特殊直交群 $SO(3)$ を含んだ有限要素法定式化* (第1報, 応力速度と接線剛性の関係)

石 原 昌 文^{*1}

Finite-Element Formulation with Special Orthogonal Group $SO(3)$ (1st, Relationships between Stress Rates and Tangent Stiffnesses)

Masabumi ISHIHARA

Three dimensional large rotation analysis of a beam by the finite element method is possible using a beam element with the special orthogonal group $SO(3)$. It is known that the stress rate used in the constitutive equation governs the tangent stiffness. Therefore, in this paper, the relationship between the stress rate and the tangent stiffness will be shown. The stress rates used are Truesdell stress rate, Jaumann stress rate, Neo Green stress rate and Ishihara stress rate. It will also be shown that all tangent stiffnesses have the second variation of velocity gradient tensor because of $SO(3)$, and the tangent stiffness of Ishihara stress rate has only material stiffness and geometric stiffness of rigid rotation. In the upcoming paper, tangent stiffnesses of those stress rates of a beam element will be shown.

Key Words: Finite Element Method, Finite Deformation Theory, Nonlinear Problem, Special Orthogonal Group, Finite Element Formulation, Objective Stress Rate, Tangent Stiffness

1. 序論

1.1 従来の研究 有限要素法による梁の3次元大変形解析は、J.C.Simo, L.Vu-Quocら^{(1),(2)}が、梁の変形とともに移動するMoving Frameを使うことによって可能にした。Moving Frameとは、3つの直交単位ベクトル(base vector)から成る直交フレーム(orthogonal frame)のことで、梁の変形前の基準配置(reference configuration)と変形後の現在配置(current configuration)とで直交フレームを定義し、それらを変換マトリックスで結合する。そして、梁の現在配置は、中心線の位置と、Moving Frameで定義される断面の向きで表現される。その中心線の位置は曲線 $x_0: (0, L) \rightarrow R^3$ で表わされ、断面の向きは回転群(rotation group)を構成する変換マトリックス $T: (0, L) \rightarrow SO(3)$ で表わされる。そして、この回転群が特殊直交群(special orthogonal group) $SO(3)$ として表わされる交換不可能なリー群

(Lie group)である。つまり、Moving Frameによる梁モデルは、回転群を含んだ多様体(manifold)として定義される。しかし、その結果、この多様体は交換不可能な回転群を含んでいるため、平衡状態から離れた状態では接線剛性(tangent stiffness)マトリックスが非対称となる。

そこで筆者⁽³⁾は、Moving Frameによる梁モデルの接線剛性を、Semitangential Rotationを使うことによって対称化した。これは、Semitangential Axesから測定した相対的な仮想仕事を考えることであった。しかし、その梁要素は大回転微小歪要素であったため、振れ変形座屈(torsion-buckling)を引き起こす幾何剛性を持たない。また、梁の変形前の基準配置における中心線座標をパラメータとしているために、変形後の現在配置の中心線座標で歪の増分を表わすことができないため、軸方向歪を対数歪とすることができない。

* 原稿受付 1995年8月11日。

*¹ 正員、三菱自動車工業(株)乗用車開発本部 (〒444 岡崎市橋目町字中新切1番地)。

そこで、さらに筆者(4)は、変形勾配テンソルを、断面の剛体回転の変換マトリックスと断面の剛体回転前の変形勾配テンソルに分解し、その変分を実行することにより、振れ変形座屈を引き起こす大歪の幾何剛性を得ることができた。さらに、筆者(5)は、渡部(6)と同じ方法、すなわち、第二ピオラ-キルヒホッフ応力をコーシー応力に変換するという方法により、Total Lagrangianによる大歪要素から、現在配置の中心線座標をパラメータとしたUpdated Lagrangianによる大歪要素を導いた。

そして、筆者(7)は、Updated Lagrangianによる大歪要素を使って、基本的な梁の3次元大変形問題を解き、宮崎(8)の理論解及びABAQUS(9)の解析解、及びB. Nour-Omid, C.C. Rankinら(10)の解析解との比較を行った。その結果、本要素は梁の3次元大変形解析が可能であることが示された。また、振れ変形座屈の固有値解析を行って、林ら(11)による理論解と比較することにより、大歪の幾何剛性が正確であることを示した。また、大回転大歪解析を行い、軸方向歪が対数歪となることを示した。さらに、筆者(12)は、線形状態からの分岐座屈、いわゆる線形座屈問題を解析し、その解析解を林ら(11)による理論解と比較した結果、大歪の幾何剛性をすべて使用した場合、座屈荷重は理論解よりも下がることを示した。この大歪の幾何剛性のことを、本研究では応力の方向のストレッチの幾何剛性と呼ぶことにする。

