均質化理論を用いた炭素繊維複合材料の
クリープ・コンプライアンスの評価*

渋谷

嗣*¹Evaluation of Creep Compliance of Carbon-Fiber-Reinforced
Composites by Homogenization Theory

Yotsugi SHIBUYA

Effective creep compliance of carbon fiber reinforced composites is evaluated for applications of composites at elevated temperatures. A homogenization theory with two scale asymptotic expansion in the Laplace domain is used to solve viscoelastic problems of composites. Effective constitutive equations and microscopic disturbed displacements are derived from the homogenization theory. A hexagonal array of fibers is employed for the microstructure of the composite and a hexagonal unit cell is placed in the microscopic field to represent a boundary value problem. In numerical calculations, a carbon fiber reinforced composite with thermoplastic matrix is considered at the glass transition temperature of the matrix. The matrix is viscoelastic and is represented using the generalized Maxwell model at the glass transition temperature, and fibers are considered as a transversely isotropic elastic medium. The effective creep compliance of the composite is determined by numerically solving a set of equations for macro and microscopic fields.

Key Words: Composite Material, Viscoelasticity, Numerical Analysis, Boundary Element Method, Creep Compliance, Homogenization Theory

1. 緒 言

熱可塑性樹脂を母材とした炭素繊維複合材料は高靱性の複合材料として注目されている。耐熱性の高い樹脂が開発されてきたことにより、さらに高温での応用が可能になってきた。熱的環境においてこのような複合材料を使用するためには、時間依存性の変形挙動に関する研究が必要である。

複合材料の線形・非線形粘弾性特性に関する研究は円筒モデル⁽¹⁾、Self consistent モデル⁽²⁾、有限要素法⁽³⁾を用いた特性評価や均質化理論の応用に関する理論的検討⁽⁴⁾が行われてきた。均質化理論は複合材料の特性評価を微視的な挙動を考慮して詳細に解析できる方法として、複合材料の力学特性に関する界面や母材の非線形性の影響の解析などに応用されてきた^{(5)~(8)}。また、微視的挙動の解析に有限要素法が適用できることから、複合材料の特性評価のための有限要素解析の前・後処理機能としても用いられている⁽⁹⁾。

本研究は炭素繊維複合材料のクリープ・コンプライアンスを評価するために、複合材料の粘弾性解析にラプラス変換を用いて均質化理論を適用したものであ

る。変位に関する漸近展開を用いた均質化理論⁽¹⁰⁾は、基本的に与えられた巨視的ひずみに対して巨視的応力を得るための均質化された構成方程式を導くので、一定応力に対するクリープ・コンプライアンスを得ることは困難であった。ここでは、均質化理論において複合材料の微視的な擾乱変位成分が積分方程式で定式化できることに着目し、巨視的な構成方程式と微視的な擾乱変位に関する方程式を連立して数値的に解くことにより、複合材料のクリープ・コンプライアンスを直接得ることができることを示した。

数値計算においては熱可塑性樹脂を母材とした炭素繊維複合材料を対象として、ガラス転移温度において一般化 Maxwell モデルで同定した樹脂の特性を用いて繊維複合材料のクリープ・コンプライアンスを決定した。

2. 粘弾性体に関する均質化理論

炭素繊維複合材料のクリープ・コンプライアンスの評価に均質化理論を適用するために、複合材料の微視構造について繊維が周期的に配列していると仮定する。複合材料の巨視的な特性が横等方性になるように正六角形の繊維配列とし、繊維を含む正六角形の単位セルを構成する。図1には複合材料の繊維の周期配列

* 原稿受付 1995年11月17日。

*¹ 正員、秋田大学鉱山学部 (〒010 秋田市手形学園町1-1)。

モデルと二つの座標系を示している。複合材料の均質化の検討のために繊維方向を x_3 軸とする巨視的な直角座標系 $\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3)$ と各六角形単位セルに繊維の中心を原点、繊維の方向を y_3 軸とする微視的な直角座標系 $\mathbf{y}=(y_1, y_2, y_3)$ を用いる。複合材料は境界の影響を無視しうほど単位セルの大きさに比較して大きいとし、巨視的な応力 σ_{ij}^* と巨視的なひずみ ε_{ij}^* に関する挙動を考える。

