き裂を有するはりの大たわみ問題の境界積分方程式法による解析*

堀 辺 忠 志^{*1}Large-Deflection Analysis of Cracked Beam by Boundary
Integral Equation Method

Tadashi HORIBE

This paper is concerned with the large deflection analysis of cracked beams by the boundary integral equation method (BIEM). In the analysis, a crack is simulated by an equivalent rotational spring, which connects two segments of the beam. The BIEM formulation is applied to each segment of the beam and the resulting nonlinear boundary integral equations are solved iteratively. Numerical computations for the cracked beams under the various boundary conditions are carried out and the influences of the crack depth and location on the center deflection and the stress distribution of the beams are investigated.

Key Words: Structural Analysis, Large Deflection, Cracked Beam, Boundary Integral Equation Method, Geometrical Nonlinearity, Numerical Analysis, Compliance

1. 緒 論

き裂を有する部材の曲げに関する研究において, Okamuraらはき裂の存在による剛性の低下をき裂位置における既知のコンプライアンスを有するばねに置き換えるという一つのモデルを提案した⁽¹⁾. そしてこのモデルに基づき, これまでにき裂を有するはりの座屈問題, 固有振動数, 同定問題, 弾性挙動などに注目した研究がなされてきており^{(2)~(9)}, これらのはりの弾性挙動に及ぼすき裂の影響が明らかにされている.

本研究ではこのき裂モデルに基づき, 両端での面内変位が拘束され, 任意の位置に1個の縁き裂を有するはりが曲げ荷重を受けて大たわみ状態に至るときの変位や応力を境界積分方程式法(BIEM)を用いて解析する. 解析においては, はりの長さ方向の領域をき裂が存在する箇所を境にして二分し, それぞれの領域に対して大たわみ変形下でのBIEMを適用する. この際の解析法としては, すでに著者が提案した軸力を受けるはりの基本解を用いた定式化と反復解法とを併用する方法^{(10),(11)}を用いる. また, それぞれの領域を接続する際には, 上述のき裂の存在によるコンプライアンスの増大を考慮した手法を援用して接続条件を構成する. 最後に以上の定式化に基づいて数値計算を行い, はりの変形や応力に及ぼすき裂の影響を調べる.

Fig. 1 Schematic diagram of a beam with an edge crack

2.1 支配式 Fig.1に示すように, はりの長さ方向 $x_1 = l_1$ の位置に縁き裂を有するはりを考える. ここでき裂は, Fig.2のように長さ a , 幅 B の寸法を有し, 高さ W のはりの開口する側に位置するものとする. そして, き裂の左方および右方の諸量に関して添字 1, 2 をつけて区別する. 以後, 添字 i が付いている関係式はすべて

Fig. 2 Geometry of single edge crack

$i = 1$ および $i = 2$ の場合を考えることとする.

なお, はりのたわみを $y_i(x)$, 断面積を A , 縦弾性係数を E , 断面二次モーメントを I , スパンを l , 単位長さあたりの横荷重を $q_i(x_i)$ とし, 解析の便宜のため以下の無

* 原稿受付 1995年9月26日.

*1 正員, 茨城工業高等専門学校(〒312 ひたちなか市中根866).

次元量を導入する.

$$w_i(\xi_i) = y_i(x_i)/l, \quad \xi_i = x_i/l, \quad \delta_i = l_i/l, \\ \kappa = I/(Al^2), \quad r_i(\xi_i) = Q_i(x_i)l^3/(EI) \quad \dots\dots\dots (1)$$