1.2 本研究について 客観性をもつ応力速度(stress rate)は、久田(13)により多数示されている。また、従来の研究から、構成方程式に使用する応力の定義の仕方により、接線剛性が異なることが認められた。そこで、本研究では、特殊直交群 $SO(3)$ を含んだ有限要素の定式化のために、各種の応力速度を使用して接線剛性を求め、応力速度と接線剛性の関係を明らかにする。ここで使用する応力速度は、まず、既存の応力速度として、Truesdell応力速度とJaumann応力速度、そして、新しく定義した応力速度として、Green-Naghdi応力速度に極めて近い形で定義したNeo-Green応力速度と、全く新しく定義したIshihara応力速度の合計4種類である。その結果、 $SO(3)$ の存在によって、久田(13)による3次元弾性論における接線剛性とは異なり、速度勾配テンソルの第二変分が現われることを示す。また、Ishihara応力速度を使うと、接線剛性として物質剛性と剛体回転の幾何剛性しか現われないことを示す。なお、第二報(14)では、本報で導いた一般形の接線剛性をもとに、 $SO(3)$ を含んだ梁要素の接

線剛性を構成する、剛性要素を導出する。梁要素の接線剛性の詳細な導出を示す。さらに、第三報(15)では、本報で求めた4種類の応力速度による一般形の接線剛性に、第二報(14)で求めた梁要素の剛性要素を代入し、 $SO(3)$ を含んだ梁要素の接線剛性を求める。

本報では、将来へのシェルへの拡張を考えて、一般形で接線剛性を導く。また、本報におけるテンソルの速度表示は、将来への動解析への適用を考えて、物質時間微分ではなく変分を使用する。

表1 記号表

Δ, δ : 変分 (変化速度) を表わす記号
$\hat{\Delta}$: Total Lagrangian座標系での客観的な変化率 (客観速度) を表わす記号
$\hat{\Delta}$: Updated Lagrangian座標系での客観的な変化率 (客観速度) を表わす記号
$\delta \Pi$: 内部仮想仕事(internal virtual work)
$\Delta \delta \Pi$: 接線剛性(tangent stiffness)
$\Delta \delta \Pi_T$: Truesdell応力速度による接線剛性
$\Delta \delta \Pi_J$: Jaumann応力速度による接線剛性
$\Delta \delta \Pi_G$: Neo-Green応力速度による接線剛性
$\Delta \delta \Pi_I$: Ishihara応力速度による接線剛性
$\Delta \delta \Pi_m$: 物質剛性
$\Delta \delta \Pi_{rg}$: 剛体回転の幾何剛性
$\Delta \delta \Pi_{sg, stress}$: 応力の方向のストレッチの幾何剛性
$\Delta \delta \Pi_{sg, area}$: 面の法線のストレッチの幾何剛性
$\Delta \delta \Pi_{sg, deform}$: 変形速度のストレッチの幾何剛性
F : 変形勾配テンソル(deformation gradient tensor)
T : 断面の剛体回転の変換マトリックス、 $SO(3)$
F_M : 断面の剛体回転前の変形勾配テンソル、中間配置における変形勾配テンソル
Δu : 変位の変分のベクトル
$\Delta \phi$: 回転の変分のベクトル
ΔL : 速度勾配テンソル(velocity gradient tensor)
ΔD : 変形速度テンソル(deformation rate tensor)
ΔW : スピンテンソル(spin tensor)
$\Delta \bar{L}$: ストレッチ速度テンソル(stretch rate tensor)
$\Delta \Phi$: 剛体回転スピンテンソル(rigid body spin tensor)
P : 第一ピオラ-キルヒホッフ応力テンソル(first Piola-Kirchhoff stress tensor)
S : 第二ピオラ-キルヒホッフ応力テンソル(second Piola-Kirchhoff stress tensor)
A : コーシー応力テンソル(Cauchy stress tensor)