解析では繊維を粘弾性として拡張して考え、複合材料を微視的に不均質な粘弾性体としてみなす。このとき、複合材料の粘弾性の応力ひずみ関係は $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ の二つの座標系を用いて次のように与えられる。

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \int_0^t C_{ijkl}(\mathbf{y}, t-\tau) \frac{\partial \varepsilon_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau)}{\partial \tau} d\tau \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 σ_{ij} は応力成分、 ε_{ij} はひずみ成分、 C_{ijkl} は応力緩和係数、 t は時間である。また、ひずみと応力の関係は次のようになる。

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \int_0^t J_{ijkl}(\mathbf{y}, t-\tau) \frac{\partial \sigma_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau)}{\partial \tau} d\tau \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 J_{ijkl} は材料のクリープ・コンプライアンスである。複合材料は母材と繊維の部分で特性が異なり、それらが周期的に配列していることから、 C_{ijkl} あるいは J_{ijkl} は位置に関して $\mathbf{y}$ のみの周期関数で与えられる。

粘弾性体の解析においてラプラス変換を適用すると、弾性解との対応原理を用いることができるので、基礎式をラプラス変換して複合材料の均質化を考える。応力とひずみの関係式(1)のラプラス変換は次のようになる。

$$\bar{\sigma}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, p) = p \bar{C}_{ijkl}(\mathbf{y}, p) \bar{\varepsilon}_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, p) \quad \dots\dots\dots (3)$$

ただし、 $(\bar{\quad})$ はラプラス変換された関数であることを

示し、 p はラプラス変換の変数である。同様に平衡方程式、変位とひずみの関係はラプラス変換して次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{\sigma}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, p) + \bar{F}_i(\mathbf{x}, p) &= 0 \\ \bar{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, p) &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \bar{u}_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}, p)}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}, p)}{\partial x_i} \right] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (4)$$

ただし、 F_i は体積力成分、 u_i は変位成分である。

微視的に不均質構造をもつ複合材料の均質化のために、巨視的、微視的座標系を有するラプラス変換した変位をパラメータ λ の漸近展開で次のように表示する⁽¹⁰⁾。

$$\bar{u}_i = \bar{u}_i^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, p) + \lambda \bar{u}_i^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, p) + \lambda^2 \bar{u}_i^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, p) + \dots \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここで、 λ は単位セルの微細さを表すパラメータである。巨視的座標系 $\mathbf{x}$ と微視的座標系 $\mathbf{y}$ の関係およびその微分演算子は次のように与えられる。

$$\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}/\lambda, \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial y_i} \quad \dots\dots\dots (6)$$

既報⁽⁶⁾の方法を拡張して、式(5)、(6)を考慮した平衡方程式の λ^{-1} オーダの項は、 $\bar{u}_i^{(2)}$ 以上の高次の項を無視して次のように得られる。

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \{ p \bar{C}_{ijkl}(\mathbf{y}, p) [\bar{\varepsilon}_{kl}^{(1)}(\mathbf{y}, p) + \bar{\varepsilon}_{kl}^*(p)] \} = 0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{ij}^{(1)}(\mathbf{y}, p) &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \bar{u}_i^{(1)}(\mathbf{y}, p)}{\partial y_j} + \frac{\partial \bar{u}_j^{(1)}(\mathbf{y}, p)}{\partial y_i} \right] \\ \bar{\varepsilon}_{ij}^*(p) &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \bar{u}_i^{(0)}(\mathbf{x}, p)}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j^{(0)}(\mathbf{x}, p)}{\partial x_i} \right] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (8)$$

巨視的な変位 $\bar{u}_i^{(0)}$ から導かれる巨視的なひずみ成分 $\bar{\varepsilon}_{ij}^*(p)$ は単位セルの微視領域で一様と置くことができる。また、擾乱変位成分 $\bar{u}_i^{(1)}$ は構造の周期性より $\mathbf{y}$ の関数となる。

