客観応力速度のスピンを考慮した非共軸形塑性構成式
に対する熱力学的導出手法*志 澤 一 之^{*1}Thermomechanical Derivation of Noncoaxial Plastic
Constitutive Equations Considering Spins
of Objective Stress Rates

Kazuyuki SHIZAWA

Elastoplastic constitutive equations which take into account yield vertex effects are important in the study of localization instabilities of plastic deformations. However, they have never been discussed thermomechanically. In the present paper, a method of deriving the above equations is proposed which is based on the second law of thermodynamics and the principle of maximal entropy production rate. Elastic strain as a strain measure which is conjugate to objective stress rate is separated from total strain so that the Clausius Duhem inequality, in which the Gibbs function is introduced as an elastic potential, can be always satisfied. The strain rate and stress rate are expressed by the same objective rate in the rate form of the elastic constitutive equation obtained. The plastic constitutive equation is derived using the principle of maximal dissipation rate. Since this equation is regarded as a flow rule in which the complementary dissipation function assumes the role of a plastic potential, it is indicated that the yield vertex can exist on the dissipation surface. Furthermore, the spin used in the objective stress rate is selected by taking into account not only conventional requirements but also thermomechanical ones.

Key Words: Plasticity, Constitutive Equation, Noncoaxiality, Spin, Objective Rate, Finite Deformation Theory, Thermomechanics

1. 緒 言

塑性不安定問題等に重要な非共軸形塑性構成式には従来熱力学的議論がほとんどなされていない。特に、 J_2 変形理論に基づくこのタイプの構成式には、降伏曲面における尖り点の存在が危うい⁽¹⁾、負荷範囲が比例負荷の近くに限定される⁽²⁾などの問題点が以前より指摘されている。

また、塑性構成式に対する従来の熱力学的検討^{(3)~(5)}においては、非共軸形構成式についての議論がなされていない、有限変形理論に拡張されていない、応力の客観速度に対するスピンを考慮されていない、さらに塑性ポテンシャルの独立変数として本来どちらか一方のみが選ばれるべき応力とひずみが混在して用いられているなどの多くの問題が残されている。

一方、応力速度に対する従来の要求としては、(i)客観性を有すること、(ii)応力の不変量が停留性を有することが挙げられる。よく知られている Truesdell 速度、Cotter Rivlin 速度および Oldroyd 速度は、要請(i)を満足するが要請(ii)は満足しない。このこと

が知られるようになってから、上記の両要請を満足する Jaumann 速度が客観速度としておもに用いられるようになった。しかしその後、Jaumann 速度を用いると応力-ひずみ線図に振動が生じるという特異な現象が報告され⁽⁶⁾、Jaumann 速度における連続体スピんに代わるスピンの提案に関する研究が近年盛んに行われてきた。その代表的なものとしては、Green Naghdi スピン⁽⁷⁾、Euler スピン⁽⁸⁾、塑性スピン⁽⁹⁾およびその他いくつかのもの⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾があげられる。また、これらのスピンの妥当性についての研究^{(12)~(14)}も数多くなされているが、いまだ選択すべきスピンを唯一に定めるには至っていない。したがって、客観速度に対するもう一つの要請として、(iii)応力-ひずみ線図に振動が生じないことがつけ加えられる。また、これらのスピンの熱力学的論理体系への適合性についてはほとんど不明であり、スピンに対する熱力学的要請についても検討する必要がある。

そこで本論文では、従来の要請を満足する客観速度のスピンを考慮しつつ、非共軸形塑性構成式をエントロピーの増大性およびエントロピー生成速度の最大性という熱力学の基本原則に立脚した形で導出する手法について検討する。まず弾性ポテンシャルとして Gibbs 関数を導入し、エントロピー増大則を満足する

* 原稿受付 1995 年 10 月 11 日。

^{*1} 正員、慶應義塾大学理工学部(〒223 横浜市港北区日吉3-14-1)。

ように客観応力速度に共役なひずみ尺度としての弾性ひずみを全ひずみから分離する。その結果得られる速度形弾性構成式では、ひずみ速度と応力速度が同一の客観速度で表現される。次に最大散逸速度の原理を導入し、必然的に非共軸性が取り込まれるように、この原理の極値解として塑性構成式を導出する。これは補散逸関数を塑性ポテンシャルとする一つの流れ則となるため、補散逸曲面における尖り点の存在が明確になる。

また従来の要請⁽¹⁾を満足しつつ熱力学的論理体系にも矛盾しない客観速度のスピンに対する選択方法についても言及する。ただし、本論文ではまず材料非依存性の剛体スピンについてのみ検討することにする。

2. 速度形弾性構成式

2.1 Clausius Duhem の不等式 保存則(連続の式、運動方程式、角運動量方程式、エネルギー方程式)および第二法則(エントロピー不等式)が既知であるとすると、現配置表示の Clausius Duhem の不等式は通常どおり、

$$\Phi = \rho\theta\dot{\eta} - \rho\dot{\epsilon} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} - \mathbf{q} \cdot \mathbf{g} \geq 0 \quad (1)$$