ΔS : 第二ピオラ-キルヒホッフ応力の速度テンソル

$\hat{\Delta}A_r$: Truesdell応力速度

$\hat{\Delta}A_j$: Jaumann応力速度

$\hat{\Delta}A_G$: Neo-Green応力速度

$\hat{\Delta}A_i$: Ishihara応力速度

$E_i, i=1,2,3$: 基準配置での直交座標系のベースベクトル

$e_i, i=1,2,3$: 現在配置での直交座標系のベースベクトル

$\xi_\alpha, \alpha=1,2$: 断面内の座標

S : 基準配置での中心線座標

s : 現在配置での中心線座標

V : 基準配置での体積

v : 現在配置での体積

A : 基準配置での面積

a : 現在配置での面積

L : 基準配置での全長

l : 現在配置での全長

J : 基準配置から現在配置までの体積増加率

2. 各種の応力速度

ここでは、本論文で使用する4種類の応力速度を示す。なお、本論文におけるテンソルの速度表示は、将来への動解析への拡張を考慮して物質時間微分(material time derivative)ではなく、変分(variation)に使用する微小増分量、すなわち方向微分(directional derivative)の接ベクトル(tangent vector)を使用する。それは、物質時間微分と変分は異なるからである。ところで、本論文で表示する応力テンソルは、通常の表示と異なり、左側の成分が応力の方向成分を、右側の成分が面の法線方向成分を表わすものとする。

(a) Truesdell応力速度 Truesdell応力速度は、速度勾配テンソル ΔL と同じ変形の時速をもつ観測者から見たCauchy応力の速度である。Truesdell応力速度は次の式で定義される。

$$\hat{\Delta}A_r = \Delta A - \Delta L A - A \Delta L' + \text{tr}(\Delta L)A \quad (1)$$

また、 S の応力速度 ΔS と $\hat{\Delta}A_r$ の関係式は次の式となる。

$$\hat{\Delta}A_r = \frac{1}{J} F \Delta S F' \quad (2)$$

(b) Jaumann応力速度 Jaumann応力速度は、スピンテンソル ΔW と同量だけスピンする観測者からみたCauchy応力の速度である。Jaumann応力速度は次の式で定義される。

$$\hat{\Delta}A_j = \Delta A - \Delta W A - A \Delta W' + \text{tr}(\Delta L)A \quad (3)$$

また、Truesdell応力速度とJaumann応力速度の関係式は次の式となる。

$$\hat{\Delta}A_r = \hat{\Delta}A_j - \Delta D A - A \Delta D \quad (4)$$

(c) Neo-Green応力速度 Neo-Green応力速度は、剛体回転スピンテンソル $\Delta \Phi$ と同量だけスピンする観測者からみたCauchy応力の速度である。Neo-Green応力速度は次の式で定義される。

$$\hat{\Delta}A_G = \Delta A - \Delta \Phi A - A \Delta \Phi' + \text{tr}(\Delta L)A \quad (5)$$

また、Truesdell応力速度とNeo-Green応力速度の関係式は次の式となる。

$$\hat{\Delta}A_r = \hat{\Delta}A_G - \Delta \bar{L} A - A \Delta \bar{L}' \quad (6)$$

ここで、Neo-Green応力速度と名付けたのは、Green-Naghdi応力速度に極めて近い形をしているからである。Green-Naghdi応力速度との違いは、剛体回転スピンテンソル $\Delta \Phi$ が断面(直交フレーム)のスピン $\Delta T T'$ で定義されていることである。つまり、ここで定義した T は断面の剛体回転の変換マトリックスであり、変形勾配テンソルを右極分解したときのものではないということである。

(d) Ishihara応力速度 Ishihara応力速度は、面の法線方向には速度勾配テンソル ΔL と同じ変形の時速をもち、応力の方向には剛体回転スピンテンソル $\Delta \Phi$ と同量だけスピンする観測者からみたCauchy応力の速度である。Ishihara応力速度は次の式で定義される。

$$\hat{\Delta}A_i = \Delta A - \Delta \Phi A - A \Delta L' + \text{tr}(\Delta L)A \quad (7)$$

また、Truesdell応力速度とIshihara応力速度の関係式は次の式となる。

$$\hat{\Delta}A_r = \hat{\Delta}A_i - \Delta \bar{L} A \quad (8)$$

3. 内部仮想仕事

第一ピオラ-キルヒホッフ応力テンソル P と変形勾配テンソル F を使って、内部仮想仕事 $\delta \Pi$ が次の式で与えられる。

$$\delta \Pi = \int_V P : \delta F dV \quad (9)$$

P は対称テンソルである S との間に $P = F S$ の関係式がある。また、第二報(14)の(18)式により、変形勾配テンソルの変分 δF は $\delta F = \delta \Phi F + \delta \bar{F}$ に分解することができるので、内部仮想仕事 $\delta \Pi$ を次のように変形する。

$$\begin{aligned}
\delta\pi &= \int_V \mathbf{P} : (\delta\Phi\mathbf{F}' + \delta\bar{\mathbf{F}}) dV \\
&= \int_V [\mathbf{P}\mathbf{F}' : \delta\Phi + \mathbf{P} : \delta\bar{\mathbf{F}}] dV \\
&= \int_V [\mathbf{F}\mathbf{S}\mathbf{F}' : \delta\Phi + \mathbf{P} : \delta\bar{\mathbf{F}}] dV \\
&= \int_V \mathbf{P} : \delta\bar{\mathbf{F}} dV
\end{aligned} \quad (10)$$