次に、 λ^0 オーダの項を単位セルの領域について積分すると次の巨視的な平衡方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{1}{V} \int_V p \bar{C}_{ijkl}(\mathbf{y}, p) [\bar{\varepsilon}_{kl}^{(1)}(\mathbf{y}, p) + \bar{\varepsilon}_{kl}^*(p)] dV(\mathbf{y}) \right\} \\ + \bar{F}_i(p) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (9)$$

ただし、 V は y_3 方向に単位長さ当たりの単位セルの体積である。上式の $\{ \quad \}$ の項は巨視的な応力に対応するので、均質化された巨視的な応力成分とひずみ成分の関係は次式によって与えられる。

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{ij}^*(p) &= p \bar{C}_{ijkl}^*(p) \bar{\varepsilon}_{kl}^*(p) \\ &= \frac{1}{V} \int_V p \bar{C}_{ijkl}(\mathbf{y}, p) [\bar{\varepsilon}_{kl}^{(1)}(\mathbf{y}, p) + \bar{\varepsilon}_{kl}^*(p)] dV(\mathbf{y}) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (10)$$

Fig. 1 Periodic array of fibers and two coordinate systems

ここで、 $\hat{C}_{ijkl}^*$ は均質化された複合材料の応力緩和係数である。

3. クリープ・コンプライアンス

複合材料のクリープ・コンプライアンスを J_{ijkl}^* として均質化されたひずみと応力の関係は次のように示される。

$$\hat{\varepsilon}_{ij}^*(p) = p \hat{J}_{ijkl}^*(p) \hat{\sigma}_{kl}^*(p) \quad \cdots (11)$$

上式からクリープ・コンプライアンスは一定な巨視的応力 $\hat{\sigma}_{kl}^*(p) = \sigma_{kl}^0/p$ に対する巨視的ひずみに関する応答として次式のように得られる。

$$\hat{J}_{ijkl}^*(p) = -\frac{1}{\sigma_{kl}^0} \hat{\varepsilon}_{ij}^*(p) \quad \cdots (12)$$

しかし、式(7)、(10)では巨視的ひずみ $\hat{\varepsilon}_{ij}^*$ が陽に示されていないので、巨視的応力の応答として直接クリープ・コンプライアンスを得ることは困難であるので、以下の解法に従って決定する。

式(7)の不均質な材料の方程式に対して、繊維と母材の2つの領域に分離して次のように表示する。

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \hat{\sigma}_{ij}^{\beta}(\mathbf{y}, p) = 0 \quad \cdots (13)$$

$$\hat{\sigma}_{ij}^{\beta}(\mathbf{y}, p) = p \hat{C}_{ijkl}^{\beta}(p) [\hat{\varepsilon}_{kl}^{\beta(1)}(\mathbf{y}, p) + \hat{\varepsilon}_{kl}^*(p)] \quad \cdots (14)$$

ただし、記号 β は m あるいは f をとり、 m は母材、 f は繊維を示す。式(13)、(14)において巨視的ひずみを固有ひずみが付加された項として考え、その境界値問題の擾乱変位の解は次の積分方程式によって表すことができる。

$$\begin{aligned} \hat{u}_i^{\beta(1)}(\mathbf{y}, p) = & \int_{\Gamma_{\beta}} [\hat{U}_{ij}^{\beta}(\mathbf{y}, \mathbf{y}', p) \hat{t}_j^{\beta}(\mathbf{y}', p) \\ & - \hat{T}_{ij}^{\beta}(\mathbf{y}, \mathbf{y}', p) \hat{u}_i^{\beta(1)}(\mathbf{y}', p)] d\Gamma(\mathbf{y}') \end{aligned}$$

$$\hat{U}_{ij}^m(\mathbf{y}, \mathbf{y}', p) = \frac{[1 + p\hat{\nu}_m(p)]}{4\pi[1 - p\hat{\nu}_m(p)]p\hat{E}_m(p)} \left\{ [3 - 4p\hat{\nu}_m(p)] \log\left(\frac{1}{s}\right) \delta_{ij} + \frac{\partial s}{\partial y_i} \frac{\partial s}{\partial y_j} \right\}, \quad (i, j=1, 2) \quad \cdots (16)$$

$$\hat{U}_{33}^m(\mathbf{y}, \mathbf{y}', p) = \frac{[1 + p\hat{\nu}_m(p)]}{\pi p\hat{E}_m(p)} \log\left(\frac{1}{s}\right) \quad \cdots (17)$$