となる。ここで $\Phi \equiv \rho\theta\gamma$ は散逸関数、 ρ は密度、 θ は温度、 γ はエントロピー生成速度、 $\mathbf{T}$ は Cauchy 応力、 $\mathbf{D}$ は変形速度、 $\mathbf{q}$ は熱流束、 $\mathbf{g}$ は $\mathbf{g} = \text{grad } \theta/\theta$ であり、また $(\cdot)$ は物質時間微分を表す。いま伝熱による散逸を無視し、式(1)の両辺に変形こう配 $\mathbf{F}$ の Jacobian: $J \equiv \det \mathbf{F} > 0$ を乗じれば基準配置表示の Clausius Duhem の不等式が

$$\Phi_0 = \rho_0\theta\dot{\eta} - \rho_0\dot{\epsilon} + \tilde{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{D} \geq 0 \quad (2)$$

のように得られる。ただし $\rho_0 \equiv J\rho$ および $\Phi_0 \equiv \rho_0\theta\gamma$ はそれぞれ基準配置における密度および散逸関数であり、また $\tilde{\mathbf{T}} \equiv J\mathbf{T}$ は Kirchhoff 応力である。

2.2 スピンの導入 次に式(2)における $\tilde{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{D}$ を変形前の面積要素を基準にした応力とそれに共役なひずみ速度で表すことを考える。いま $\tilde{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{D}$ を変換して得られる基準配置表示の共役な応力とひずみ速度の積を一般的に

$$\tilde{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{S}_a \cdot \dot{\mathbf{E}}_a \quad (3)$$

のようにおいてみる。ここで $\mathbf{D}$ を通常どおり Green のひずみ $\mathbf{E}$ で $\mathbf{D} = \mathbf{F}^{-T} \dot{\mathbf{E}} \mathbf{F}$ と書いた場合には $\mathbf{E}_a = \mathbf{E}$ 、 $\mathbf{S}_a = J\mathbf{F}^{-1} \mathbf{T} \mathbf{F}^{-T}$ となり $\mathbf{S}_a$ は第二種 Piola-Kirchhoff 応力 $\mathbf{S}$ となる。このとき $\dot{\mathbf{S}}$ は

$$\dot{\mathbf{S}} = J\mathbf{F}^{-1} \mathbf{T} \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-T} = \mathbf{F}^{-1} \tilde{\mathbf{T}} \mathbf{F}^{-T} \quad (4)$$

となり、Cauchy 応力の速度には Truesdell 速度 $\mathbf{T}$ 、Kirchhoff 応力の速度には Oldroyd 速度 $\tilde{\mathbf{T}}$ が対応するため、前述の問題点を回避できない。

そこで $\mathbf{D}$ を次のように物体要素の剛体回転を表すある一般的な直交テンソル $\boldsymbol{\chi}$ を用いて分解することを考える。すなわち

$$\mathbf{D} = \boldsymbol{\chi} \dot{\mathbf{E}}_a \boldsymbol{\chi}^T \quad (5)$$

である。このとき、 $\mathbf{E}_a$ は完全なひずみ尺度ではなく

$$\mathbf{E}_a = \int_{t_0}^t \mathcal{D}_a(\tau) d\tau \quad (6)$$

で与えられる中間配置の変形尺度である。ただし $\mathcal{D}_a = \boldsymbol{\chi}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\chi}$ である。もし、 $\mathbf{E}_a$ の一部がひずみ尺度になり得る場合には $\dot{\mathbf{E}}_a$ は、

$$\dot{\mathbf{E}}_a = \dot{\mathbf{E}}_a^{(s)} + \mathcal{D}_a^{(d)} \quad (7)$$

のように分解される。ここで、 $\dot{\mathbf{E}}_a^{(s)}$ はひずみ尺度としての $\mathbf{E}_a^{(s)}$ の速度であり全微分となる部分である。一方、 $\mathcal{D}_a^{(d)}$ は変形尺度としての $\mathbf{E}_a^{(d)}$ の速度であり、 $\mathbf{E}_a^{(d)}$ は負荷経路に依存する量である。なお、 $\mathbf{E}_a^{(s)}$ と $\mathcal{D}_a^{(d)}$ は後でその引数が具体化されたとき熱力学的に特徴づけられる。式(7)のようにひずみ速度を分解しておくことは、ひずみを熱力学的に弾塑性分解する際に重要な役割をなす。

上式(5)のように $\mathbf{D}$ を表したとき、 $\dot{\mathbf{E}}_a$ に共役な応力 $\mathbf{S}_a$ は

$$\mathbf{S}_a = \boldsymbol{\chi}^T \tilde{\mathbf{T}} \boldsymbol{\chi} \quad (8)$$

となり、その速度は次のようになる。

$$\dot{\mathbf{S}}_a = \boldsymbol{\chi}^T \tilde{\mathbf{T}} \dot{\boldsymbol{\chi}} \quad (9)$$

ここで $\tilde{\mathbf{T}}$ は、 $\boldsymbol{\chi}$ より生じる剛体回転のスピン $\boldsymbol{\Omega}$:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\boldsymbol{\chi}} \boldsymbol{\chi}^T, \quad \boldsymbol{\Omega}^T = -\boldsymbol{\Omega} \quad (10)$$

