた^{(3)(16)~(19)}。

これら増分衝撃応力波伝ばの実験結果は次のことを示している。

[A] 零でない任意のひずみに対応する増分衝撃応力波伝ば速度は, 同じひずみに対応する弾・塑性応力波伝ば理論(Karman 理論)からの伝ば速度より大きい。

[B] 増分衝撃応力波の先行波の伝ば速度は弾性波のそれと一致する。

[C] 零でない任意のひずみに対応する増分衝撃応力波伝ば速度はひずみの増加とともに小さくなる。

[D] アルミニウムと銅について, 零でない任意のひずみに対応する増分衝撃応力波伝ば速度は衝撃端から遠ざかるにつれて減衰する⁽¹⁸⁾。したがって, ひずみ速度は普通, 衝撃端から遠ざかるにつれて減少することを考えると, 零でない任意のひずみに対応する増分衝撃応力波伝ば速度はひずみ速度の増加とともに大きくなる。

[E] アルミニウムと銅について, 零でない任意のひずみに対応する増分衝撃応力波伝ば速度は静的前ひずみの増加とともに減少する⁽¹⁸⁾。

本論文では, 熱エネルギーの変化を考慮しない場合, 静的前負荷がある場合の弾・塑・粘塑性構成式を提案し, 弾・塑・粘塑性増分衝撃応力波伝ば速度の式を導出する。また, 提案構成式を用いると, 増分衝撃負荷実験結果の増分動的応力・ひずみ曲線を説明することができること, 導出した増分衝撃応力波伝ば速度の式を用いると, 増分衝撃応力波伝ば実験の結果を説明することができることを示す。さらに, 弾・塑・粘塑性増分動的応力・ひずみ曲線と弾・塑・粘塑性増分衝撃応力波伝ば速度の理論的關係を導き, 両者が互いに密接に対応することを示し, 増分動的応力・ひずみ曲線と増分衝撃応力波伝ば速度の実験結果の密接な関係を説明できることを示す。

2. 構成式

2.1 弾・塑・粘塑性構成式 静的前負荷の量が材料の静的応力・ひずみ曲線に影響を与えない場合を考える。ひずみ ε は弾性ひずみ ε^e と非弾性ひずみ ε^i の和であり, 非弾性ひずみは塑性ひずみ ε^p と粘塑性ひずみ ε^{vp} の和である。静的前負荷を受けた材料に動的負荷を加えた場合に対する構成式は, 静的前負荷を受けていない材料に対する弾・塑・粘塑性構成式⁽²⁰⁾に, 静的前非弾性ひずみ ε_{pr}^i を導入することによって得られる。

$$\dot{\varepsilon} = \begin{cases} \left\{ \frac{1}{E} + \psi(H) \right\} \dot{\sigma} + \phi(F)\sigma & \text{for } F > 0 \\ \frac{1}{E} \dot{\sigma} & \text{for } F \leq 0 \end{cases} \quad (1 \cdot a)$$

σ は応力である。(ドット)は時間微分を表し, E は縦弾性係数である, H と F は低下応力と超過応力

$$H = \frac{\sigma_F}{\sigma} - 1 \quad (2 \cdot a)$$

$$F = \frac{\sigma}{\sigma_S} - 1 \quad (2 \cdot b)$$

であり, $\phi(H)$ と $\phi(F)$ は低下応力関数(あるいは塑性関数)と超過応力関数(あるいは粘塑性関数)

$$\phi(H) = \frac{2}{3\zeta} H^{k_1} \quad (3 \cdot a)$$

$$\phi(F) = \frac{2}{3\eta} F^{k_2} \quad (3 \cdot b)$$

である, σ_F と σ_S は仮弾性応力と静的応力

$$\sigma_F = E(\varepsilon - \varepsilon_{pr}^i) \quad (4 \cdot a)$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma_S}{E} + a \left(\frac{\sigma_S}{\sigma_Y} - 1 \right)^b \quad (4 \cdot b)$$

である, a と b は材料定数であり, σ_Y は静的初期引張降伏応力である, ζ と η は塑性係数と粘塑性係数であり, k_1 と k_2 は塑性定数と粘塑性定数である, 低下応力は正を採用する。静的曲線式(4・b)は実験曲線を表現するものなどのような関数形でよい。