ただし

$$s = \sqrt{(y_1' - y_1)^2 + (y_2' - y_2)^2}$$

ここで、 δ_{ij} はクロネッカーデルタ、 E_m と ν_m は樹脂の縦弾性係数とポアソン比に対応する時間依存性のある係数である。また、炭素繊維は横等方性の弾性体として扱い、その基本解は次のように書くことができる。

$$\hat{U}_{ij}^f(\mathbf{y}, \mathbf{y}') = \frac{E_L(1 + \nu_L)^2}{4\pi E_L(E_L - \nu_L^2 E_T)} \left\{ \left[3 - \frac{4(\nu_L E_L + \nu_L^2 E_T)}{E_L(1 + \nu_L)} \right] \log\left(\frac{1}{s}\right) \delta_{ij} + \frac{\partial s}{\partial y_i} \frac{\partial s}{\partial y_j} \right\}, \quad (i, j=1, 2) \quad \cdots (18)$$

$$\hat{U}_{33}^f(\mathbf{y}, \mathbf{y}') = \frac{1}{2\pi G_{LT}} \log\left(\frac{1}{s}\right) \quad \cdots (19)$$

ここで、 E_L , ν_{LT} , G_{LT} は繊維の繊維方向の縦弾性係数、ポアソン比そして横弾性係数、また、 E_T , ν_T は横方向の縦弾性係数とポアソン比である。

擾乱変位式(15)と巨視的応力式(10)の方程式を連立して解いて、直接複合材料のクリープ・コンプライアンス J_{ijkl}^* を得る。擾乱変位が積分方程式で与えられることに着目して、巨視的応力を擾乱変位と同様に境界面上で処理

Fig. 2 Local coordinate systems and contours

$$- \int_{\Omega_{\beta}} \hat{S}_{ijkl}^{\beta}(\mathbf{y}, \mathbf{y}', p) \hat{\varepsilon}_{kl}^*(p) d\Omega(\mathbf{y}') \quad \cdots (15)$$

ここで、 Γ_{β} と Ω_{β} は図2に示すように、母材あるいは繊維の境界の積分領域と内部の積分領域である。また、 t_i^{β} は境界 Γ_{β} 上の表面力であり、 U_{ij}^{β} , T_{ij}^{β} , S_{ijkl}^{β} はそれぞれ粘弾性の無限体の一点に瞬間集中力が作用した場合の準静的な変位、表面力、応力に関する基本解である。これらの基本解は弾性解との対応から得ることができる。

一方向繊維複合材料を考えると、繊維方向にはひずみの変化がないので、擾乱変位に関する解は一般化した平面ひずみ問題として解くことができる。母材の樹脂を等方性の粘弾性体とし式(15)の変位に関する基本解は弾性解と粘弾性解の対応原理⁽¹¹⁾より次のように与えられる。

できるように式(10)を母材と繊維の領域に分割して Gauss の定理を適用すると、次のように変形できる。

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^*(p) = \frac{1}{V} \left\{ \int_{I_m} \frac{1}{2} p \hat{C}_{ijkl}^m(p) [\hat{u}_k^{m(1)}(\mathbf{y}, p) n_l + \hat{u}_l^{m(1)}(\mathbf{y}, p) n_k] d\Gamma(\mathbf{y}) + p \hat{C}_{ijkl}^m(p) \varepsilon_{kl}^*(p) V_m \right. \\ \left. + \int_{I_f} \frac{1}{2} C_{ijkl}^f [\hat{u}_k^{f(1)}(\mathbf{y}, p) n_l + \hat{u}_l^{f(1)}(\mathbf{y}, p) n_k] d\Gamma(\mathbf{y}) + C_{ijkl}^f \varepsilon_{kl}^*(p) V_f \right\} \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