を用いて、次のように与えられる応力速度である。

$$\tilde{\mathbf{T}} \equiv \dot{\tilde{\mathbf{T}}} - \boldsymbol{\Omega} \tilde{\mathbf{T}} + \tilde{\mathbf{T}} \boldsymbol{\Omega} \quad (11)$$

式(11)のような形で表される応力速度は、よく知られているように客観性を有し、その客観速度に対する応力不変量は停留性を有する。また、Jaumann 速度におけるスピンは連続体スピンであり、ここで用いている剛体スピン $\boldsymbol{\Omega}$ には必ずしも対応しないから、 $\tilde{\mathbf{T}}$ が Jaumann 速度に一致する必要はない。したがって、応力ひずみ線図に振動が生じないように $\boldsymbol{\Omega}$ を選ぶことが可能となる。このように本スピンは、客観速度のスピンに対する従来の要請を満足することがわかる。ただし、 $\boldsymbol{\Omega}$ は式(7)で与えたように剛体回転を取り除いたひずみ尺度 $\mathbf{E}_a^{(s)}$ が形成されるように選択されねばならない。本論文では $\boldsymbol{\Omega}$ をある剛体スピンとしてまず一般論を展開することとし、種々の要請を満足する具体的なスピンの例については後述する。

以上より結局、式(2)は次式のようになる。

$$\Phi_0 = \rho_0\theta\dot{\eta} - \rho_0\dot{\epsilon} + \mathbf{S}_a \cdot (\dot{\mathbf{E}}_a^{(s)} + \mathcal{D}_a^{(d)}) \geq 0 \quad (12)$$

2.3 熱力学的ポテンシャル

2.3.1 Helmholtz の自由エネルギー

まず熱力

学的ポテンシャルとして Helmholtz の自由エネルギー ψ :

$$\psi \equiv \varepsilon - \theta \eta \quad \dots\dots\dots (13)$$

を導入し、式(12)における θ と η に関して独立変数の変換を行えば、

$$\Phi_0 = -\rho_0(\dot{\psi} + \eta \dot{\theta}) + S_a \cdot (\dot{E}_a^{(s)} + \mathcal{D}_a^{(d)}) \quad \dots\dots\dots (14)$$

を得る。ここで熱力学的力は η および S_a 、熱力学的速度は $\dot{\theta}$ 、 $\dot{E}_a^{(s)}$ および $\mathcal{D}_a^{(d)}$ 、また熱力学的変位は θ および $E_a^{(s)}$ とみなせる。したがって、 ψ の関数形は

$$\psi = \hat{\psi}(\theta, E_a^{(s)}, \dot{\theta}, \dot{E}_a^{(s)}, \mathcal{D}_a^{(d)}) \quad \dots\dots\dots (15)$$

とおける。等存在の公理⁽¹⁵⁾より、構成量となる熱力学的力の引数(独立変数)は熱力学的ポテンシャルと同様に次のように選べる。

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \hat{\eta}(\theta, E_a^{(s)}, \dot{\theta}, \dot{E}_a^{(s)}, \mathcal{D}_a^{(d)}) \\ S_a &= \hat{S}_a(\theta, E_a^{(s)}, \dot{\theta}, \dot{E}_a^{(s)}, \mathcal{D}_a^{(d)}) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (16)$$

いま D を $\dot{E}_a^{(s)}$ と $\mathcal{D}_a^{(d)}$ に分解して用いるので、その熱力学的分解法が明解でなければならない。それには $E_a^{(s)}$ と $\mathcal{D}_a^{(d)}$ をその引数で特徴づける必要がある。したがって、ここではひずみやひずみ速度が構成量、応力や応力速度が引数となるように、別の熱力学的ポテンシャルを導入し、 S_a と $E_a^{(s)}$ の役割を交換する必要がある。そこで、次のように Gibbs 関数を導入して議論を進める。

2・3・2 Gibbs 関数 前述のように E_a のうち、ひずみ尺度となるのは $E_a^{(s)}$ のみであることを考慮して、まず次式にて定義される熱力学的ポテンシャル $\mathcal{G}$ を導入する。

$$\mathcal{G} \equiv \rho_0 \psi - S_a \cdot E_a^{(s)} \quad \dots\dots\dots (17)$$

このとき式(14)は

$$\Phi_0 = -(\dot{\mathcal{G}} + \rho_0 \eta \dot{\theta} + E_a^{(s)} \cdot \dot{S}_a) + S_a \cdot \mathcal{D}_a^{(d)} \geq 0 \quad \dots\dots\dots (18)$$

となる。ここで熱力学的力は η および $E_a^{(s)}$ 、熱力学的速度は $\dot{\theta}$ および $\dot{S}_a$ 、また熱力学的変位は θ および S_a とみなせる。なお $S_a \cdot \mathcal{D}_a^{(d)}$ の項における熱力学的速度および力は、それぞれ $\mathcal{D}_a^{(d)}$ と S_a であるから、 S_a を構成量と置きたいが、式(18)においては S_a を独立変数としているため、その方法は用いられない。一方、 $\mathcal{D}_a^{(d)}$ を構成量とみなした場合には、 S_a が熱力学的速度となるが、 S_a はあくまでも変位の立場にあるため、速度として採用することはできない。よって、この段階では $\mathcal{D}_a^{(d)}$ の関数形は具体化されない。以上の議論より、 $\mathcal{G}$ 、 η および $E_a^{(s)}$ の関数形は