さて, Fig.1 に示したはりの大たわみを考えるとき, 断面積が急変しているき裂付近では, 通常の大たわみの支配式は正確には成立しない. しかし, もしも変形中にき裂が進展しないならば, き裂を「ばね」とみなし, この「ばね」によって左右のはりが接続されているものとみなすことができる⁽¹⁾. そこで, Fig.1 に示したはりの両端の面内変位を拘束した場合の大たわみの式を無次元表示すると

$$\frac{d^4 w_i(\xi_i)}{d\xi_i^4} - \frac{1}{2\kappa^2(1 + (W/l)H_p(\zeta))} \left[\int_0^{\delta_1} \left(\frac{dw_1(\xi_1)}{d\xi_1} \right)^2 d\xi_1 \right. \\ \left. + \int_0^{\delta_2} \left(\frac{dw_2(\xi_2)}{d\xi_2} \right)^2 d\xi_2 \right] \frac{d^2 w_i(\xi_i)}{d\xi_i^2} = r_i(\xi_i) \quad \dots\dots\dots (2)$$

となる. ここで, $(W/l)H_p(\zeta)$ はき裂の存在による軸力と伸びの間のコンプライアンスの増加分に関連する項で, $H_p(\zeta)$ は後述の式(13)で与えられる.

さて, 両端の面内変位が拘束されたことによって生ずる一定の引っ張り軸力を P とし, これの無次元量を $p = Pl^2/(EI)$ として導入し, 式(2)の両辺にこの p と $d^2 w_i(\xi_i)/d\xi_i^2$ との積を加えると

$$\frac{d^4 w_i(\xi_i)}{d\xi_i^4} - p \frac{d^2 w_i(\xi_i)}{d\xi_i^2} = r_i(\xi_i) \\ - \left[p - \frac{1}{2\kappa^2(1 + (W/l)H_p(\zeta))} \left\{ \int_0^{\delta_1} \left(\frac{dw_1(\xi_1)}{d\xi_1} \right)^2 d\xi_1 \right. \right. \\ \left. \left. + \int_0^{\delta_2} \left(\frac{dw_2(\xi_2)}{d\xi_2} \right)^2 d\xi_2 \right\} \right] \frac{d^2 w_i(\xi_i)}{d\xi_i^2} \quad \dots\dots\dots (3)$$

となる. 従って, この p が

$$\kappa^2 p (1 + (W/l)H_p(\zeta)) = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{\delta_1} \left(\frac{dw_1(\xi_1)}{d\xi_1} \right)^2 d\xi_1 \right. \\ \left. + \int_0^{\delta_2} \left(\frac{dw_2(\xi_2)}{d\xi_2} \right)^2 d\xi_2 \right\} \quad \dots\dots\dots (4)$$

の関係を満たせば式(2)と式(3)は等価である. 式(4)は, 曲げによる軸線の伸びと引っ張りによる軸線の伸びとが等しくなることを要請する式である.

2.2 境界積分方程式の誘導 $\delta(\xi_i, \eta_i)$ をデルタ関数とし, p を任意の値として,

$$\frac{d^4 w_i^*(\xi_i, \eta_i)}{d\xi_i^4} - p \frac{d^2 w_i^*(\xi_i, \eta_i)}{d\xi_i^2} = \delta(\xi_i, \eta_i) \quad \dots\dots\dots (5)$$

により定義される基本解 $w_i(\xi_i, \eta_i)$ を導入する. そして式(5)を式(3)の両辺に掛け, 通常行われている境界積分方程式の定式化の手順に従うと

$$w_i(\eta_i) = \left[q(\xi_i) w_i^*(\xi_i, \eta_i) \right]_0^{\delta_1} - \left[m(\xi_i) t_i^*(\xi_i, \eta_i) \right]_0^{\delta_1} \\ + \left[t(\xi_i) m_i^*(\xi_i, \eta_i) \right]_0^{\delta_1} - \left[w(\xi_i) q_i^*(\xi_i, \eta_i) \right]_0^{\delta_1} \\ + \int_0^{\delta_1} r_i(\xi) w_i(\xi_i, \eta_i) d\xi_i \\ - \int_0^{\delta_1} \left[p - \frac{1}{2\kappa^2(1 + (W/l)H_p(\zeta))} \left\{ \int_0^{\delta_1} \left(\frac{dw_1(\xi_1)}{d\xi_1} \right)^2 d\xi_1 \right. \right. \\ \left. \left. + \int_0^{\delta_2} \left(\frac{dw_2(\xi_2)}{d\xi_2} \right)^2 d\xi_2 \right\} \right] \frac{d^2 w_i(\xi_i)}{d\xi_i^2} w_i^*(\xi_i, \eta_i) d\xi_i \quad \dots\dots\dots (6)$$