式(1) (4)は, 増分動的曲線は負荷過程で応力・ひずみ平面上の静的曲線と, 増分衝撃開始点をとる弾性直線の間にくるという事実から, 低下応力を塑性ひずみ成分(非弾性ひずみの定常成分)に, 超過応力を粘塑性ひずみ速度成分(非弾性ひずみ速度の非定常成分)に関連させた, 静的前負荷がある場合の弾・塑・粘塑性構成式である(図1)。あるいは, 式(1) (4)は, 静的前負荷がない場合の弾・塑・粘塑性構成式において, 初期弾性直線を, ひずみ軸の方向へ静的前非弾性ひずみ ε_{pr}^i だけ平行移動させたものと一致する。右下添字 pr は静的前負荷の場合を表し, 右下添字 e と i は弾性成

分と非弾性成分を表す。 ϵ_y は静的引張初期降伏ひずみである。

低下応力と超過応力は、図1において

$$H = \frac{QR}{RT} \quad \dots\dots\dots (5\cdot a)$$

$$F = \frac{RS}{ST} \quad \dots\dots\dots (5\cdot b)$$

である。式(5・a)から式(2・a)を、式(5・b)から式(2・b)を得る。増分衝撃開始点、すなわち、静的前負荷の終了点Pをとる直線は縦弾性係数を傾きとする直線であり、式(4・a)で表される。低下応力と超過応力は

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^i \quad \dots\dots\dots (6\cdot a)$$

$$\epsilon_{pr} = \epsilon_{pr}^e + \epsilon_{pr}^i \quad \dots\dots\dots (6\cdot b)$$

$$\sigma = E\epsilon^e \quad \dots\dots\dots (6\cdot c)$$

を用いると

$$H = \frac{E(\epsilon - \epsilon_{pr}^i)}{\sigma} - 1 \quad \dots\dots\dots (7\cdot a)$$

$$= \frac{E(\epsilon - \epsilon^e - \epsilon_{pr}^e + \epsilon_{pr}^e)}{\sigma} \quad \dots\dots\dots (7\cdot b)$$

$$= \frac{E(\epsilon^i - \epsilon_{pr}^i)}{\sigma} \quad \dots\dots\dots (7\cdot c)$$

$$= \frac{\epsilon^i - \epsilon_{pr}^i}{\epsilon^e} \quad \dots\dots\dots (7\cdot d)$$

$$F = \frac{E\epsilon^e}{\sigma_s} - 1 \quad \dots\dots\dots (8\cdot a)$$

$$= \frac{E(\epsilon - \epsilon^i)}{\sigma_s} - 1 \quad \dots\dots\dots (8\cdot b)$$

とも書ける。低下応力は、応力、ひずみ、弾性ひずみ、非弾性ひずみ、静的前ひずみ、静的前弾性ひずみおよび静的前非弾性ひずみを結びつける量である。増分衝撃の場合の弾・塑・粘塑性構成式と静的前負荷がない場合のその相違は、仮弾性応力式(4・a)が異なるだ

Fig. 1 Schematic diagram of incremental dynamic loading, static pre strain, understress and overstress

けである。すなわち、前者では仮弾性応力に静的前非弾性ひずみが含まれており、後者ではそうでない。式(1)~(8)で静的前非弾性ひずみが零

$$\epsilon_{pr}^i = 0 \quad \dots\dots\dots (9)$$

を用いると、静的前負荷がない場合の弾・塑・粘塑性構成式となる。

2.2 増分動的曲線の傾き

弾・塑・粘塑性増分動的曲線の応力・ひずみ平面上における傾きについて考察する。微小変形を考える。増分動的負荷過程における、応力のひずみに関する1階導関数は、式(1・a)から

$$\frac{d\sigma}{d\epsilon} = \frac{1 - \phi(F)\sigma}{\frac{1}{E} + \psi(H)} \quad \dots\dots\dots (10)$$

となる。ここで、改めて、低下応力の引数の一つである仮弾性応力に静的前非弾性ひずみが含まれていることに注意したい。式(10)から、弾・塑・粘塑性構成式では、応力・ひずみ平面上の傾き $d\sigma/d\epsilon$ はひずみ速度、応力、低下応力関数および超過応力関数に依存することを意味する。増分衝撃負荷過程では

$$\sigma > 0 \text{ and } \dot{\epsilon} > 0 \text{ for tension} \quad \dots\dots\dots (11\cdot a)$$

$$\sigma < 0 \text{ and } \dot{\epsilon} < 0 \text{ for compression} \quad \dots\dots\dots (11\cdot b)$$