ここで、内積の性質から対称テンソル $\mathbf{F}\mathbf{S}\mathbf{F}'$ と反対称テンソル $\delta\Phi$ の内積がゼロとした。

次に、ポテンシャルエネルギーの第二変分である接線剛性 $\Delta\delta\pi$ を求める。

$$\begin{aligned}
\Delta\delta\pi &= \Delta \int_V \mathbf{P} : \delta\bar{\mathbf{F}} dV \\
&= \int_V \Delta\mathbf{P} : \delta\bar{\mathbf{F}} dV + \int_V \mathbf{P} : \Delta\delta\bar{\mathbf{F}} dV
\end{aligned} \quad (11)$$

ここで、第二報(14)の(26)式により、テンソル $\delta\bar{\mathbf{F}}$ は特殊直交群 SO(3) を含んでいるため、その第二変分 $\Delta\delta\bar{\mathbf{F}}$ が存在する。次に、 $\mathbf{P}$ とコーシー応力 $\mathbf{A}$ の間に次の関係式がある。

$$\mathbf{P} = \mathbf{J}\mathbf{A}\mathbf{F}^{-1} \quad (12)$$

(12)式を使って $\Delta\mathbf{P}$ を次のように変形する。

$$\begin{aligned}
\Delta\mathbf{P} &= \Delta[\mathbf{J}\mathbf{A}\mathbf{F}^{-1}] + \mathbf{J}\Delta\mathbf{A}\mathbf{F}^{-1} + \mathbf{J}\mathbf{A}\Delta\mathbf{F}^{-1} \\
&= \mathbf{J} \left[\frac{\Delta\mathbf{J}}{\mathbf{J}} \mathbf{A} + \Delta\mathbf{A} + \mathbf{A}\Delta\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F}' \right] \mathbf{F}^{-1} \\
&= \mathbf{J} [\Delta\mathbf{A} - \mathbf{A}\Delta\mathbf{L}' + \text{tr}(\Delta\mathbf{L})\mathbf{A}] \mathbf{F}^{-1}
\end{aligned} \quad (13)$$

(13)式を使うと(11)式の右辺第一項は次の式となる。

$$\begin{aligned}
&\int_V \Delta\mathbf{P} : \delta\bar{\mathbf{F}} dV \\
&= \int_V \mathbf{J} [\Delta\mathbf{A} - \mathbf{A}\Delta\mathbf{L}' + \text{tr}(\Delta\mathbf{L})\mathbf{A}] \mathbf{F}^{-1} : \delta\bar{\mathbf{F}} dV \\
&= \int_V [\Delta\mathbf{A} - \mathbf{A}\Delta\mathbf{L}' + \text{tr}(\Delta\mathbf{L})\mathbf{A}] : \delta\bar{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} dv \\
&= \int_V [\Delta\mathbf{A} - \mathbf{A}\Delta\mathbf{L}' + \text{tr}(\Delta\mathbf{L})\mathbf{A}] : \delta\bar{\mathbf{L}} dv
\end{aligned} \quad (14)$$

また、(12)式を使うと(11)式の右辺第二項は次の式となる。

$$\begin{aligned}
\int_V \mathbf{P} : \Delta\delta\bar{\mathbf{F}} dV &= \int_V \mathbf{J}\mathbf{A}\mathbf{F}^{-1} : \Delta\delta\bar{\mathbf{F}} dV \\
&= \int_V \mathbf{A} : \Delta\delta\bar{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} dv \\
&= \int_V \mathbf{A} : \Delta\delta\bar{\mathbf{L}} dv
\end{aligned} \quad (15)$$