となる. ここで,

$$\left. \begin{aligned} q_i(\xi_i) &= -\frac{d^3 w_i(\xi_i)}{d\xi_i^3} + p \frac{dw_i(\xi_i)}{d\xi_i} \\ m_i(\xi_i) &= -\frac{d^2 w_i(\xi_i)}{d\xi_i^2} \\ t_i(\xi_i) &= \frac{dw_i(\xi_i)}{d\xi_i} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (7)$$

と表すことにする. さらに式(6)を η_i に関して微分すると, $\tilde{w}_i^*(\xi_i, \eta_i) = w_i^*(\xi_i, \eta_i)/d\eta_i$ などと記して

$$t_i(\eta_i) = \left[q(\xi_i) \tilde{w}_i^*(\xi_i, \eta_i) \right]_0^{\delta_1} - \left[m(\xi_i) \tilde{t}_i^*(\xi_i, \eta_i) \right]_0^{\delta_1} \\ + \left[t(\xi_i) \tilde{m}_i^*(\xi_i, \eta_i) \right]_0^{\delta_1} - \left[w(\xi_i) \tilde{q}_i^*(\xi_i, \eta_i) \right]_0^{\delta_1} \\ + \int_0^{\delta_1} r_i(\xi) \tilde{w}_i^*(\xi_i, \eta_i) d\xi_i \\ - \int_0^{\delta_1} \left[p - \frac{1}{2\kappa^2(1 + (W/l)H_p(\zeta))} \left\{ \int_0^{\delta_1} \left(\frac{dw_1(\xi_1)}{d\xi_1} \right)^2 d\xi_1 \right. \right. \\ \left. \left. + \int_0^{\delta_2} \left(\frac{dw_2(\xi_2)}{d\xi_2} \right)^2 d\xi_2 \right\} \right] \frac{d^2 w_i(\xi_i)}{d\xi_i^2} \tilde{w}_i^*(\xi_i, \eta_i) d\xi_i \quad \dots\dots\dots (8)$$

が得られる. ここに式(6), (8)中の $t_i^*(\xi_i, \eta_i)$ などは式(7)の右辺の $w_i(\xi_i)$ を $w_i^*(\xi_i, \eta_i)$ と置き換えて得られるものとする.

2.3 き裂位置での接続条件 2.1節で述べたように $\xi_1 = \delta_1$ の位置のき裂の存在をモーメントと回転角(たわみ角)あるいは軸力と伸びとの間のコンプライアンスの増加で評価するモデルを導入する. これによれば, き裂位置 $\xi_1 = \delta_1$ (または $\xi_2 = 0$) でたわみ, 曲げモーメント, せん断力は連続であると考え, すなわち

$$w_1(\delta_1) = w_2(0), \quad m_1(\delta_1) = m_2(0), \quad q_1(\delta_1) = q_2(0) \quad \dots (9)$$

他方, き裂位置でのたわみ角の差が「ばね」の回転角に等しいものとする. これを式で表すと

$$\frac{dy_1(l_1)}{dx_1} - \frac{dy_2(0)}{dx_2} = \Delta\lambda_M \left(\frac{a}{W} \right) M_1 + \Delta\lambda_{PM} \left(\frac{a}{W} \right) P \quad \dots (10)$$

