順応形 Shifted Integration 法によるはりおよび 骨組の衝撃崩壊挙動の有限要素解析*

都 井 裕*¹, 斉 藤 秀 雄*²

Finite Element Analysis of Impact Collapse Behaviors of Beams and Frames by Adaptively Shifted Integration Technique

Yutaka TOI and Hideo SAITO

The adaptively shifted integration (ASI) technique is applied to the finite element analysis of dynamic collapse behaviors of impulsively loaded fully clamped beams and framed structures subjected to support excitation. The ASI technique is based on the equivalence conditions of standard beam elements and computational discontinuum mechanics models. Numerical integration points for evaluation of an element stiffness matrix are adaptively shifted to optimum positions, depending on the elastic or plastic state of the element. The highest computational efficiency and accuracy can be expected using the ASI technique for the finite element analysis of large-scale frames. The solutions given by the finite element methods with and without the ASI technique are compared to show the validity of the proposed technique.

Key Words: Structural Analysis, Impact Strength, Plasticity, Finite Element Method, Dynamic Collapse, Beams, Frames, Adaptively Shifted Integration Technique

1. 序

著者の一人である都井らは、骨組構造の非線形有限要素解析における smart algorithm として、順応形 Shifted Integration 法 (以下 ASI 法と呼ぶ) と称する新しい計算アルゴリズムを開発し、骨組構造の塑性崩壊問題^{(1)~(4)}、弾塑性座屈問題⁽⁵⁾などの静的崩壊問題、ステップ荷重による動的崩壊問題⁽⁶⁾⁽⁷⁾などに応用し、計算効率、計算精度上の本手法の有効性を実証してきた。

本手法は、有限要素解析における剛性マトリックス評価のための数値積分点位置を有限要素の弾塑性性状に応じて最適な位置へシフトすることにより、最小限の要素数で高精度の弾塑性有限要素解を求める手法である。塑性変形時の最適積分点位置は塑性ヒンジ発生点位置から求め、線形 Timoshenko はり要素および Bernoulli-Euler の仮定に基づく三次はり要素における関係式は、それらの有限要素のひずみエネルギー近似式と、回転ばねにより結合された剛体棒より成る

物理モデルの変形エネルギー式の等価性を考察することにより導出されている⁽¹⁾⁽²⁾。

本研究で用いる三次はり要素では、剛性マトリックス評価のための数値積分点位置と物理的な塑性ヒンジ発生点位置 (または物理的応力評価点位置) の関係式として、次式が求められている⁽¹⁾⁽²⁾。

$$r_i = \mp 1 / (3s_i) \quad (i=1, 2; s_1 = -s_2) \quad \cdots \cdots (1)$$

ここに、 s_i と r_i はそれぞれ図 1 に示されているように、三次はり要素における数値積分点位置と塑性ヒンジ発生点位置を要素の両端を ± 1 とした無次元座標系で表したものである。この関係式に基づいて数値積分点をシフトすることにより、塑性ヒンジ形成時の折れ曲りを伴う不連続な変形機構を有限要素法の枠内で厳密に表現することができることが ASI 法の特長であり、このことにより最高度の計算精度および計算効率が達成される。

本研究では、横衝撃荷重を受けるはりの弾塑性曲げ波伝ば (すなわち塑性ヒンジの移動) を伴う衝撃崩壊問題、および地震荷重のような支持点加振を受ける骨組構造の動的弾塑性崩壊問題の有限要素解析に ASI 法を適用し、その効果について考察する。

* 原稿受付 1995 年 12 月 11 日。

*¹ 正員、東京大学生産技術研究所 (〒106 東京都港区六本木 7-22-1)。

*² 富士通 (株) 計算科学研究センター (〒261 千葉県美浜区中瀬 1-9-3)。

2. 順応形 Shifted Integration 法の適用

2章では、動的弾塑性問題の有限要素解析に ASI 法を適用する手順について説明する。

有限要素法により離散化された増分形の要素運動方程式は、次式のように表される。

$$[m]\{\Delta \ddot{u}\} + [k]\{\Delta u\} = \{\Delta f\} \quad (2)$$

ここに、 $[m]$, $[k]$, $\{\Delta \ddot{u}\}$, $\{\Delta u\}$, $\{\Delta f\}$ はそれぞれ、質量マトリックス、接線剛性マトリックス、節点加速度増分、節点変位増分、節点外力増分である。