であり、塑性関数 ψ と粘塑性関数 ϕ は式(3)から

$$\phi(H) > 0 \quad \dots\dots\dots (12\cdot a)$$

$$\phi(F) > 0 \quad \dots\dots\dots (12\cdot b)$$

であるので

$$\frac{\phi(F)\sigma}{\dot{\epsilon}} > 0 \quad \dots\dots\dots (13)$$

となる。さらに、縦弾性係数は

$$E > 0 \quad \dots\dots\dots (14)$$

であるので、式(10)、(13)および式(14)から次式を得る。

$$\frac{d\sigma}{d\epsilon} < E \quad \dots\dots\dots (15)$$

式(15)は、増分動的応力・ひずみ曲線の傾きが縦弾性係数の値より小さいことを意味する。

一方、増分衝撃開始点Pで次式が成り立つ。

$$\{\phi(H)\}_P = 0 \quad \dots\dots\dots (16\cdot a)$$

$$\{\phi(F)\}_P = 0 \quad \dots\dots\dots (16\cdot b)$$

式(16)は、増分衝撃開始点が静的応力・ひずみ曲線上にあるので、弾・塑・粘塑性構成式(1)の定義と式(2・b)から自明である。したがって、式(1・b)から、増分衝撃開始点で次式が成り立つ。

$$\left(\frac{d\sigma}{d\epsilon}\right)_P = E \quad \dots\dots\dots (17)$$

したがって、増分衝撃負荷過程に、増分衝撃開始点を含めて考えると、式(15)と式(17)から

$$\frac{d\sigma}{d\epsilon} \leq E \quad \dots\dots\dots (18)$$

を得る。式(18)は、増分衝撃負荷過程で、弾・塑・粘塑性増分動的応力・ひずみ曲線の傾き $d\sigma/d\varepsilon$ は、増分衝撃開始時にヤング率 E (せん断のとき横弾性係数 μ) の値をとり、以後小さくなることを意味する。式(18)は弾・塑・粘塑性構成式を用いた場合の重要な理論的帰結の一つである。

式(16)を、以下のように証明することもできる。ここで、 X を弾・塑・粘塑性構成式に関する任意の量とすると、増分衝撃開始点で次式が成り立つ。

$$(X)_p = (X)_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_{pr} + 0} \quad (19 \cdot a)$$

$$= (X)_{\varepsilon^i \rightarrow \varepsilon_{pr} + 0} \quad (19 \cdot b)$$

$$= (X)_{\sigma \rightarrow \sigma_{pr} + 0} \quad (19 \cdot c)$$

式(7)、(8)および式(19)を用いると

$$(H)_p = 0 \quad (20 \cdot a)$$

$$(F)_p = 0 \quad (20 \cdot b)$$

が成立する。式(3)と式(20)から、式(16)が成立する。上述のように、静的前負荷を考慮した弾・塑・粘塑性構成式は増分動的応力・ひずみ曲線の実験結果[1] [3]を説明する。実験結果[4] - [6]について解析的に不明であるので、別報⁽²⁰⁾で数値解析結果をもとに検討する。

3. 波動伝ば速度

3・1 増分衝撃応力波伝ば速度の式の導出 増分衝撃応力波伝ば速度の式は、静的前負荷がない場合⁽²¹⁾と同様にして求めることができる。ラグランジェ座標における微小変形を考える。一次元問題では、各物理量は位置 x と時間 t の関数である。必要な方程式は

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \quad (21 \cdot a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon^e}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon^i}{\partial t} \quad (21 \cdot b)$$

$$\frac{\partial \varepsilon^e}{\partial t} = \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad (21 \cdot c)$$

$$\frac{\partial \varepsilon^i}{\partial t} = \phi(H) \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \phi(F) \sigma \quad (21 \cdot d)$$

ρ と v は密度と粒子速度である。式(21・a)と式(21・b)は運動方程式と連続の式であり、式(21・c)と式(21・d)は弾・塑・粘塑性構成式である。静的前負荷の量は、定数として式(21・d)の右辺の低下応力関数に含まれるだけである。各物理量と、独立変数 x および t の関係は、微小変形を考えているので

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial t} dt \quad (22 \cdot a)$$

$$d\sigma = \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma}{\partial t} dt \quad (22 \cdot b)$$

$$d\varepsilon^e = \frac{\partial \varepsilon^e}{\partial x} dx + \frac{\partial \varepsilon^e}{\partial t} dt \quad (22 \cdot c)$$

$$d\varepsilon^i = \frac{\partial \varepsilon^i}{\partial x} dx + \frac{\partial \varepsilon^i}{\partial t} dt \quad (22 \cdot d)$$