ここで、 n_i は境界の単位法線ベクトルの x_i 方向成分、 V_m と V_f はそれぞれ単位セルの母材と繊維部分の体積である。したがって、式(15)、(20)の未知数の擾乱変位は境界 I_m, I_f 上で処理することができ、ラプラス逆変換した二つの式を連立して一定応力 σ_{kl}^0 に対する巨視的ひずみ ε_{ij}^* の応答を数値的に解くことによりクリープ・コンプライアンスが得られる。

4. 数 値 計 算 の 方 法

複合材料のクリープ・コンプライアンスはラプラス逆変換された母材と繊維の擾乱変位に関する境界積分方程式と巨視的応力の式を連立して解くことによって決定する。数値計算のために式(15)から得られる母材と繊維に対する境界積分方程式と式(20)をラプラス逆変換し、次のように時間項も含めて離散化を行う。

時間 t を M 個に分割し、また、母材の積分路 I_m を N_m 個に、繊維の積分路 I_f を N_f 個に分割すると、母材と繊維の離散化された境界積分方程式は次のように書くことができる。

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{m(1)}(\mathbf{y}, \tau_M) - u_j^{m(1)}(\mathbf{y}, \tau_{M-1})}{2(\tau_M - \tau_{M-1})} = \sum_{r=1}^M \sum_{s=1}^{N_m} \frac{I_r^{m(1)}(\mathbf{y}_s, \tau_r) - I_r^{m(1)}(\mathbf{y}_s, \tau_{r-1})}{\tau_r - \tau_{r-1}} \int_{\tau_{r-1}}^{\tau_r} \int_{I_s^m} U_{ij}^m(\mathbf{y}, \mathbf{y}', t - \tau) d\Gamma(\mathbf{y}') d\tau \\ + \sum_{r=1}^M \sum_{s=1}^{N_m} \frac{u_i^{m(1)}(\mathbf{y}_s, \tau_r) - u_i^{m(1)}(\mathbf{y}_s, \tau_{r-1})}{\tau_r - \tau_{r-1}} \int_{\tau_{r-1}}^{\tau_r} \int_{I_s^m} T_{ij}^m(\mathbf{y}, \mathbf{y}', t - \tau) d\Gamma(\mathbf{y}') d\tau \\ + \sum_{r=1}^M \frac{\varepsilon_{kl}^*(\tau_r) - \varepsilon_{kl}^*(\tau_{r-1})}{\tau_r - \tau_{r-1}} \int_{\tau_{r-1}}^{\tau_r} \int_{\Omega_m} S_{jkl}^m(\mathbf{y}, \mathbf{y}', t - \tau) d\Omega(\mathbf{y}') d\tau \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u_j^{f(1)}(\mathbf{y}, \tau_M) = \sum_{s=1}^{N_f} I_s^f(\mathbf{y}_s, \tau_M) \int_{I_s^f} U_{ij}^f(\mathbf{y}, \mathbf{y}') d\Gamma(\mathbf{y}') - \sum_{s=1}^{N_f} u_i^{f(1)}(\mathbf{y}_s, \tau_M) \int_{I_s^f} T_{ij}^f(\mathbf{y}, \mathbf{y}') d\Gamma(\mathbf{y}') \\ - \varepsilon_{kl}^*(\tau_M) \int_{\Omega_f} S_{jkl}^f(\mathbf{y}, \mathbf{y}') d\Omega(\mathbf{y}') \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

ただし、 τ_r は分割された r 番めの時刻であり、 I_m^s と I_f^s は母材と繊維に分割された s 番めの積分路である。同様に式(20)についても離散化を行うと次式ようになる。

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^*(\tau_M) = \frac{1}{V} \left\{ \sum_{r=1}^M \sum_{s=1}^{N_f} \frac{1}{2} \left[\frac{u_k^{m(1)}(\mathbf{y}_s, \tau_r) - u_k^{m(1)}(\mathbf{y}_s, \tau_{r-1})}{\tau_r - \tau_{r-1}} n_l \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{u_l^{m(1)}(\mathbf{y}_s, \tau_r) - u_l^{m(1)}(\mathbf{y}_s, \tau_{r-1})}{\tau_r - \tau_{r-1}} n_k \right] \int_{\tau_{r-1}}^{\tau_r} C_{ijkl}^m(\tau_M - \tau) d\tau \right. \\ \left. + V_m \sum_{r=1}^M \frac{\varepsilon_{kl}^*(\tau_r) - \varepsilon_{kl}^*(\tau_{r-1})}{\tau_r - \tau_{r-1}} \int_{\tau_{r-1}}^{\tau_r} C_{ijkl}^m(\tau_M - \tau) d\tau + \sum_{s=1}^{N_f} \frac{1}{2} C_{ijkl}^f [u_k^{f(1)}(\mathbf{y}, \tau_M) n_l \right. \right. \\ \left. \left. + u_l^{f(1)}(\mathbf{y}, \tau_M) n_k] D_{ij}^f + V_f C_{ijkl}^f \varepsilon_{kl}^*(\tau_M) \right\} \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