ストレッチ速度テンソルの第二変分 $\Delta\delta\bar{\mathbf{L}}$ を、速度勾配テンソルの第二変分 $\Delta\delta\mathbf{L}$ とする。結局、接線剛性 $\Delta\delta\pi$ は(14),(15)式より、次の式で表わすことができる。

$$\Delta\delta\pi = \int_V [\Delta\mathbf{A} - \mathbf{A}\Delta\mathbf{L}' + \text{tr}(\Delta\mathbf{L})\mathbf{A}] : \delta\bar{\mathbf{L}} dv + \int_V \mathbf{A} : \Delta\delta\bar{\mathbf{L}} dv \quad (16)$$

4. 接線剛性

4.1 Truesdell 応力速度による接線剛性 (1)式で定義される Truesdell 応力速度を(16)式に代入して、

Truesdell 応力速度を使った接線剛性を次の式で表わす。

$$\begin{aligned}
\Delta\delta\pi_T &= \int_V [\hat{\Delta}\mathbf{A}_T + \Delta\mathbf{L}\mathbf{A}] : \delta\bar{\mathbf{L}} dv + \int_V \mathbf{A} : \Delta\delta\bar{\mathbf{L}} dv \\
&= \int_V \hat{\Delta}\mathbf{A}_T : \delta\bar{\mathbf{L}} dv + \int_V \Delta\mathbf{L}\mathbf{A} : \delta\bar{\mathbf{L}} dv \\
&\quad + \int_V \mathbf{A} : \Delta\delta\bar{\mathbf{L}} dv \\
&= \int_V \hat{\Delta}\mathbf{A}_T : \delta\bar{\mathbf{L}} dv + \int_V (\Delta\Phi + \Delta\bar{\mathbf{L}})\mathbf{A} : \delta\bar{\mathbf{L}} dv \\
&\quad + \int_V \mathbf{A} : \Delta\delta\bar{\mathbf{L}} dv \\
&= \int_V \hat{\Delta}\mathbf{A}_T : \delta\bar{\mathbf{L}} dv + \int_V [\Delta\Phi\mathbf{A} : \delta\bar{\mathbf{L}} + \mathbf{A} : \Delta\delta\bar{\mathbf{L}}] dv \\
&\quad + \int_V \Delta\bar{\mathbf{L}}\mathbf{A} : \delta\bar{\mathbf{L}} dv \\
&= \Delta\delta\pi_m + \Delta\delta\pi_{rg} + \Delta\delta\pi_{sg, stress}
\end{aligned} \quad (17)$$

ここで、(17)式の最後の式の右辺第一項の $\Delta\delta\pi_m$ を物質剛性、第二項の $\Delta\delta\pi_{rg}$ を剛体回転の幾何剛性、第三項の $\Delta\delta\pi_{sg, stress}$ を応力の方向のストレッチの幾何剛性と呼ぶ。梁要素のこれらの剛性は、第二報(14)で導かれる。

これらの剛性の中で、物質剛性 $\Delta\delta\pi_m$ と応力の方向のストレッチの幾何剛性 $\Delta\delta\pi_{sg, stress}$ は仮想変位の変分 $(\delta\mathbf{u}, \delta\Phi)$ と第二の変分 $(\Delta\mathbf{u}, \Delta\Phi)$ に関して対称であるが、剛体回転の幾何剛性 $\Delta\delta\pi_{rg}$ だけは非対称である。しかし、対称化が可能で、対称化しても Newton-Raphson 法により2次の収束率が保たれることが第二報(14)で示される。