ひずみや応力などは

$$\sigma \geq \sigma_{pr} \quad (23 \cdot a)$$

$$\varepsilon \geq \varepsilon_{pr} \quad (23 \cdot b)$$

$$\varepsilon^i \geq \varepsilon_{pr}^i \quad (23 \cdot c)$$

$$\varepsilon^e \geq \varepsilon_{pr}^e \quad (23 \cdot d)$$

なる値をとり、粒子速度 v は式(23)に対応した値をとる。式(21)と式(22)をマトリックス形式で整理すると

$$[A]\{X\} = \{B\} \quad (24)$$

ここで

$$[A] = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ dt & 0 & 0 & 0 & dx & 0 & 0 & 0 \\ 0 & dt & 0 & 0 & 0 & dx & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dt & 0 & 0 & 0 & dx & 0 \\ 0 & 0 & 0 & dt & 0 & 0 & 0 & dx \end{bmatrix} \quad (25 \cdot a)$$

$$\{X\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial t} \\ \frac{\partial \sigma}{\partial t} \\ \frac{\partial \varepsilon^e}{\partial t} \\ \frac{\partial \varepsilon^i}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial \sigma}{\partial x} \\ \frac{\partial \varepsilon^e}{\partial x} \\ \frac{\partial \varepsilon^i}{\partial x} \end{array} \right\} \quad (25 \cdot b)$$

$$\{B\} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\phi \sigma \\ dv \\ d\sigma \\ d\varepsilon^e \\ d\varepsilon^i \end{array} \right\} \quad (25 \cdot c)$$

今、変化する物理量を対象としているので、 $\varepsilon^e, \varepsilon^i, v$ および σ の、 x あるいは t に関する 1 階偏導関数が零でない任意の値を取り得る場合を考えなければならない。したがって、式(25)から次式を得る。

$$d\sigma = \pm \rho c dv - \rho c^2 \phi(F) \sigma dt \quad (26 \cdot a)$$

$$\text{for } dx = \pm c dt \quad (26 \cdot b)$$

$$dv = \pm c d\epsilon \quad (27 \cdot a)$$

$$\text{for } dx = \pm c dt \quad (27 \cdot b)$$

$$d\epsilon^e = d\sigma/E \quad (28 \cdot a)$$

$$\text{for } dx = 0 \quad (28 \cdot b)$$

$$d\epsilon^i = \phi(H) d\sigma + \phi(F) \sigma dt \quad (29 \cdot a)$$

$$\text{for } dx = 0 \quad (29 \cdot b)$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho \left\{ \frac{1}{E} + \phi(H) \right\}}} \quad (30 \cdot a)$$

$$c = \sqrt{\frac{c_0}{1 + E\phi(H)}} \quad (30 \cdot b)$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho \left[\frac{1}{E} + \frac{2}{3\zeta} \left\{ \frac{E(\epsilon - \epsilon_{pr})}{\sigma} - 1 \right\}^{k_1} \right]}} \quad (30 \cdot c)$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho \left(\frac{d\epsilon}{d\sigma} - \frac{d\epsilon^{vp}}{d\sigma} \right)}} \quad (30 \cdot d)$$

ここで $c_0 = \sqrt{E/\rho}$ である。式(26・a)は増分衝撃応力波伝ば速度、応力増分、粒子速度増分および時間増分の関係式であり、式(27・a)は増分衝撃応力波伝ば速度、粒子速度増分およびひずみ増分、式(28・a)は弾性ひずみ増分と応力増分、式(29・a)は非弾性ひずみ増分、応力増分および時間増分の関係式である。式(26・b)、あるいは、式(27・b)から微小距離 dx を微小時間 dt で除した量が c であるので、式(30)の c は、粒子速度 v でなく、弾・塑・粘塑性増分衝撃応力波伝ば速度とみなすことができる。式(30・c)は式(2・a)、(3・a)、(4・a)および式(30・a)から、式(30・b)は式(30・a)から、式(30・d)は式(1)と式(30・a)から求めることができる。各式(21) (30)は静的前ひずみがない場合の式⁽²²⁾と形式が同じである。しかし、前者は静的前非弾性ひずみを考慮しており、後者はそうでないので、両者の内容は異なる。それは、形式的には、低下応力を具体的に表現した式(30・c)の右辺に ϵ_{pr} が含まれているところに現れている。変形はラグランジュ座標における微小変形であり、式(1)は構成式であり任意の x と t で成立しなければならないので、式(1・a)から次式も成り立つ。