三次はり要素が弾性変形状態または除荷状態にある場合は、ガウス積分点が最適な積分点位置であり、最も良好な線形解が得られる。したがって、この場合の接線剛性マトリックス $[k]$ は二点積分公式により次式のように表される。

$$[k] = (L/2) \{ [B(-1/\sqrt{3})]^T [D_e(-1/\sqrt{3})] [B(-1/\sqrt{3})] + [B(1/\sqrt{3})]^T [D_e(1/\sqrt{3})] [B(1/\sqrt{3})] \} \quad (3)$$

ここに、 $[B(s_i)]$ は積分点位置 s_i における微小変形理論に基づく一般化ひずみ・節点変位マトリックス、 $[D_e(r_i)]$ は物理的応力評価点位置 r_i における断面力・一般化ひずみマトリックスである。 s_i がガウス積分点に位置する場合には、式(1)より応力評価点も同じ点に位置していることに注意されたい。

一般化ひずみ増分 $\{\Delta \epsilon(r_i)\}$ および断面力増分 $\{\Delta \sigma(r_i)\}$ は次式により計算される。

$$\{\Delta \epsilon(\pm 1/\sqrt{3})\} = [B(\pm 1/\sqrt{3})] \{\Delta u\} \quad (4)$$

× NUMERICAL INTEGRATION POINT
● ROTATIONAL SPRING CONNECTING RIGID BARS (PLASTIC HINGE)

Fig. 1 Locations of numerical integration points and plastic hinges in a cubic beam element

$$\{\Delta \sigma(\pm 1/\sqrt{3})\} = [D_e(\pm 1/\sqrt{3})] \{\Delta \epsilon(\pm 1/\sqrt{3})\} \quad (5)$$

要素内の断面力増分の分布は次式のような形で求められる。

$$\{\Delta \sigma(s)\} = [T_1(s)] \{\Delta \sigma(-1/\sqrt{3})\} + [T_2(s)] \{\Delta \sigma(1/\sqrt{3})\} \quad (6)$$

塑性ヒンジの発生位置 $-r_2$ または r_2 は、式(6)を足し込んだ新たな断面力分布を用い、最初に降伏条件を満足する点の座標値として決定される。すなわち、

$$F(\{\sigma(-r_2)\}) = 0 \quad (7 \cdot a)$$

または

$$F(\{\sigma(r_2)\}) = 0 \quad (7 \cdot b)$$

ここに、 $F(\{\sigma\})$ は断面力成分により定義される降伏関数である。

要素のある断面が塑性化後、または再降伏後は式(1)に従い、積分点が $s_i = \mp(1/3r_2)$ の位置にシフトされる。すなわち、増分形の要素運動方程式は

$$[m]\{\Delta \ddot{u}\} + [k]\{\Delta u\} = \{\Delta f\} \quad (8)$$

ここに、

$$[k] = (L/2) \{ [B(-1/3r_2)]^T [D_e(-r_2)] [B(-1/3r_2)] + [B(1/3r_2)]^T [D_p(r_2)] [B(1/3r_2)] \} \quad (9)$$

と表される。ここでは塑性ヒンジは r_2 の位置に発生していると仮定している。ひずみおよび断面力増分は

$$\{\Delta \epsilon(\pm r_2)\} = [B(\pm 1/3r_2)] \{\Delta u\} \quad (10)$$

$$\{\Delta \sigma(-r_2)\} = [D_e(-r_2)] \{\Delta \epsilon(-r_2)\} \quad (11 \cdot a)$$

$$\{\Delta \sigma(r_2)\} = [D_p(r_2)] \{\Delta \epsilon(r_2)\} \quad (11 \cdot b)$$

と計算される。さらに、 $-r_2$ の位置に二つめの塑性ヒンジが発生した場合は、式(9)および式(11・a)の $[D_e(-r_2)]$ も $[D_p(-r_2)]$ に置き換えられる。なお、質量マトリックスは弾性変形、塑性変形時ともに同じ分布質量マトリックスを仮定し、時間方向の数値積分スキームとしては、Newmark の β 法 ($\beta=1/4$) を用いる。

上述の計算においては、ひずみ・節点変位マトリックス $[B(s_i)]$ 中の数値積分点が要素の弾塑性性状に応じ順応的にシフトされることのみが、通常の変位形有限要素解析と異なる計算手順であり、既存のプログラムに対するインプリメンテーションの極めて容易な計算手法であることがわかる。