4.2 Jaumann 応力速度による接線剛性 (3)式で定義される Jaumann 応力速度を(16)式に代入して、Jaumann 応力速度を使った接線剛性を次の式で表わす。

$$\begin{aligned}
\Delta\delta\pi_J &= \int_V [\hat{\Delta}\mathbf{A}_J - \Delta\mathbf{D}\mathbf{A} - \mathbf{A}\Delta\mathbf{D} + \Delta\mathbf{L}\mathbf{A}] : \delta\bar{\mathbf{L}} dv \\
&\quad + \int_V \mathbf{A} : \Delta\delta\bar{\mathbf{L}} dv \\
&= \int_V \hat{\Delta}\mathbf{A}_J : \delta\bar{\mathbf{L}} dv + \int_V [-\Delta\mathbf{D}\mathbf{A} - \mathbf{A}\Delta\mathbf{D}] : \delta\bar{\mathbf{L}} dv \\
&\quad + \int_V \Delta\mathbf{L}\mathbf{A} : \delta\bar{\mathbf{L}} dv + \int_V \mathbf{A} : \Delta\delta\bar{\mathbf{L}} dv \\
&= \int_V \hat{\Delta}\mathbf{A}_J : \delta\bar{\mathbf{L}} dv + \int_V [-\Delta\mathbf{D}\mathbf{A} - \mathbf{A}\Delta\mathbf{D}] : \delta\bar{\mathbf{L}} dv \\
&\quad + \int_V (\Delta\Phi + \Delta\bar{\mathbf{L}})\mathbf{A} : \delta\bar{\mathbf{L}} dv + \int_V \mathbf{A} : \Delta\delta\bar{\mathbf{L}} dv \\
&= \int_V \hat{\Delta}\mathbf{A}_J : \delta\bar{\mathbf{L}} dv + \int_V [\Delta\Phi\mathbf{A} : \delta\bar{\mathbf{L}} + \mathbf{A} : \Delta\delta\bar{\mathbf{L}}] dv \\
&\quad + \int_V \Delta\bar{\mathbf{L}}\mathbf{A} : \delta\bar{\mathbf{L}} dv - \int_V [\Delta\mathbf{D}\mathbf{A} + \mathbf{A}\Delta\mathbf{D}] : \delta\bar{\mathbf{L}} dv \\
&= \Delta\delta\pi_m + \Delta\delta\pi_{rg} + \Delta\delta\pi_{sg, stress} - \Delta\delta\pi_{sg, deform}
\end{aligned} \quad (18)$$

ここで、(18)式の最後の式の右辺第四項の $\Delta\delta\pi_{sg, deform}$ を変形速度のストレッチの幾何剛性と呼ぶ。そして、梁要素のこの剛性は第二報(14)で導か

れ、対称であることがわかる。

4.3 Neo-Green応力速度による接線剛性 (5)式で定義されるNeo-Green応力速度を(16)式に代入して、Neo-Green応力速度を使った接線剛性を次の式で表わす。

$$\begin{aligned}
 \Delta\delta\pi_G &= \int_V [\hat{\Delta}A_G - \Delta\bar{L}A - A\Delta\bar{L}' + \Delta LA] : \delta\bar{L} dv \\
 &+ \int_V A : \Delta\delta\bar{L} dv \\
 &= \int_V \hat{\Delta}A_G : \delta\bar{L} dv \\
 &+ \int_V [-\Delta\bar{L}A - A\Delta\bar{L}' + (\Delta\Phi + \Delta\bar{L})A] : \delta\bar{L} dv \\
 &+ \int_V A : \Delta\delta\bar{L} dv \\
 &= \int_V \hat{\Delta}A_G : \delta\bar{L} dv + \int_V [-A\Delta\bar{L}' + \Delta\Phi A] : \delta\bar{L} dv \\
 &+ \int_V A : \Delta\delta\bar{L} dv \\
 &= \int_V \hat{\Delta}A_G : \delta\bar{L} dv + \int_V [\Delta\Phi A : \delta\bar{L} + A : \Delta\delta\bar{L}] dv \\
 &- \int_V A\Delta\bar{L}' : \delta\bar{L} dv \\
 &= \Delta\delta\pi_m + \Delta\delta\pi_{r_g} - \Delta\delta\pi_{sg,area}
 \end{aligned} \tag{19}$$

ここで、(19)式の最後の式の右辺第三項の $\Delta\delta\pi_{sg,area}$ を面の法線のストレッチの幾何剛性と呼ぶ。そして、梁要素のこの剛性は第二報(14)で導かれ、非対称であることが示される。

4.4 Ishihara応力速度による接線剛性 (7)式で定義されるIshihara応力速度を(16)式に代入して、Ishihara応力速度を使った接線剛性を次の式で表わす。

$$\begin{aligned}
 \Delta\delta\pi_I &= \int_V [\hat{\Delta}A_I - \Delta\bar{L}A + \Delta LA] : \delta\bar{L} dv \\
 &+ \int_V A : \Delta\delta\bar{L} dv \\
 &= \int_V \hat{\Delta}A_I : \delta\bar{L} dv \\
 &+ \int_V [-\Delta\bar{L}A + (\Delta\Phi + \Delta\bar{L})A] : \delta\bar{L} dv \\
 &+ \int_V A : \Delta\delta\bar{L} dv \\
 &= \int_V \hat{\Delta}A_I : \delta\bar{L} dv + \int_V \Delta\Phi A : \delta\bar{L} dv \\
 &+ \int_V A : \Delta\delta\bar{L} dv \\
 &= \int_V \hat{\Delta}A_I : \delta\bar{L} dv \\
 &+ \int_V [\Delta\Phi A : \delta\bar{L} + A : \Delta\delta\bar{L}] dv \\
 &= \Delta\delta\pi_m + \Delta\delta\pi_{r_g}
 \end{aligned} \tag{20}$$