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \left\{ \frac{1}{E} + \phi(H) \right\} \frac{d\sigma}{dt} + \phi(F) \sigma \quad (31 \cdot a)$$

$$\text{for any } x \text{ and } t \quad (31 \cdot b)$$

3・2 増分衝撃応力波伝ば速度の範囲 伝ば速度 c は、式(12・a)、(14)および式(30・a)を考慮すると、増分衝撃負荷過程で次式を満足する。

$$c < c_0 \quad (32)$$

一方、増分衝撃開始点 P で、式(16・a)が成立するので、式(16・a)と式(30・a)から

$$(c)_P = c_0 \quad (33)$$

となる。増分衝撃負荷過程に、増分衝撃開始点、すなわち静的応力・ひずみ曲線を含めて考えると、式(32)と式(33)から

$$c \leq c_0 \quad (34)$$

を得る。式(34)は、増分衝撃応力波伝ば速度は増分衝撃開始点で最大値 c_0 をとり、その後、ひずみの増加とともに減少することを意味する。式(30・b)、(30・c)、(30・d)を用いることによって式(34)を導くことができる。

増分衝撃応力波伝ば速度のひずみに関する導関数は、式(30・c)から

$$\frac{dc}{d\epsilon} = - \frac{c_0 E^2 k_1 H^{k_1-1}}{3\zeta \{1 + E\phi(H)\}^{3/2} \sigma} \quad (35)$$

となり、

$$d\epsilon > 0 \text{ and } \sigma > 0 \quad \text{for tension} \quad (36 \cdot a)$$

$$d\epsilon < 0 \text{ and } \sigma < 0 \quad \text{for compression} \quad (36 \cdot b)$$

であり、他の係数は正であるので、式(35)と式(36)から

$$dc < 0 \quad (37)$$

を得る。式(37)は、式(30)がひずみに関して減少関数であり、増分衝撃応力波伝ば速度が変形の増加とともに減少することを意味する。このように、弾・塑・粘塑性増分衝撃応力波伝ば理論による伝ば速度は、伝ば実験結果 [A] [C] を説明する。実験結果 [D] と [E] について解析的に不明であるので、別報⁽²⁰⁾で数値解析結果をもとに検討する。

4. 増分衝撃応力波伝ば速度と増分動的応力・ひずみ曲線の関係

すでに、増分衝撃応力波伝ば速度 c と増分動的応力・ひずみ曲線の傾き $d\epsilon/d\sigma$ は一つの理論式、式(30・d)で関係づけられているので、両物理量が関係することがわかる。増分動的応力・ひずみ曲線式(1)、あるいは、式(31・a)の傾き $d\sigma/d\epsilon$ は式(10)となり、そのとり得る範囲は式(18)で与えられる。傾きは増分衝撃開始点で縦弾性係数と一致し [式(17)]、その後、ひずみの増加とともに小さくなる [式(15)]。一方、増分衝撃応力波伝ば速度式(30)のとり得る範囲は式(34)で与えられる。増分衝撃開始点で伝ば速度は縦弾性波の伝ば速度と一致し [式(33)]、その後、ひずみの増加とともに小さくなる [式(32)]。このように、増分衝撃応力波伝ば速度と増分動的応力・ひずみ曲線は、密接に対応することがわかる。

次に、増分衝撃応力波伝ば速度 c から、増分衝撃応力波伝ば速度 c と増分動的応力・ひずみ曲線の傾き $d\sigma/d\epsilon$ の関係式を導出し、考察する。式(10)と式(30・a)

から

$$c = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\phi(F)\sigma}{\dot{\epsilon}} \sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{d\sigma}{d\epsilon}}}} \dots\dots\dots (38)$$

を得る。式(38)では、伝ば速度が、弾・塑性応力波伝ば理論で使用される形 $\sqrt{d\sigma/d\epsilon/\rho}$ と、ひずみ速度 $\dot{\epsilon}$ を含む係数、の積の形で表現されている。増分衝撃開始点 P では、式(38)から

$$(c)_P = \frac{1}{\sqrt{1 - \left\{ \frac{\phi(F)\sigma}{\dot{\epsilon}} \right\}_P \sqrt{\frac{1}{\rho} \left(\frac{d\sigma}{d\epsilon} \right)_P}}} \dots\dots\dots (39)$$