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{G} &= \hat{\mathcal{G}}(\theta, S_a, \dot{\theta}, \dot{S}_a) \\ \eta &= \hat{\eta}(\theta, S_a, \dot{\theta}, \dot{S}_a) \\ E_a^{(s)} &= \hat{E}_a^{(s)}(\theta, S_a, \dot{\theta}, \dot{S}_a) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (19)$$

とおける。ここでは従来どおり、局所平衡の仮定が成

立する場合のみを考えることにすれば、エントロピーは温度速度に依存することはなくなり、

$$\eta = \hat{\eta}(\theta, S_a, \dot{S}_a) \quad \dots\dots\dots (20)$$

となる。また、 $E_a^{(s)}$ を $\dot{S}_a$ に依存しない部分 $E_a^{(s1)}$ と、依存する部分 $E_a^{(s2)}$ に分解し、

$$E_a^{(s)} = E^{(s1)}(\theta, S_a, \dot{\theta}) + E^{(s2)}(\theta, S_a, \dot{\theta}, \dot{S}_a) \quad \dots\dots\dots (21)$$

のようにおけば式(18)は次のようになる。

$$\Phi_0 = -(\dot{\mathcal{G}} + \rho_0 \eta \dot{\theta} + E_a^{(s1)} \cdot \dot{S}_a) + S_a \cdot \mathcal{D}_a^{(d2)} \geq 0 \quad \dots\dots\dots (22)$$

ここで現れた新たな熱力学的ポテンシャル G は次式にて定義される Gibbs 関数であり、その理由は 2・4・2 項の最後に明らかになる。

$$G \equiv \mathcal{G} + E_a^{(s2)} \cdot S_a = \rho_0 \psi - S_a \cdot E_a^{(s1)} \quad \dots\dots\dots (23)$$

また、 $\mathcal{D}_a^{(d2)}$ は

$$\mathcal{D}_a^{(d2)} \equiv \mathcal{D}_a^{(d)} + \dot{E}_a^{(s2)} \quad \dots\dots\dots (24)$$

である。このとき式(22)におけるポテンシャル G と熱力学的力 η 、 $E_a^{(s1)}$ の関数形は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} G &= \hat{G}(\theta, S_a, \dot{\theta}, \dot{S}_a) \\ \eta &= \hat{\eta}(\theta, S_a, \dot{S}_a) \\ E_a^{(s1)} &= \hat{E}_a^{(s1)}(\theta, S_a, \dot{\theta}) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (25)$$

2・4 速度形弾性構成式

2・4・1 ひずみの弾塑性分解 式(25)₁を式(22)に代入し、 $\dot{G}$ をその引数で展開して整理すれば次のようになる。

$$\begin{aligned} \Phi_0 = & -\rho_0 \left(\eta + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \hat{G}}{\partial \dot{\theta}} \right) \dot{\theta} - \underbrace{\left(E_a^{(s1)} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \dot{S}_a} \right) \cdot \dot{S}_a}_{(1)} \\ & - \underbrace{\left(\frac{\partial \hat{G}}{\partial \dot{\theta}} \ddot{\theta} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \dot{S}_a} \ddot{S}_a \right)}_{(2)} + S_a \cdot \mathcal{D}_a^{(d2)} \geq 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (26)$$

式(25)₁より、下線部(2)は各速度 $\ddot{\theta}$ 、 $\ddot{S}_a$ に対して線形となるから、不等式(26)がつねに成立するためには、

$$\frac{\partial \hat{G}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial \hat{G}}{\partial \dot{S}_a} = 0 \quad \dots\dots\dots (27)$$

という条件が必要となり、下線部(2)は零となる。よって、 G の引数は次の2個に制限される。

$$G = \hat{G}(\theta, S_a) \quad \dots\dots\dots (28)$$

式(28)より式(26)の下線部(1)も各速度について線形となり、

$$\left. \begin{aligned} \eta &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \hat{G}}{\partial \dot{\theta}} \\ E_a^{(s1)} &= -\frac{\partial \hat{G}}{\partial \dot{S}_a} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (29)$$

を得る。その結果、下線部(1)も零となる。式(29)より、 η と $E_a^{(s1)}$ の引数も次の2個にまで制限され、Gibbs 関数と同様になる。

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \bar{\eta}(\theta, S_a) \\ E_a^{(s1)} &= \bar{E}_a^{(s1)}(\theta, S_a) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

以上より、 $E_a^{(s1)}$ は温度と応力のみに依存しエントロピー生成に寄与しないから、回復可能な弾性ひずみであることがわかる。一方散逸に寄与する $\mathcal{D}_a^{(d2)}$ は塑性ひずみ速度であるといえる。そこで、以後これらをそれぞれ次のように置き換えて表すことにする。

$$E_a^e = E_a^{(s1)}, \mathcal{D}_a^p \equiv \mathcal{D}_a^{(d2)} \dots\dots\dots (31)$$

よって、変形速度に対する熱力学的な弾塑性分解は次式のようになる。

$$D = D^e + D^p = \chi(\dot{E}_a^e + \mathcal{D}_a^p)\chi^T \dots\dots\dots (32)$$