となる. ここで M_1 はき裂位置での曲げモーメント, P は引っ張り軸力であり, $\Delta\lambda_M(a/W)$, $\Delta\lambda_{PM}(a/W)$ および $\Delta\lambda_P(a/W)$ は, 以下の式で表されるコンプライアンスの増加分である.

$$\Delta\lambda_M \left(\frac{a}{W} \right) = \frac{2}{E'} \int_0^A \left(\frac{K_M}{M} \right)^2 dA = \frac{12}{E' BW^2} H_M \left(\frac{a}{W} \right), \\ \Delta\lambda_{PM} \left(\frac{a}{W} \right) = \frac{2}{E'} \int_0^A \left(\frac{K_P}{P} \frac{K_M}{M} \right) dA = \frac{1}{E' BW} H_{PM} \left(\frac{a}{W} \right), \\ \Delta\lambda_P \left(\frac{a}{W} \right) = \frac{2}{E'} \int_0^A \left(\frac{K_P}{P} \right)^2 dA = \frac{1}{E' B} H_P \left(\frac{a}{W} \right) \quad \dots\dots\dots (11)$$

ここに ν をポアソン比として、 $E' = E/(1-\nu^2)$ 、 A はき裂面積、 K_M 、 K_P はそれぞれ純曲げおよび一様引っ張りに対する応力拡大係数である。また、軸力 P に対するコンプライアンスの増加分 $\Delta\lambda_P(a/W)$ も同時に示した。 K_M 、 K_P を有限幅補正関数 Y_M, Y_P を用いて

$$K_M = M \frac{6\sqrt{\pi a}}{BW^2} Y_M(a/W), \quad K_P = P \frac{\sqrt{\pi a}}{BW} Y_P(a/W) \quad (12)$$

と表すと、 $\zeta = a/W$ として、式 (11) 中の H_M などは

$$H_M(\zeta) = 6 \int_0^\zeta \zeta Y_M^2(\zeta) d\zeta, \quad H_P(\zeta) = 2\pi \int_0^\zeta \zeta Y_P^2(\zeta) d\zeta, \\ H_{PM}(\zeta) = 12\pi \int_0^\zeta \zeta Y_P(\zeta) Y_M(\zeta) d\zeta \quad (13)$$

と表される。ここで、式 (13) の H_M, H_P, H_{PM} は $a/W = 0$ 、 $a/W = 1$ の位置でそれぞれ ζ^2 、 $1/(1-\zeta)^2$ のオーダーで漸近する。そこで、これらの漸近項を分離して式 (13) を表示すると、 $0 \leq a/W \leq 1$ の全て範囲で表現が可能となるために都合がよい⁽⁹⁾。さらに、この漸近項の分離のほかに $\zeta = 0$ 、 $\zeta = 1$ で大きさが 1 になるように係数部分を調整すると

$$H_M(\zeta) = \frac{3.773}{(1+2\zeta)^2(1-\zeta)^2} \zeta^2 H'_M(\zeta), \\ H_P(\zeta) = 3.951 \frac{\zeta^2}{(1-\zeta)^2} H'_P(\zeta), \\ H_{PM}(\zeta) = \frac{23.71}{(1+2\zeta)(1-\zeta)^2} \zeta^2 H'_{PM}(\zeta) \quad (14)$$

を得る。本研究では、次式 (15) で示す高精度な近似補正関数⁽¹²⁾を用い、Gauss の数値積分によって式 (14) の H'_M, H'_P, H'_{PM} を評価した。この結果を Fig.3 に示す。

Fig. 3 Compliance function

$$Y_M(\zeta) = \sqrt{\{2 \tan(\pi\zeta/2)\}/(\pi\zeta)} \\ \times \frac{0.923 + 0.199\{1 - \sin(\pi\zeta/2)\}^4}{\cos(\pi\zeta/2)}, \\ Y_P(\zeta) = \sqrt{\{2 \tan(\pi\zeta/2)\}/(\pi\zeta)} \\ \times \frac{0.752 + 2.02\zeta + 0.37\{1 - \sin(\pi\zeta/2)\}^3}{\cos(\pi\zeta/2)} \quad (15)$$