3. 両端固定はりの横衝撃崩壊解析

図2に示すような、両端を固定したアルミニウム製矩形断面はり数体に矩形分布(一様分布)および三角形分布の初期速度場を与えた場合の動的弾塑性応答を解

析した。

表1に、解析した6体のはりの形状パラメータ (B : 幅, H : 深さ, $2L$: 全長) と初期速度場 (V_0 : 初期速度の最大値) を示す。材料定数 (E : ヤング率, ρ : 密度, σ_0 : 降伏応力) は以下のとおりである。

$$E = 7.24 \times 10^{10} \text{ [Pa]}$$

$$\rho = 2.68 \times 10^3 \text{ [kg/m}^3\text{]}$$

$$\sigma_0 = 3.40 \times 10^8 \text{ [Pa]}$$

降伏条件として

$$F(M) = (M/M_0)^2 - 1 = 0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

を仮定した。ここに、 M は曲げモーメント, M_0 は全断面塑性モーメントを意味する。

図3および図4にそれぞれ, No.2 および No.5 のはりの中央点横たわみの時刻歴に関する解析結果を示す。比較のために両試験体とも, ASI 法による有限要素解析および数値積分点をつねにガウス積分点においた通常の有限要素解析(以後, 通常法と呼ぶ)の結果を示した。図中の要素数は, はり全体の要素分割数である。また図5に, 両試験体の変形図および塑性ヒンジ

Table 1 Dimensions and initial velocities of beams

No.	B (mm)	H (mm)	2L (mm)	explosive shape	V_0 (m/sec)	λ
1	9.527	5.098	127.1	rect- angular	57.35	36.32
2	9.530	5.088	127.2	rect- angular	47.02	24.53
3	9.533	5.070	127.2	rect- angular	40.61	18.45
4	9.530	5.095	127.1	rect- angular	35.69	14.09
5	9.505	5.100	127.1	triangular	52.93	13.74
6	9.543	5.083	127.1	triangular	59.89	17.70

Fig. 2 Beam with clamped ends under impulsive loading

(a) ASI technique

(b) Conventional method

Fig. 3 Time-history of central deflection of a beam (No. 2)

(a) ASI technique

(b) Conventional method

Fig. 4 Time-history of central deflection of a beam (No. 5)

位置の時間変化を示す。

これらの解析結果から、両試験体はおおよそ次のような衝撃崩壊挙動を示していることがわかる。すなわち、初期の過渡的段階において、No.5 のはりでは両端および中央に発生する位置の固定された塑性ヒンジ、No.2 のはりではさらに曲げ波の伝ばに伴い両端から中央に向かって伝ばする塑性ヒンジにより、内部塑性仕事として、はりに与えられた運動エネルギーの一部が吸収され、永久横たわみが発生する。残りの運動エネルギーは弾性ひずみエネルギーとの相互変換を繰返すことにより、その後の定常的な振動を引き起こす。

図3に示すNo.2のはりに対する変位解を見ると、通常法では収束解を得るために16要素程度を要しているのに対し、ASI法を用いると4要素程度でほぼ十分な解が得られていることがわかる。この相違は以下のように説明される。すなわち通常法においては、塑性ヒンジが数値的にも物理的にも要素内のガウス積分点位置にのみ発生することになり、はりの両端および中央点に発生すべき塑性ヒンジを正確に表現すること

ができない。その理由により収束解を得るために多数の要素分割を要する結果となるが、ASI法を用いれば塑性ヒンジの発生位置を厳密にコントロールすることが可能であるため、解の収束性が大幅に改善される。

ASI法を用いれば、2要素分割でもはりの両端および中央点に発生するヒンジを正しく表現できるが、図3(a)の2要素解は著しく小さい変位を与えている。これは初期速度場が正確に与えられていないことに起因している。すなわち、No.2のはりの初期速度場は矩形分布であり、有限要素解析の初期条件として各節点に同じ初期速度を与えることになるが、2要素分割でははりの中央節点のみに初期速度が与えられ両端では速度零となるので、三角形のような初期速度分布となる。このため、初期条件としてははりに与えられる運動エネルギー量が過小評価され、変位解が著しく低減されたものと解釈される。

図4に示すNo.5のはりの変位解においても、収束解を得るために、通常法では16要素程度を要するのに対し、ASI法は4要素程度でほぼ良好な解を与えている。主たる理由は、試験体No.2の場合と同様にASI法でははりの両端と中央点における塑性ヒンジが正確に表現されるためである。この問題では初期速度分布が三角形であり、2要素分割でも正確に近似される。したがって、図4(a)に示す2要素解は、図3(a)の場合のような大きな誤差を含まない。