また、式(23)で与えられるポテンシャル G は、保存される弾性ひずみによって変数変換されたものであるから、Gibbs 関数であることが確認できる⁽¹⁶⁾。

2・4・2 速度形弾性構成式 G を S_a の不変量多項式で表し、式(29)₂に代入すれば非線形弾性構成式

$$E_a^e = \bar{M}^e(S_a) : S_a \dots\dots\dots (33)$$

を得る。ただし $\bar{M}^e$ は S_a に依存する4階のテンソルであり、ここでは温度による影響は省略してある。式(33)の両辺を物質時間微分すれば、

$$\dot{E}_a^e = \bar{K}^e(S_a) : \dot{S}_a \dots\dots\dots (34)$$

となる。ただし、 $\bar{K}^e$ は

$$K_{ijkl}^e = \frac{\partial \bar{M}_{ijmn}^e}{\partial S_{a,kl}} S_{a,mn} : \bar{M}_{ijkl}^e \dots\dots\dots (35)$$

である。なお本論文では、基準配置の基底ベクトルを用いて計ったテンソルの成分は大文字の指標で、一方現配置の成分は小文字の指標で表すことにする。

いま、 A_a^e を $A_a^e = \chi E_a^e \chi^T$ で変換される現配置のひずみ尺度とすれば、式(32)より D^e は

$$D^e = A_a^e \dots\dots\dots (36)$$

となるから、式(34)を現配置表示に戻すことにより次のような速度形弾性構成式が得られる。

$$A_a^e = K^e(\bar{T}) : \bar{T} \dots\dots\dots (37)$$

ここで応力速度とひずみ速度が同一の客観速度で与えられる点特徴的である⁽¹⁾。

さらに、通常どおり微小弾性変形、有限非弾性変形を仮定することにすれば、式(37)において D^e は微小弾性ひずみ速度によって

$$D^e = \varepsilon^e \dots\dots\dots (38)$$

と表される。また K^e は次のような弾性コンプライアンスを表す4階の定数テンソルとなる。

$$K_{ijkl}^e = \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1}{2\mu} \delta_{ik}\delta_{jl} \dots\dots\dots (39)$$

ここで λ および μ は Lamé 定数であり、また δ_{ij} は Kronecker のデルタである。

3. 非共軸形塑性構成式

3・1 補散逸関数の導入 以上の結果、式(26)は次のようになる。

$$\Phi_0 = S_a \cdot \mathcal{D}_a^p \geq 0 \dots\dots\dots (40)$$

式(40)において熱力学的力および熱力学的速度は前述のようにそれぞれ $S_a, \mathcal{D}_a^p$ である。また熱力学的変位は $\mathcal{D}_a^p$ を次のように積分して得られる変形尺度としての E_a^p である。

$$E_a^p = \int_{t_0}^t \mathcal{D}_a^p(\tau) d\tau \dots\dots\dots (41)$$

よって Φ_0 の関数形は

$$\Phi_0 = \bar{\Phi}_0(E_a^p, \mathcal{D}_a^p) \dots\dots\dots (42)$$

となる。ここでも、ひずみやひずみ速度が構成量、応力や応力速度がその引数となるように、変数変換を行う。そこで、次のような補散逸関数を散逸ポテンシャルとして導入する。

$$\Phi_0^* = (S_a \cdot E_a^p) \cdot \Phi_0 = \dot{S}_a \cdot E_a^p \dots\dots\dots (43)$$

このとき Φ_0^*, E_a^p および $\mathcal{D}_a^p$ の関数形は

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0^* &= \bar{\Phi}_0^*(S_a, \dot{S}_a) \\ E_a^p &= \bar{E}_a^p(S_a, \dot{S}_a) \\ \mathcal{D}_a^p &= \bar{\mathcal{D}}_a^p(S_a, \dot{S}_a) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (44)$$

とおける。

3・2 最大散逸速度の原理 構成式の散逸部分は、散逸現象が進むべき方向を規定する最大エントロピー生成速度の原理によって定められる。そこでこの原理に等価な最大散逸速度の原理⁽¹⁸⁾を導入する。式(40)、(43)を考慮して、最大散逸速度の原理における汎関数 $\bar{I}$ を定式化すれば

$$\bar{I}(E_a^p, \mathcal{D}_a^p) = \int_V [S_a \cdot \mathcal{D}_a^p + \bar{\lambda}(\Phi_0 - S_a \cdot \mathcal{D}_a^p)] dV \dots\dots\dots (45)$$

となる。ここで、 $\bar{\lambda}$ を未定乗数として式(40)が付帯条件として取り込まれている。さらに式(43)を用いて、式(45)で Φ_0 を Φ_0^* に置き換えれば式(45)は

$$\bar{I}(S_a, \dot{S}_a) = \int_V \{S_a \cdot \mathcal{D}_a^p - \bar{\lambda}(\Phi_0^* - \dot{S}_a \cdot E_a^p)\} dV \dots\dots\dots (46)$$

と書き改められる。式(46)の第一変分を求めると

$$\begin{aligned} \delta \bar{I} = \int_V \left\{ \left(\mathcal{D}_a^p - \bar{\lambda} \frac{\partial \Phi_0^*}{\partial S_a} \right) \cdot \delta S_a + \bar{\lambda} \left(E_a^p - \frac{\partial \Phi_0^*}{\partial \dot{S}_a} \right) \cdot \delta \dot{S}_a \right. \\ \left. + (\Phi_0^* - \dot{S}_a \cdot E_a^p) \delta \bar{\lambda} \right\} dV \dots\dots\dots (47) \end{aligned}$$