となる。一方、式(16・b)から

$$\left\{ \frac{\phi(F)\sigma}{\dot{\epsilon}} \right\}_P = 0 \dots\dots\dots (40)$$

となる。式(17)、(39)および式(40)から

$$(c)_P = c_0 \dots\dots\dots (41)$$

を得る。式(33)と式(41)は同じであるが、理解のしやすさのため再記した。以下、必要な場合、同様にする。式(17)が成立するとき式(41)が成立する。増分衝撃開始点で、増分動的応力・ひずみ曲線の傾きは縦弾性係数の値となり、同時に、増分衝撃応力波伝ば速度は縦弾性応力波の伝ば速度となる。時間の経過とともに、すなわち、増分衝撃ひずみが増加すると、式(13)、(15)および式(38)から

$$c < c_0 \dots\dots\dots (42)$$

を得る。したがって、式(15)が成立するとき式(42)が成立する。増分衝撃負荷過程で、増分動的応力・ひずみ曲線の傾きは増分衝撃応力波伝ば速度と対応する。増分衝撃負荷過程に、増分衝撃開始点を含めて考えると、式(41)と式(42)から

$$c \leq c_0 \dots\dots\dots (43)$$

を得る。

次に、増分動的応力・ひずみ曲線の傾き $d\epsilon/d\sigma$ を用いた場合を考察する。構成式(1)、あるいは式(31・a)から

$$\frac{d\epsilon}{d\sigma} = \frac{1}{E} + \phi(H) + \frac{\phi(F)\sigma}{\dot{\sigma}} \dots\dots\dots (44)$$

を得る。式(10)では変形の速さを表す項としてひずみ速度が含まれていたが、式(44)では応力速度が含まれている。式(44)の右辺第3項は、増分衝撃開始点 P で、式(16・b)を用いると

$$\left\{ \frac{\phi(F)\sigma}{\dot{\sigma}} \right\}_P = 0 \dots\dots\dots (45)$$

となる。式(16・a)と式(45)を用いると、式(44)から

$$\left(\frac{d\epsilon}{d\sigma} \right)_P = \frac{1}{E} + \left\{ \phi(H) \right\}_P + \left\{ \frac{\phi(F)\sigma}{\dot{\sigma}} \right\}_P \dots\dots\dots (46・a)$$

$$= \frac{1}{E} \dots\dots\dots (46・b)$$

を得る。式(46・b)から、増分衝撃開始点 P で、傾き $d\epsilon/d\sigma$ は $1/E$ と一致する。その後、増分衝撃負荷過程で

$$\sigma > 0 \text{ and } \dot{\sigma} > 0 \text{ for tension} \dots\dots\dots (47・a)$$

$$\sigma < 0 \text{ and } \dot{\sigma} < 0 \text{ for compression} \dots\dots\dots (47・b)$$

であるので、式(12・b)と式(47)から

$$\frac{\phi(F)\sigma}{\dot{\sigma}} > 0 \dots\dots\dots (48)$$

となり、式(12・a)、(14)および式(48)を用いると、式(44)から

$$\frac{d\epsilon}{d\sigma} > \frac{1}{E} \dots\dots\dots (49)$$

を得る。式(49)は、増分動的応力・ひずみ曲線の傾き $d\epsilon/d\sigma$ が $1/E$ より大きいことを意味する。増分衝撃負荷過程に、増分衝撃開始点 P を含めて考えると、式(46)と式(49)から

$$\frac{d\epsilon}{d\sigma} \geq \frac{1}{E} \dots\dots\dots (50)$$

を得る。式(50)は式(18)と等価である。一方、増分衝撃応力波伝ば速度 c 、式(30・d)は、構成式(1)、あるいは、式(31・a)の粘塑性ひずみ成分を考慮すると

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho \left\{ \frac{d\epsilon}{d\sigma} - \frac{\phi(F)\sigma}{\dot{\sigma}} \right\}}} \dots\dots\dots (51)$$

となる。式(51)は、増分衝撃開始点 P で

$$(c)_P = \frac{1}{\sqrt{\rho \left[\left(\frac{d\epsilon}{d\sigma} \right)_P - \left\{ \frac{\phi(F)\sigma}{\dot{\sigma}} \right\}_P \right]}} \dots\dots\dots (52)$$