ここで、 D_{ij}^f は繊維の分割された積分路 I_f^s の長さである。

これらの連立代数方程式は単位セルに対する初期条件、境界条件と適当な荷重条件のもとに境界上の未知表面力、擾乱変位、巨視的ひずみについて解くことができる。初期条件は $t=0$ において次のように与える。

$$\left. \begin{aligned} u_i^{m(1)}(\mathbf{y}, 0) = 0, \quad I_i^m(\mathbf{y}, 0) = 0 \\ u_i^{f(1)}(\mathbf{y}, 0) = 0, \quad I_i^f(\mathbf{y}, 0) = 0 \\ \varepsilon_{ij}^*(0) = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

図2には単位セルの境界値問題において境界条件を与えるために、半径 a の繊維の中心を原点とする直角座標系 (y_1, y_2, y_3) と円柱座標系 (r, θ, z) および単位セルの外側の境界に六角形の各辺の中央を原点とする

局所座標系 $\xi_j (j=1, 2, 3, \dots, 6)$ を示している。局所座標系 ξ_j を用いて、周期性の条件として外側の境界に対して次の境界条件が与えられる。

$$\begin{aligned} u_i^{m(1)}(\xi_j) = -u_i^{m(1)}(-\xi_j), \quad I_i^m(\xi_j) = I_i^m(-\xi_j) \\ (i=1, 2, 3; j=1, 2, 3, \dots, 6) \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

また、母材と繊維の界面は完全に接着しているとする、境界条件は界面 $(r=a)$ において次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} I_r^m = -I_r^f, \quad I_\theta^m = -I_\theta^f, \quad I_z^m = -I_z^f \\ u_r^{m(1)} = u_r^{f(1)}, \quad u_\theta^{m(1)} = u_\theta^{f(1)}, \quad u_z^{m(1)} = u_z^{f(1)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

ただし、添字 r, θ, z はそれぞれ繊維の半径方向成分、円周方向成分、繊維方向成分を表す。

以上の初期条件、境界条件を考慮して与えられた巨

視的応力の条件のもとで式(21)～(23)を連立して解くことにより、巨視的ひずみ ε^* に関する時間変動が得られる。実際の数値計算では原点における対称性を考慮して境界部分の未知数をさらに減らすことができる。

5. 数値計算結果と考察

前述の方法に従って数値計算を行い、熱可塑性樹脂を母材とした炭素繊維複合材料 AS 4/PACM-12⁽¹²⁾ のクリープ・コンプライアンスの時間変化を算出した。炭素繊維 AS 4 (Hercules) は横等方性体として扱い、 $E_L = 235 \text{ GPa}$, $E_T = 14 \text{ GPa}$, $\nu_{LT} = 0.2$, $\nu_T = 0.25$, $G_{LT} = 28 \text{ GPa}$ とした⁽¹³⁾。母材の熱可塑性樹脂 PACM-12 (DuPont) は実験から得られているガラス転移温度 $T = 145^\circ\text{C}$ におけるマスタカーブ⁽¹⁴⁾ を用いて同定した。樹脂の特性について直列のばねとダッシュポットの要素をさらに N 個並列に並べた一般化 Maxwell モデルを用いて、次式のように定式化した。

$$J_m(t) = A_{-1}t + A_0 + \sum_{i=1}^{N-1} A_i \exp(a_i t) \quad \cdots \cdots (27)$$