となる。式(47)の極値解として、次式を得る。

$$\mathcal{D}_a^p = \bar{\lambda} \frac{\partial \Phi_0^*}{\partial S_a} \dots\dots\dots (48)$$

$$E_a^p = \int_{t_0}^t \mathcal{D}_a^p d\tau = \frac{\partial \Phi_0^*}{\partial \dot{S}_a} \dots\dots\dots (49)$$

$$\Phi_0^* = \dot{S}_a \cdot E_a^p \quad \dots\dots\dots (50)$$

これより、式(44)の引数は制限されずにそのまま残る。補散逸関数を用いる場合には、降伏関数に取り入れられない $\dot{S}_a$ が引数として選べる点が特徴的である。また式(48)、(49)は補散逸関数を塑性ポテンシャルとする流れ則であるとみなせる。

3・3 塑性構成式 通常どおり、塑性変形は静水圧的応力によって進行しないとすると、式(44)₁は偏差応力 S_a^p で書き直すことができる。

$$\Phi_0^* = \tilde{\Phi}_0^*(S_a^p, \dot{S}_a^p) \quad \dots\dots\dots (51)$$

補散逸関数 Φ_0^* は S^p と $\dot{S}^p$ の作るスカラー不変量の多項式で表現できるが、ここでは最も簡単な場合を考えて次のようにおく。

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0^* &= \tilde{\Phi}_0^*(J_2, J_3, J_4) = \nu_2 J_2 + \nu_3 J_3 + \nu_4 J_4 \\ \text{ただし} \\ J_2 &= \frac{1}{2} \text{tr } S_a^2, J_3 = \text{tr } (S_a^p, \dot{S}_a^p), J_4 = \frac{1}{2} \text{tr } \dot{S}_a^2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (52)$$

また、 ν_2, ν_3, ν_4 は J_2, J_3, J_4 の関数である。ここでは、構成式の未知係数が具体的に決定でき、さらに応力速度とひずみ速度の逆関係が得られる範囲として、二次の不変量までを取り上げたが、2個の対称テンソルが作る独立な不変量は式(52)のほかに次のようなものも存在することを注意しておく。ただし S_a^p が偏差部分であることが考慮されている。

$$\text{tr } S_a^3, \text{tr } \dot{S}_a^3, \text{tr } (S_a^2 \dot{S}_a), \text{tr } (S_a^p, \dot{S}_a^2)$$

式(52)を式(48)、式(49)に代入すれば次式を得る。

$$\dot{D}_a^p = \mu_2 \dot{S}_a^p + \mu_3 \dot{S}_a^p \quad \dots\dots\dots (53)$$

$$\int_{t_0}^t \dot{D}_a^p d\tau = \nu_3 \dot{S}_a^p + \nu_4 \dot{S}_a^p \quad \dots\dots\dots (54)$$

ただし、

$$\mu_2 \equiv \bar{\lambda} \frac{\partial \tilde{\Phi}_0^*}{\partial J_2}, \mu_3 \equiv \bar{\lambda} \frac{\partial \tilde{\Phi}_0^*}{\partial J_3}$$

である。式(54)を物質時間微分したものは式(53)に等しくなければならない。その条件を求めると、

$$\left. \begin{aligned} \nu_4 &= 0, (\nu_4 = 0) \\ \mu_3 &= \nu_3 + \nu_4 = \nu_3 \\ \mu_2 &= \nu_3 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (55)$$

となる。さらに式(54)より

$$\nu_3 = \frac{3}{2} \frac{\bar{\epsilon}^p}{\bar{\sigma}} \quad \dots\dots\dots (56)$$

を得る。ただし、 $\bar{\sigma}$ は相当応力、 $\bar{\epsilon}^p$ は相当塑性ひずみであり

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} S_a^p \cdot S_a^p}, \bar{\epsilon}^p = \sqrt{\frac{2}{3} E_a^p \cdot E_a^p} \quad \dots\dots\dots (57)$$

にて与えられる。式(55)、(56)を用いて式(53)を書けば次のような速度形の塑性構成式を得る。

$$\dot{D}_a^p = \frac{3}{2} \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\epsilon}^p} \left(\frac{1}{H} - \frac{1}{h} \right) S_a^p + \frac{3}{2} \frac{1}{h} \dot{S}_a^p \quad \dots\dots\dots (58)$$

ただし、 H および h はそれぞれ $\bar{\sigma} - \bar{\epsilon}^p$ 曲線の接線係数(瞬間硬化率)および $\bar{\sigma} - \bar{\epsilon}^p$ 曲線の割線係数(尖り点硬化率)であり、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} H &= \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\epsilon}^p} \\ h &= \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\epsilon}^p} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (59)$$