となる。式(52)は、式(45)と式(46・b)を用いると

$$(c)_P = c_0 \dots\dots\dots (53)$$

となる。式(53)は、増分衝撃開始時の応力波伝ば速度が縦弾性波伝ば速度と一致することを意味する。式(46)と式(53)から、増分動的応力・ひずみ曲線上の増分衝撃開始点の傾き $d\epsilon/d\sigma$ と、増分衝撃応力波伝ば速度 c の増分衝撃開始時の値は対応する。増分衝撃開始後、式(48)と式(49)を用いると、式(51)から

$$c < c_0 \dots\dots\dots (54)$$

を得る。増分衝撃負荷過程に、増分衝撃開始点を含めて考えると、式(53)と式(54)から

$$c \leq c_0 \dots\dots\dots (55)$$

を得る。

このように、増分衝撃応力波伝ば速度と増分動的応力・ひずみ曲線の傾きは、ひずみ速度、応力速度、低下応力関数および超過応力関数を介して密接に相関する。静的前負荷がある場合の弾・塑・粘塑性応力波伝ば理論に関する議論は、静的前負荷がない場合のそれに適用できる。固体の波動伝ば速度は、静的前負荷の有無にかかわらず応力・ひずみ曲線の接線係数 $d\sigma/d\epsilon$ 、

あるいは、 $d\sigma/d\epsilon$ だけで決定されないことに注意したい。

5. 結 論

(1) 静的前負荷がある場合の弾・塑・粘塑性構成式を提案した。

(2) 提案構成式で、静的前非弾性ひずみの量を零にすると、静的前負荷がない場合の弾・塑・粘塑性構成式となる。

(3) 提案構成式を用いて、増分衝撃応力波伝ば速度の式を導出した。

(4) 導出した増分衝撃応力波伝ば速度の式で、静的前負荷の量を零にすると、静的前負荷がない場合の弾・塑・粘塑性応力波伝ば速度の式となる。

(5) 増分衝撃の問題で、増分動的応力・ひずみ関係の問題と増分衝撃応力波伝ば速度・ひずみ関係のそれが不可分であることを、弾・塑・粘塑性増分衝撃理論を展開して理論的に証明した。

(6) 弾・塑・粘塑性増分衝撃理論では、増分動的応力は静的応力より大きくなる。

(7) 弾・塑・粘塑性増分衝撃理論では、増分動的曲線の増分衝撃開始点(静的応力・ひずみ曲線上)での傾き $d\sigma/d\epsilon$ が縦弾性係数 E (せん断の場合では横弾性係数 μ) と一致する。

(8) 弾・塑・粘塑性増分衝撃理論では、一定ひずみ速度のとき、増分動的曲線の傾き $d\sigma/d\epsilon$ がひずみの増加とともに小さくなる。

(9) 弾・塑・粘塑性増分衝撃応力波伝ば速度は、弾・塑性理論(Karman 理論)のそれより大きくなる。

(10) 弾・塑・粘塑性増分衝撃応力波伝ば速度は、増分衝撃開始時に縦弾性波の伝ば速度 c_0 (せん断衝撃の場合では横弾性波伝ば速度 $c_1 = \sqrt{\mu/\rho}$) と一致する。