よって、Ishihara応力速度を使った接線剛性は、物質剛性 $\Delta\delta\pi_m$ と剛体回転の幾何剛性 $\Delta\delta\pi_{r_g}$ のみとなり、ストレッチに関する幾何剛性がなくなる。従って、この接線剛性は対称化可能である。また、この接線剛性は、J.C.Simo, L.Vu-Quocら(1),(2)の接線剛性と同

形式であるが、その接線剛性は基準配置における中心線座標をパラメーターとしているのに対し、Ishihara応力速度を使った接線剛性は現在配置の中心線座標をパラメーターとしている点が異なっている。

5. 結論

(a) 特殊直交群 $SO(3)$ を含んだ有限要素の定式化のために、Truesdell応力速度とJaumann応力速度、そして、新しく定義したNeo-Green応力速度とIshihara応力速度の接線剛性を求め、応力速度と接線剛性の関係を示した。

(b) $SO(3)$ の存在によって、接線剛性の中に速度勾配テンソルの第二変分が現われる。

(c) Ishihara応力速度を使うと、接線剛性として物質剛性と剛体回転の幾何剛性しか現われない。従って、この剛性は対称化可能である。

6. 第二報(14)、第三報(15)の研究予定

6.1 第二報(14)の研究予定 本報では、4種類の応力速度を使用したときの接線剛性を一般形で求めたが、第二報(14)では、その一般形の接線剛性をもとに、 $SO(3)$ を含んだ梁要素の接線剛性を構成する剛性である、剛性要素を導出する。導出する剛性要素は、物質剛性 $\Delta\delta\pi_m$ 、剛体回転の幾何剛性 $\Delta\delta\pi_{r_g}$ 、応力の方向のストレッチの幾何剛性 $\Delta\delta\pi_{sg, stress}$ 、面の法線のストレッチの幾何剛性 $\Delta\delta\pi_{sg, area}$ と変形速度のストレッチの幾何剛性 $\Delta\delta\pi_{sg, deform}$ である。

6.2 第三報(15)の研究予定

(a) 第二報(14)で求めた梁要素の剛性要素のうち、剛体回転の幾何剛性を対称化しても、Newton-Raphson法による収束率は2次が保たれることを示す。よって、この剛性は対称化可能となる。

(b) 本報で求めた4種類の応力速度による一般形の接線剛性に、本報で求めた $SO(3)$ を含んだ梁要素の剛性要素を代入し、 $SO(3)$ を含んだ梁要素の接線剛性を求める。

(c) $SO(3)$ を含んだ定式化では、回転を有限回転として扱うため、回転を微小回転として扱った従来の3次元弾性論における接線剛性の式の一部が、速度勾配テンソルの第二変分を含んだ式に置き換わることを示す。

Appendix A

久田(13)によると、構成方程式に用いる応力速度に

は客観性(objectivity)を有することが求められている。
そこで、ここではIshihara応力速度に客観性があるかどうかを調べることにする。

まず、剛体回転する基準枠の剛体回転を Q とすると、剛体回転後の次のテンソルを Q と剛体回転前のテンソルで表示する。

$$\dot{A}^* = Q \dot{A} Q' \quad (A1)$$

$$\dot{F}^* = Q \dot{F} \quad (A2)$$

$$\begin{aligned} \Delta \dot{L}^* &= \Delta \dot{F}^* F^{*-1} \\ &= (\Delta Q \dot{F} + Q \Delta \dot{F}) F^{-1} Q' \\ &= \Delta Q \dot{Q}' + Q \Delta \dot{L} Q' \\ &= \Delta \Omega + Q \Delta \dot{L} Q' \end{aligned} \quad (A3)$$

$$\dot{T}^* = Q \dot{T} \quad (A4)$$

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\Phi}^* &= \Delta \dot{T}^* T'^* \\ &= (\Delta Q \dot{T} + Q \Delta \dot{T}) T' Q' \\ &= \Delta Q \dot{Q}' + Q \Delta \dot{T} T' Q' \\ &= \Delta \Omega + Q \Delta \dot{\Phi} Q' \end{aligned} \quad (A5)$$

(7)式より、静止する基準枠のIshihara応力速度と、剛体回転をする基準枠のIshihara応力速度を次の式で表わす。

$$\hat{\Delta} \dot{A}_I = \Delta \dot{A} - \Delta \dot{\Phi} A - A \Delta \dot{L}' + \text{tr}(\Delta \dot{L}) A \quad (A6)$$

$$\hat{\Delta} \dot{A}_I^* = \Delta \dot{A}^* - \Delta \dot{\Phi}^* A^* - A^* \Delta \dot{L}'^* + \text{tr}(\Delta \dot{L}^*) A^* \quad (A7)$$