構成式としては式(54)を採用しても同じであるが、ここでは速度形の式(58)を用いることにする。

式(32)、(8)および式(9)を式(58)に適用して現配置表示に戻せば非共軸形塑性構成式が次式のように得られる。

$$\dot{D}^p = \frac{3}{2} \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\epsilon}^p} \left(\frac{1}{H} - \frac{1}{h} \right) \tilde{T}^p + \frac{3}{2} \frac{1}{h} \tilde{T}^p \quad \dots\dots\dots (60)$$

ここで $\text{tr } D^p = 0$ を考慮して、 $\dot{D}^p = D^p$ を用いている。ただし、相当応力 $\bar{\sigma}$ は $\tilde{T}^p$ を用いて

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} \tilde{T}^p \cdot \tilde{T}^p} \quad \dots\dots\dots (61)$$

とも表せる。このように本理論では、速度形塑性構成式に非共軸性が必然的に導入されることがわかる。

さらに、式(37)と式(60)を加え、 $\tilde{T}$ について解けば弾塑性構成式が

$$\tilde{T} = C(\tilde{T}) : D \quad \dots\dots\dots (62)$$

のように垂弾性形として求められる。ただし、 $C(\tilde{T})$ は

$$\begin{aligned} C_{ijkl} &= \lambda_s \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu_s (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \\ &\quad - \frac{3\mu_s}{1 + h_s/2\mu_s} \frac{\tilde{T}_{ij} \tilde{T}_{kl}}{\bar{\sigma}^2} \quad \dots\dots\dots (63) \end{aligned}$$

であり、また式(63)における係数は以下のとおりである⁽²⁾。

$$\left. \begin{aligned} \lambda_s &\equiv \frac{E_s \nu_s}{(1 - 2\nu_s)(1 + \nu_s)}, \mu_s \equiv \frac{E_s}{2(1 + \nu_s)} \\ \nu_s &\equiv \frac{\nu}{E} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E_s} - \frac{1}{E} \right), \frac{1}{h_s} = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{E_s} - \frac{1}{E} \right) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (64)$$

ただし、 E は縦弾性係数であり、 E_s および E_s はそれぞれ $\bar{\sigma} - \bar{\epsilon}$ 曲線の接線係数および割線係数である。

本構成式は、形式上従来の J_2 変形理論に基づく非共軸形構成式⁽¹⁷⁾に類似しているが、次の点でそれとは大きく異なる。まず、応力の客観速度が従来の要請を満足するスピンで構成されていること。また、本構成式は非共軸形であるにもかかわらず、補散逸関数をポテンシャルとする一つの流れ則「式(48)」として導出されていること。そのために、 $\dot{D}_a^p$ はつねに補散逸曲面に垂直となるから、応力と応力速度のなす角が第二法則の要請から $\pi/2$ 以下となっても補散逸曲面には

必ず尖り点が存在することになる。また、 J_2 変形理論のように負荷範囲に対する制限は特にない(なお、 $\mathcal{D}_a^p$ が多価関数のときにも、垂直性は保持される⁽¹⁸⁾ ことをつけ加えておく)。

補散逸曲面の性質についての議論を、もう少し詳細に述べると次のようになる。式(58)に共軸条件 $\dot{S}_a' = (\dot{\sigma}/\sigma)S_a'$ を与えると、 J_2 流れ則形の構成式：

$$\mathcal{D}_a^p = \frac{3}{2} \frac{1}{H} \frac{\dot{\sigma}}{\sigma} S_a' \quad (65)$$

となる。 $\mathcal{D}_a^p$ と S_a' が同一方向を向く場合にも、法線則は成立しているから曲面はなめらかになり式(65)は J_2 流れ理論の結果と一致する。

次に、 S_a' と $\dot{S}_a'$ が非共軸の場合、 $\mathcal{D}_a^p$ は S_a' の方向からずれそのときにも $\mathcal{D}_a^p$ は法線性をもつから、補散逸曲面に尖り点は必ず存在する。また、構成式(58)を式(40)に代入し、式(57)を用いれば

$$\phi_a = \frac{3}{2} \frac{1}{H} S_a' \cdot \dot{S}_a' \geq 0 \quad (66)$$

となる。文献(1)が述べているように熱力学の第二法則(66)の要請から、 S_a' と $\dot{S}_a'$ の向きは本理論においても $\pi/2$ 以下となる。しかし式(58)で $1/H \approx 1/h$ のとき、 $\mathcal{D}_a^p$ の方向はほとんど $\dot{S}_a'$ に一致し、完全に一致したとき尖り角は最も鋭くなる。もし、 S_a' と $\dot{S}_a'$ のなす角が文献(1)のいうように $\pi/2$ 以上だったら、曲面に交差点が生じ不適となる。したがって、本理論においては S_a' と $\dot{S}_a'$ のなす角の限界は $\pi/2$ でよいことになる。また、 $S' \perp \dot{S}'$ のとき散逸は生じないので、 $\dot{S}'$ が曲面の接線方向でなくても、中立状態といえる。

ただし、本理論には J_2 変形理論と同様に除荷条件が含まれないので、この条件を導入することが今後の課題といえる。

4. スピンの一例

本理論によれば、熱力学的理論体系に適合するスピンは、弾性ひずみ E_a^e が状態量となるためのひずみ尺度 $E_a^{(s)}$ [式(7)] が形成されるように選択されねばならないといえる。4章ではこの要請ならびに従来の要請(i)~(iii)を同時に満たすスピンの一例を示すことにする。