ここで、 a_i と A_i は未知定数であり、マスタカーブを

用いて最小二乗法によって決定する。また、縦弾性係数に対応する樹脂の応力緩和係数 $E_m(t)$ は次式のラプラス逆変換によって得られる。

$$\hat{E}_m(p) = \frac{1}{p^2 \hat{J}_m(p)} \quad \cdots \cdots (28)$$

図3は同定した樹脂のクリープ・コンプライアンスを示したものである。ばね・ダッシュポット要素の数 N を変化させ、 $N=2$ を一点鎖線、 $N=4$ を破線、 $N=8$ を実線として示した。要素の数 N を大きくするとクリープ・コンプライアンスは滑らかになり、マスタカーブにほぼ一致するが、要素の数に相当する N 個のうねりが生じる。さらに要素数を大きくするとそれらのうねりはより小さくなると思われるが、最小二乗法による式(27)の未知定数の決定が難しくなることから $N=8$ の場合を複合材料のクリープ・コンプライアンスの数値計算に用いた。また、樹脂の粘弾性特性を等方性とした場合、もう一つの係数が必要である。樹脂のガラス転移温度において変形時の体積変化は小さいとし、樹脂のポアソン比を $\nu_m = 0.495$ で一定と仮定した。

図4は複合材料の巨視的なクリープ・コンプライアンス $J_{111}^*(t)$ の数値計算結果を繊維の体積含有率 C_f

Fig. 3 Identification of creep compliance of thermoplastic matrix at glass transition temperature 145°C

Fig. 5 Creep compliance of composite $J_{1122}^*(t)$ for transverse load

Fig. 4 Creep compliance of composite $J_{111}^*(t)$ for transverse load

Fig. 6 Creep compliance of composite $J_{333}^*(t)$ for longitudinal load

Fig. 7 Creep compliance of composite $J^*_{311}(t)$ for longitudinal load

Fig. 8 Creep compliance of composite $J^*_{133}(t)$ for longitudinal shear load

をパラメータとして示したものである。数値計算は巨視的な応力 $\sigma^*_1 = \sigma_0$ 一定, $\sigma^*_{22} = \sigma^*_{33} = \sigma^*_{12} = 0$ の条件に対する巨視的ひずみ ϵ^*_1 の応答から得られたものである。繊維の体積含有率が小さくなると樹脂のクリープ変形の影響が大きくなり、クリープ・コンプライアンスは時間の経過とともに大きくなる。計算結果に多少振動が見られるのは樹脂のクリープ・コンプライアンスの同定に用いた要素の数に対応する振動が生じることに原因しているものである。対象とした複合材料のクリープ・コンプライアンスは実験結果⁽¹²⁾が報告されており、本計算結果は対応する繊維の体積含有率 C_f が 0.6 の場合についてその実験結果と比較的よく一致するものである。

図5は $J^*_{122}(t)$ について図4の $J^*_{111}(t)$ と同様に示したものである。これは、図4と同じ巨視的応力の条件に対して ϵ^*_{22} の応答から得られたものである。 $J^*_{122}(t)$ は樹脂の剛性が繊維と比較して小さいことや、ガラス転移温度において変形時の体積変化が小さいこと、また、繊維方向には繊維によって変形が拘束されることから、 x_2 方向の巨視的ひずみは荷重方向の $J^*_{111}(t)$ とほぼ同程度で、しかも負の値になる。

図6と図7は複合材料のクリープ・コンプライアンス $J^*_{333}(t)$ と $J^*_{133}(t)$ をそれぞれ示したものである。これらは繊維方向の一軸引張りを想定し、 $\sigma^*_{33} = \sigma_0$ 一定, $\sigma^*_1 = \sigma^*_{22} = \sigma^*_{12} = 0$ に対応する巨視的ひずみ ϵ^*_{33} と ϵ^*_{11} の応答から得られたものである。繊維の縦弾性係数が非常に大きいことから、それらのクリープ・コンプライアンスの時間依存性は小さくなることがわかる。