以上の結果より、式 (10) を無次元化して表すと

$$\frac{dw_1(\delta_1)}{d\xi_1} - \frac{dw_2(0)}{d\xi_2} = \frac{W}{l} H_M(\zeta) m_1(\delta_1) \\ + \frac{1}{12} \left(\frac{W}{l}\right)^2 H_{PM}(\zeta) p \quad (16)$$

となる。ここに $m_1(\delta_1)$ はき裂位置の無次元曲げモーメントである。一方で、軸力 p による伸び λ_p は、

$$\lambda_p = \kappa^2 p \left(1 + \frac{W}{l} H_P(\zeta)\right) \quad (17)$$

で計算される。

以上より、式 (6)、(8) において、 $\eta_i \rightarrow 0+\varepsilon$ 、 $\eta_i \rightarrow \delta_i-\varepsilon$ (ε は微小な正の数) と極限操作を行って得られる 8 個の式と式 (10)、(16) の接続条件の 4 個の式、合わせて 12 個の独立な式を得る。しかし、境界条件を与えても、軸力 p が式 (4) を満たさぬ限り、式 (6)、(8) のそれぞれの右辺の最後の項のために解を定めることができない。そこで、以下のような数値的に安定な反復法を用いる⁽¹⁰⁾。

2.4 反復解法 式 (6)、(8) のそれぞれの右辺の最後の項は、任意の引っ張り軸力 p が式 (4) の関係を満たせば消失して解を得ることができる。これを実現する反復法を以下に説明する。

(1) 解析に必要な諸量および任意の引っ張り軸力 p_i を入力する。

(2) 式 (6)、(8) のそれぞれの右辺の最後の内点のたわみ角を含んだ積分項を除いて解を求める。このことは引っ張り軸力 p_i を受けるはりの曲げ問題を境界積分方程式で解くことに等しい。

(3) たわみに基づく軸線の伸び λ_r と軸力 p_i に基づく軸線の伸び λ_p を次式で求める。

$$\lambda_r = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{\delta_1} \left(\frac{dw_1(\xi_1)}{d\xi_1} \right)^2 d\xi_1 + \int_0^{\delta_2} \left(\frac{dw_2(\xi_2)}{d\xi_2} \right)^2 d\xi_2 \right\} \\ \lambda_p = \kappa^2 p_i \left(1 + \frac{W}{l} H_P(\zeta)\right) \quad (18)$$

ここで式 (18) の第 1 式の被積分項は、式 (8) の右辺の最後の項を除いた式を用いて計算する。なお、この項の積分には Gauss の積分公式を用いる。

(4) $\lambda_r \neq \lambda_p$ なら引っ張り軸力を

$$p_i \leftarrow p_i + \frac{\lambda_r - \lambda_p}{2\kappa^2(1 + (W/l)H_P(\zeta))} \quad (19)$$

と更新し、(2) ~ (4) を繰り返す。この反復の間に λ_r と λ_p とが接近してくるので $\lambda_r = \lambda_p$ となったときに結果を出力する。

2.5 基本解 式 (5) によって定義した基本解を以下に示す。ただし $\rho_i = |\xi_i - \eta_i|$ とする。

$$\left. \begin{aligned} w_i^*(\xi_i, \eta_i) &= \frac{1}{2p} \left[-\frac{\sinh \sqrt{p}(\delta_i - \rho_i)}{\sqrt{p} \cosh \sqrt{p}\delta_i} + \delta_i - \rho_i \right], \\ t_i^*(\xi_i, \eta_i) &= \frac{\operatorname{sgn}(\xi_i, \eta_i)}{2p} \left[-\frac{\cosh \sqrt{p}(\delta_i - \rho_i)}{\cosh \sqrt{p}\delta_i} - 1 \right], \\ m_i^*(\xi_i, \eta_i) &= \frac{1}{2\sqrt{p}} \frac{\sinh \sqrt{p}(\delta_i - \rho_i)}{\cosh \sqrt{p}\delta_i}, \\ q_i^*(\xi_i, \eta_i) &= -\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\xi_i, \eta_i) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