まず、(A7)式の右辺第一項から第三項までを考える。

$$\begin{aligned} \Delta \dot{A}^* - \Delta \dot{\Phi}^* A^* - A^* \Delta \dot{L}'^* \\ &= \Delta Q \dot{A} Q' + Q \Delta \dot{A} Q' + Q A \Delta \dot{Q}' \\ &\quad - (\Delta \Omega + Q \Delta \dot{\Phi} Q') Q A Q' - Q A Q' (\Delta \Omega + Q \Delta \dot{L}' Q') \\ &= Q (Q' \Delta Q A + \Delta A + A \Delta Q' Q \\ &\quad - Q' \Delta Q A - \Delta \Phi A - A \Delta Q' Q - A \Delta L' Q') Q' \\ &= Q (\Delta A - \Delta \Phi A - A \Delta L') Q' \end{aligned} \quad (A8)$$

次に、(A7)式の右辺第四項を考える。まず、 $\text{tr}(\Delta \dot{L}^*)$ が次のようになる。

$$\begin{aligned} \text{tr}(\Delta \dot{L}^*) &= \text{tr}(\Delta \Omega + Q \Delta \dot{L} Q') \\ &= \text{tr}[Q' (\Delta \dot{L} Q')'] \\ &= \text{tr}(Q' Q \Delta \dot{L}) \\ &= \text{tr}(\Delta \dot{L}) \end{aligned} \quad (A9)$$

従って、(A7)式の右辺第四項が次のようになる。

$$\begin{aligned} \text{tr}(\Delta \dot{L}^*) A^* &= \text{tr}(\Delta \dot{L}) Q A Q' \\ &= Q (\text{tr}(\Delta \dot{L}) A) Q' \end{aligned} \quad (A10)$$

よって、(A8)式と(A10)式より、次の式が成り立つ。

$$\hat{\Delta} \dot{A}_I^* = Q \hat{\Delta} \dot{A}_I Q' \quad (A11)$$

従って、Ishihara応力速度に客観性があることがわかる。

<参考文献>

- (1) J.C.Simo, A finite strain beam formulation. The three dimensional dynamic problem. part I, Comput.Meths. Appl.Mech.Engrg.49(1985),pp55-70
- (2) J.C.Simo and L.Vu-Quoc, A three-dimensional finite-strain rod model. part II. Computational aspects, Comput.Meths.Appl.Mech.Engrg.58(1986),pp79-116
- (3) 石原昌文、梁の3次元大変形解析のための有限要素法定式化 第一報、第二報、日本航空宇宙学会誌、掲載予定
- (4) 石原昌文、有限要素法による梁の大歪モデル 第一報：Total Lagrangianによる定式化、日本航空宇宙学会誌、Vol.44, No.504(1996),pp49-55
- (5) 石原昌文、有限要素法による梁の大歪モデル 第二報：Updated Lagrangianによる定式化、日本航空宇宙学会誌、掲載決定(期日未定)
- (6) 渡部 修、有限変形における座標系の更新と変換、日本機械学会論文集A編56巻524号 (1990-4),pp883-892
- (7) 石原昌文、有限要素法による梁の大回転・大歪解析、日本機械学会論文集A編、校閲中
- (8) 宮崎康之、3次元エラスティカの研究、東京大学学位論文、1993
- (9) ABAQUS Theory Manual Version 5.2, Hibbit, Karlsson & Sorensen, Inc.
- (10) B.Nour-Omid and C.C.Rankin, Finite rotation analysis and consistent linearization using projectors, Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg. 93(1991), pp353-384
- (11) 林 編、軽構造の理論とその応用、財団法人日本科学技術連盟
- (12) 石原昌文、有限要素法による梁の座屈解析、日本航空宇宙学会誌、投稿中
- (13) 久田俊明、非線形有限要素法のためのテンソル解析の基礎、丸善、1992
- (14) 石原昌文、特殊直交群 $SO(3)$ を含んだ有限要素法定式化 第二報：梁要素の剛性要素の導出、日本機械学会論文集A編、校閲中
- (15) 石原昌文、特殊直交群 $SO(3)$ を含んだ有限要素法定式化 第三報：梁要素の接線剛性、日本機械学会論文集A編、校閲中