図8は繊維方向せん断に関するクリープ・コンプライアンス $J^*_{133}(t)$ を示している。これも垂直応力成分と同様に $\sigma^*_{13} = \sigma_0$ 一定, $\sigma^*_1 = \sigma^*_{22} = \sigma^*_{33} = 0$ の条件のもとでの巨視的せん断ひずみ ϵ^*_{13} を求めたものである。繊維方向のせん断に関しては、繊維方向の拘束の影響が小さいことから繊維の体積含有率が小さくなると樹脂のクリープ変形の影響がより大きくなり、さらにクリープ・コンプライアンスは時間の経過とともに増大する。

以上の数値結果で示したように二次元解析で5個のすべてのクリープ・コンプライアンスを容易に得ることができる。

6. 結 言

複合材料のクリープ・コンプライアンスを評価するために均質化理論を用いた新しい方法を提案した。ラプラス変換と積分方程式を導入し、均質化理論を用いて巨視的構成方程式と微視的な単位セル内の擾乱変位を定式化した。それらの式を連立して数値的に解くことにより、与えられた巨視的な任意の応力条件に対して繊維複合材料の巨視的なひずみの挙動を決定した。すべての巨視的ひずみ成分を擾乱変位成分のなかに固有ひずみとして導入し、横等方性の繊維複合材料の特性を二次元解析で5個のすべてのクリープ・コンプライアンスを算出可能にした。

文 献

- (1) Hashin, Z., Viscoelastic Fiber Reinforced Materials, *AIAA J.*, **4**(1966), 1411-1417.
- (2) Laws, N. and McLaughlin, R., Self Consistent Estimate for the Viscoelastic Creep Compliances of Composite Materials, *Proc. R. Soc. Lond., Ser. A*, **359** (1978), 251-273.
- (3) Schaffer, B. G. and Adams, D. F., Nonlinear Viscoelastic Analysis of a Unidirectional Composite Material, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **48**(1981), 859-865.
- (4) Francfort, G. A. and Suquet, P. M., Homogenization and Mechanical Dissipation in Thermoviscoelasticity, *Archive Rat. Mech. Anal.*, **96**(1986), 265-293.
- (5) Lene, F. and Leguillon, D., Homogenized Constitutive Law for a Partially Cohesive Composite Material, *Int. J. Solids Struct.*, **18** 5(1982), 443-485.
- (6) 渡谷嗣・Wang, S. S., 界面に損傷を有する金属基繊維複合

- 材料の非線形挙動の解析, 機論, **60** 569, A(1994), 153 158.
- (7) Jansson, S., Homogenized Nonlinear Constitutive Properties and Local Stress Concentrations for Composites with Periodic Internal Structure, *Int. J. Solids Struct.*, **29**(1992), 2181 2200.
- (8) 渋谷嗣・Wang, S. S., 界面に損傷を有する金属基繊維複合材料の挙動に関する弾塑性解析, 機論, **61** 584, A (1995), 736 742.
- (9) Guedes, J. M. and Kikuchi, N., Preprocessing and Postprocessing for Material Based on the Homogenization Method with Adaptive Finite Element Methods, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **83**(1990), 143 198.
- (10) Bensoussan, A., Lions, J. L. and Papanicolaou, G., *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, (1978), 11 22, North Holland.
- (11) Rizzo, F. J. and Shippy, D. J., An Application of the Correspondence Principle of Linear Viscoelastic Theory, *SIAM J. Appl. Math.*, **21**(1971), 321 330.
- (12) Miyase, A., Wang, S. S., Chen, W. L. and Geil, P. H., Anelastic Deformation of a Thermoplastic Matrix Fiber Composite at Elevated Temperature; Part III: Structure and Thermomechanical Properties of AS 4/PACM 12 Composite, *J. Compos. Mater.*, **27**(1993), 908 920.
- (13) Carman, G. P., Averill, R. C., Reifsnider, K. L. and Reddy, J. N., Optimazation of Fiber Coatings to Minimize Stress Concentrations in Composite Materials, *J. Compos. Mater.*, **27**(1993), 589 612.
- (14) Miyase, A., Chen, W. L., Geil, P. H. and Wang, S. S., Anelastic Deformation of a Thermoplastic Matrix Fiber Composite at Elevated Temperature; Part II: Time Temperature Dependent Matrix Behavior, *J. Compos. Mater.*, **27**(1993), 886 907.