(11) 一定ひずみ速度のとき、弾・塑・粘塑性増分衝撃応力波伝ば速度はひずみの増加とともに小さくなる。

(12) 弾・塑・粘塑性増分衝撃理論の結論(6)と(9)、(7)と(10)および(8)と(11)は、それぞれ対応する。

(13) 弾・塑・粘塑性増分衝撃理論の結論(6)(8)は実験結果[1][3]をそれぞれ説明する。

(14) 弾・塑・粘塑性増分衝撃理論の結論(9)(11)は実験結果[A][C]をそれぞれ説明する。

(15) 静的前負荷を考慮した弾・塑・粘塑性増分衝撃理論の各式で静的前負荷の量を零と置くと、静的前負荷を考慮しない場合の弾・塑・粘塑性衝撃理論とな

る。

(16) 弾・塑・粘塑性増分衝撃理論で、実験結果[4][6]、および[D]と[E]の解析的説明は不明である。

文 献

- (1) Васильев, Л. И., Былина, А. С. и Загребенникова, М. П. О Влиянии перемещения скорости деформирования на пластическое растяжение, Доклады Академии Наук СССР, Том XC, No. 5, (1953), 767-769.
- (2) Васильев, Л. И., и Еремеева, Л. П. О некоторых особенностях пластического растяжения с переменной скоростью, Доклады Академии Наук СССР, Том XC III, No. 6, (1953), 1019-1020.
- (3) Campbell, J. D. and Dowling, A. R., The behaviour of materials subjected to dynamic incremental shear loading, *J. Mech. Phys. Solids*, **18** (1970), 43-63.
- (4) 白井英治・白樫高洋・益子正巳, 高速圧縮試験と二, 三の結果 切削における温度・ひずみ速度効果の基礎的研究(第1報), 精密機械, **37** 4 (1971), 268-274.
- (5) 白樫高洋・白井英治, ひずみ速度履歴効果の検討 切削における温度・ひずみ速度効果の基礎的研究(第2報), 精密機械, **37** 5 (1971), 338-343.
- (6) Nicholas, T., Strain rate and strain rate history effects in several metals in torsion, *Exp. Mech.*, (1971), 370-374.
- (7) 林卓夫・福岡秀和・藤村靖之・香本芳正, 塑性域まで前負荷を与えたアルミニウム棒の縦衝撃, 塑性と加工, **14** 148 (1973), 343-351.
- (8) Bonder, S. R. and Parton, Y., Constitutive equations for elastic viscoplastic strain hardening materials, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, (1975), 385-389.
- (9) Campbell, J. D. and Briggs, T. L., *J. Less Common Metals*, **40** (1975), 235. in: Harding, T. (Chiem, C. Y., Kunze, H. D. and Meyer, L. W. 編), Material Behavior at high rates of strain, Impact loading and dynamic behaviour of materials, *DGM Informations gesellschaft mbH, Oberursel*, **1** (1988), 23-42.
- (10) Senseny, P. E., Duffy, J. and Hawley, R. H., Experimental on strain rate history and temperature effects during the plastic deformation of close packed metals, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **45** (1978), 60-66.
- (11) Klepaczko, J. and Duffy, J. (Rohde, R. W. and Swearingen, 編), Strain rate history effects in body centered cubic metals, Proc. Conf. on Mechanical testing for deformation model development, *ASTM STP*, 765 (1982), 251-268. in: Duffy, J. (Mescal, J. and Weiss, V. 編), Strain rate history effects and dislocation substructure at high strain rate, *Material behavior under high stress and ultrahigh loading rates*, (1983), 21-37, Plenum Press.
- (12) 吉野雅彦・白樫高洋, 温度・ひずみ速度履歴による材質の推移 熱間塑性加工における材質予測手法に関する基礎的研究 I - 塑性と加工, **31** 359 (1990), 1433-1438.
- (13) 三村耕司・富田佳宏・高原淳, ひずみ速度を考慮した硬化則による動的降伏曲面のシミュレーション(第2報), 機論, No. 914 1 (1991 3), 76-78.
- (14) 三村耕司・進藤明夫・高原淳, 多軸応力下におけるひずみ速度履歴に関する検討(第1報, 純銅, 純チタニウムに関する検討), 機論, **57** 537, A (1991), 1195-1200.
- (15) 岸田敬三・中野元博・曾我部雄次, 銅の動的塑性構成関係に関する実験的研究, 材料, **43** 495 (1994), 1559-1563.

- (16) Sternglass, E. J. and Stuart, D. A., An experimental study of the propagation of transient longitudinal deformations in elastoplastic media, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **20** (1953), 427-434.
- (17) Santosham, T. V. and Ramsey, H., Small plastic strain wave propagation in prestressed soft copper rods, *Int. J. Mech. Sci.*, **12** (1970), 447-457.
- (18) 郡利矩・千田豊満・池田孝之・石山正昭・金田隆義, 衝撃引張りによる塑性波の伝ば(前ひずみの影響), *精密機械*, **38** 8 (1972), 652-658.
- (19) 石川皓一・谷村眞治・井垣久, 増分ねじり衝撃による増分波の伝ば速度と構成式の検討, *材料*, **30** 331 (1981), 360-365.
- (20) 谷本昇, 固体の一次元増分衝撃理論(数値解析), *機論*, **62** 598, A (1996), 1404-1409.
- (21) 谷本昇・福岡秀和・藤田和孝, 引張弾・塑・粘塑性構成式, *機論*, **57** 544, A (1991), 2957-2964.
- (22) 谷本昇・福岡秀和・藤田和孝, 縦衝撃を受ける棒の一次元数値解析(弾・塑性・粘塑性構成式を用いて), *機論*, **58** 546, A (1992), 302-309.
- (23) 谷本昇, 一軸応力状態における固体の一次元応力波伝ば理論, *機論*, **62** 594, A (1996), 437-444.