基本解の微分量については次式が成り立つ.

$$\left. \begin{aligned} \tilde{w}_i^*(\xi_i, \eta_i) &= -t_i^*(\xi_i, \eta_i), \\ \tilde{t}_i^*(\xi_i, \eta_i) &= m_i^*(\xi_i, \eta_i), \\ \tilde{m}_i^*(\xi_i, \eta_i) &= -q_i^*(\xi_i, \eta_i) + p t_i^*(\xi_i, \eta_i), \\ \tilde{q}_i^*(\xi_i, \eta_i) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (21)$$

3. 数値解析と結果

3.1 荷重と中央変位の関係 これまでに示した解析手順に従って計算プログラムを作成し、これによって数値解析した主な結果を以下に示す. なお、軸方向の伸びに関する繰り返し計算においては $|(\lambda_r - \lambda_p)/\lambda_p| < 1 \times 10^{-6}$ を収束基準と設定した. λ_r を求めるための式(18)の第一式の積分は Gauss の 16 点数値積分公式によって評価した. また、Fig.2 のような断面を考えると κ は $\kappa = W/(\sqrt{12}l)$ で与えられる. 横荷重としては等分布荷重 q_0 および中央集中荷重 Q を受ける場合を考え、以下の無次元荷重を用いた.

$$r_0 = \frac{q_0 l^3}{EI}, \quad r_{c0} = \frac{Q l^2}{EI} \quad \dots\dots\dots (22)$$

Fig. 4 Center deflection of simply supported beam with an edge crack under uniform load for different value of r_0

Fig.4およびFig.5は、き裂位置を $\delta_1 = 0.5$ と一定にし、等分布荷重 r_0 を受ける両端支持はり(以下、図中に(S-S)などと略記する)および両端固定はり(C-C)の無次元化

Fig. 5 Center deflection of clamped beam with an edge crack under uniform load for different value of r_0

したはりの高さ W/l と無次元中央変位 y_c/l との関係を示した図である. これらの図においては、き裂深さ a/W も同時に 0.0, 0.5 と変化させている. W/l が大きいと軸方向の剛性が低下しその結果たわみが増加することが示されている.

Fig. 6 Center deflection of simply supported beam with an edge crack under uniform load for different value of r_0

Fig. 7 Center deflection of clamped beam with an edge crack under uniform load for different value of r_0

Fig.6およびFig.7は、 $W/l = 0.04$ のもとで、き裂位置を $\delta_1 = 0.5$ と一定にし、等分布荷重 r_0 を受ける両端支持はり(S-S)および両端固定はり(C-C)のき裂深さ a/W と無次元中央変位 y_c/l との関係を荷重 r_0 をパラメータとして示した図である。これらの図より、き裂深さ a/W が0.4より大きくなると急激に剛性が低下していく様子を読み取ることができる。

Fig.8とFig.9は r_{c0} を受ける場合の荷重と中央変位の関係を示した図で、Fig. 8が両端支持、Fig.9が両端固定の場合であり、変形の進行による曲げ剛性の増大の様子が示されている。

Fig. 8 Center deflection of simply supported beam with an edge crack under concentrated load for different value of a/W

Fig. 9 Center deflection of clamped beam with an edge crack under concentrated load for different value of a/W

Fig.10およびFig.11はき裂深さ a/W を0.5と一定にし、き裂位置 δ_1 をパラメータとして両端支持はりおよび両端固定はりの荷重と中央変位との関係を示した図であり、 δ_1 のたわみに及ぼす影響が明らかにされている。