変形こう配 F は、よく知られているように次のように極分解される。

$$F = RU = VR = R(PAP^T) = QAP^T \quad (67)$$

ここで、 R は剛体回転テンソル、 U は右ストレッチテンソル、 V は左ストレッチテンソル、 A は U の主値、 P は U の主軸の回転テンソルである。いま式(5)における x を R に選べば、客観速度のスピンは式(10)

より

$$\Omega = \dot{R}R^T \quad (68)$$

となるから、スピンとしては Green-Naghdi スピンを選択したことになる。このスピンの要請(i)~(iii)を満足することはすでに知られている。このとき D は、式(7)のようにひずみ尺度 $E_a^{(s)}$ の速度と変形速度 $\mathcal{D}_a^{(d)}$ に分解することができ、それぞれは具体的に次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} E_a^{(s)} &= \frac{1}{2} (I - U^{-2}) \\ \mathcal{D}_a^{(d)} &= \text{sym} [\dot{U}^{-1} (U^{-1} - U)] \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

次に、 $E_a^{(s)}$ を現配置に戻せば

$$A_a^{(s)} = RE_a^{(s)}R^T = \frac{1}{2} (I - V^{-2}) = A \quad (70)$$

となり現配置のひずみ尺度として Almansi ひずみ A が対応する。以上より $x = R$ と選んだ場合には、中間配置および現配置ともにひずみ尺度が形成されるので、Green-Naghdi スピンは熱力学的体系に適合する可能性があるといえる。

なお、スピンを具体化した場合のひずみの弾塑性分解に関する詳細な検討、ならびにスピンの候補として注目されているその他のもの、例えば Euler スピン $\Omega = \dot{Q}Q^T$ 、Green ひずみのスピン $\Omega = \dot{P}P^T$ 、対数ひずみを用いる際のスピンおよび材料依存性の塑性スピンなどに対する熱力学的妥当性についての議論は次報にゆだねる。

5. 結 言

エントロピーの増大性とエントロピー生成速度の最大性に基いて、非共軸形塑性構成式を熱力学的に導出する手法を提案するとともに、熱力学的論理体系に適合する客観応力速度について検討した結果、以下のような結論を得た。

(1) 塑性構成式を熱力学的に導出する際には、弾性ポテンシャルとして Gibbs 関数、また塑性ポテンシャルとして補散逸関数を用いるのが妥当である。その結果、塑性構成式には必然的に非共軸性が導入される。

(2) 得られた非共軸形塑性構成式は、補散逸関数を塑性ポテンシャルとする一つの流れ則を基礎にしているため、塑性ひずみ速度は必ず補散逸曲面に垂直となり、応力と応力速度のなす角が直角以下となる場合にも、補散逸曲面に尖り点の存在が保証される。

(3) 客観速度のスピンに対する熱力学的要請は、弾性ひずみが完全なひずみ尺度となるようにスピンを選択する必要があると述べられる。これを満足するス

ピンを用いると、速度形弾性構成式におけるひずみ速度と応力速度は同一の客観速度で表現できる。

本研究を遂行するに当たり、ご討論いただいた慶応義塾大学理工学部の高橋邦弘教授ならびに本論文の作成にご協力いただいた本塾大学院の高橋順一氏に深甚なる感謝の意を表す。

文 献

- (1) 後藤学, 機論, **52** 476, A(1986), 1134-1141.
- (2) 北川浩, 弾・塑性力学, (1987), 100, 裳華房.
- (3) 徳岡辰雄, 材料, **28** 312(1980), 857-860.
- (4) Maugin, G. A., *The Thermomechanics of Plasticity and Fracture*, (1992), 68, Cambridge Univ. Press.
- (5) 岸野佑次, 土木学会論文集, **394**(1988), 115-122.
- (6) Nagtegaal, J. C. and de Jong, J. E., *Proc. Workshop on Plasticity at Finite Strain*, (1982), 65, Stanford Univ.
- (7) Dienes, J. K., *Acta Mech.*, **32**(1979), 217-232.
- (8) Sowerby, R. and Chu, E., *Int. J. Solids Struct.*, **20** 11/12 (1984), 1037-1048.
- (9) Dafalias, Y. F., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **52**(1985), 865-871.
- (10) Gotoh, M., *JSME Int. J.*, **1**, **32** 2(1989), 230-236.
- (11) Voyiadjis, G. Z. and Kattan, P. I., *Int. J. Plasticity*, **8** (1992), 271-314.
- (12) Szabo, L. and Balla, M., *Int. J. Solids Struct.*, **25** 3 (1989), 279-297.
- (13) Yang, W., Cheng, L. and Hwang, K., *Int. J. Plasticity*, **8** (1992), 643-656.
- (14) Kuroda, M., *Int. J. Plasticity*, **11** 5(1995), 547-570.
- (15) Eringen, A. C., *Continuum Physics*, **2**(1976), 136, Academic Press.
- (16) Kestin, J., *IUTAM Symp.*, (1966), 177-212.
- (17) Stören, S. and Rice, J. R., *J. Mech. Phys. Solids*, **23** (1975), 421-441.
- (18) Ziegler, H., *An Introduction to Thermomechanics*, (1983), 268, North Holland.