3.2 曲げモーメントおよび軸力 き裂の存在はコンプライアンスの増加だけではなく内力の再配分をもた

Fig. 10 Center deflection of simply supported beam with an edge crack under concentrated load for different value of δ_1

Fig. 11 Center deflection of clamped beam with an edge crack under concentrated load for different value of δ_1

Fig. 12 Bending moment of clamped beam with an edge crack under concentrated load for different value of a/W

らす。以下、曲げモーメントおよび軸力の分布を示す。

Fig. 13 Bending moment of clamped beam with an edge crack under concentrated load for different value of a/W

Fig. 14 Axial force of clamped beam with an edge crack under concentrated load for different value of r_{c0}

Fig. 15 Axial force of clamped beam with an edge crack under uniform load for different value of r_0

Fig.12, Fig.13は集中荷重 r_{c0} および等分布荷重 r_0 を受

ける (C-C) はりの荷重と固定部 ($\xi_1 = 0$) での無次元曲げモーメント m_0 の関係を示した図である。

Fig.14, Fig.15は r_{c0} および r_0 を受ける (C-C) はりのき裂深さと無次元軸力 p の関係を示した図である。これらの図より、き裂深さ a/W が小さい場合には内力の再配分の程度があまり大きなものではないことがわかる。これは、微小変形理論に基づいて行った Baluch らの解析結果⁽⁶⁾ と同様な傾向である。

4. 結 論

以上を要約すると次の結論を得る。

(1) き裂を有するはりの大たわみ問題を境界積分方程式法に基づいて解析する手順を示した。

(2) いくつかの具体的な計算例を示し、はりの変位や応力へ及ぼすき裂の影響を明らかにした。

最後に、本研究に対し終始変わらぬ励ましを与えてくださった上野誠元茨城高専教授に深く謝意を表します。

文 献

- (1) Okamura, H., Liu, H. W., Chu, C. S., and Liebowitz, H., A Cracked Column under Compression, *Eng. Fract. Mech.*, **1**(1969), pp.547-564.
- (2) 岡村ほか1名, コンプライアンス概念による線形破壊力学の拡張と応用(第1報), *機論*, **41**-348,(1975), pp.2238-2246.
- (3) Okamura, H. and Watanabe, K., Deformation and Strength of Cracked Member under Bending Moment and Axial Force, *Eng. Fract. Mech.*, **7**(1975), pp.531-539.
- (4) Anifantis, N. and Dimarogonas, A., Stability of Columns with a Single Crack Subjected to Follower and Vertical Loads, *Int. J. Solids Struct.*, **19**-4(1983), pp.281-291.
- (5) Tharp T. M., A Finite Element for Edge-cracked Beam Columns, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **24**(1983), pp.1941-1950.
- (6) Baluch, M. H. and Azad, A. K., Flexure of Statically Indeterminate Cracked Beams, *J. of Eng. Mech.*, **111**-12(1984), pp.1535-1539.
- (7) Rizos, P. F. and Aspragathos, N., Identification of Crack Location and Magnitude in a Cantilever Beam from the Vibration Modes, *J. Sound Vib.*, **138**-3(1990), pp.381-388.
- (8) Qian G. L., Gu S. N. and Jiang J. S., The Dynamic Behaviour and Crack Deflection of a Beam with a Crack, *J. Sound Vib.*, **138**-2(1990), pp.233-243.
- (9) Narkis, Y., Identification of Crack Location in Vibrating Simply Supported Beams, *J. Sound Vib.*, **172**-4(1994), pp.549-558.
- (10) 堀辺, 横荷重と軸力を受けるはりの積分方程式法による解析と大たわみ問題への応用, *機論*, **51**-472,A (1985), pp.2823-2828.
- (11) 堀辺, 不均質はりの大たわみ問題の積分方程式法による解析(第1報), *機論*, **52**-482,A (1986), pp.2404-2409.
- (12) 岡村, 線形破壊力学入門, (1976), pp.217, 培風館.