図6では、初期運動エネルギーとはりの永久横たわみの関係について、表1に示した全6体のはりに対する有限要素解析結果を、文献(8)の実験結果および微小変形を仮定した剛塑性理論解析解と比較している。初期運動エネルギーは $\lambda = \rho V_0^2 L^2 / M_0$ と定義される無次元量であり、永久横たわみ(深さ H で除した無次元値)はASI法による最多要素解の定常振動時における最大変位値と最小変位値の中央値として評価した。構

(a) Specimen No. 2 (16 elements)

(b) Specimen No. 5 (16 elements)

Fig. 5 Deformations and plastic hinges of beams

Fig. 6 Initial kinetic energies versus maximum permanent deflections of beams

造減衰などを考慮すればそのあたりの値で振動が停止すると予測されるからである。

図6を見ると、ASI法による有限要素解は剛塑性理論解と良好に対応しているが、若干小さい永久横たわみ値を与えていることがわかる。これは、剛塑性理論解析では弾性変形によるひずみエネルギーが無視されており、与えられた運動エネルギーがすべて内部塑性仕事として費やされることになるためである。また、初期運動エネルギー値が小さい範囲では、これらの解析結果と実験結果は良好に一致しているが、衝撃エネルギーが大きくなるほど両者の差が拡大している。これは明らかに有限要素解析および剛塑性理論解析において無視されている有限変形の影響である。

4. 柱と骨組の支持点加振崩壊解析

図7, 8, 9に示す片持柱, 平面骨組, 立体骨組の支持点が水平方向に振幅 A , 周期 T で正弦波加振されたときの弾塑性応答を解析した⁽⁹⁾。それぞれの構造物に対し、共振点を避けて設定した2ケースの周期および

Fig. 7 Cantilever column under support excitation

Fig. 8 Plane frame subjected to support excitation

振幅を用いて解析を行った。

骨組解析においては2方向の曲げ変形にさらに軸変形およびねじり変形が重畳するが、いずれに対しても線形の形状関数を仮定した。また、降伏条件は、

12WF53	12WF40
$E = 2.07 \times 10^{11} [Pa]$	$E = 2.07 \times 10^{11} [Pa]$
$\nu = 0.3$	$\nu = 0.3$
$\sigma_y = 2.27 \times 10^8 [Pa]$	$\sigma_y = 2.27 \times 10^8 [Pa]$
$\rho = 7.84 \times 10^3 [kg/m^3]$	$\rho = 7.84 \times 10^3 [kg/m^3]$
$M_{x0} = 3.106 \times 10^5 [N \cdot m]$	$M_{x0} = 2.312 \times 10^5 [N \cdot m]$
$M_{y0} = 1.089 \times 10^5 [N \cdot m]$	$M_{y0} = 6.264 \times 10^4 [N \cdot m]$
$N_0 = 2.287 \times 10^6 [N]$	$N_0 = 1.728 \times 10^6 [N]$

Fig. 9 Space frame subjected to support excitation

Fig. 10 Time-history of deflection of a cantilever column (Case 1)

$$F(M_x, M_y, N, M_z) = (M_x/M_0)^2 + (M_y/M_0)^2 + (N/N)^2 + (M_z/M_0)^2 - 1 = 0 \dots \dots \dots (13)$$

とした。ここに、 M_x, M_y, N および M_z はそれぞれ、 x 軸まわりの曲げモーメント、 y 軸まわり曲げモーメント、軸力およびねじりモーメントである。下添字の 0 は、各断面力成分が単独で部材断面に作用した場合の全断面塑性値を意味する。

4・1 片持柱 図 10 と図 11 に、図 7 の片持柱に対する解析結果、すなわち自由端におけるたわみ(剛性変位分を除く)の時刻歴を示す。図 10 と図 11 では支持点加振の周期と振幅が異なっており、ケース 1 の加振周期は片持柱の一次固有周期(0.00481 s)より長く、ケース 2 では短い。それぞれ、ASI 法による有限要素解析結果と数値積分点をつねにガウス積分点位置に固定した通常の有限要素解析(以後、通常法と呼ぶ)の結果が示されている。図中の要素数は片持柱全体の要素分割数である。矢印は最初に部材断面が降伏した瞬間を示し、数値は要素分割数を意味している。

ケース 1、ケース 2 とも、最初に片持柱の支持点(固定端)で降伏が起こり、その後は加振に応じて除荷と再降伏挙動を繰返している。ケース 1 の変位解は、

(a) ASI technique

(b) Conventional method

Fig. 11 Time-history of deflection of a cantilever column (Case 2)

ASI 法では 2 要素程度、通常法では 4 要素程度でほぼ収束している。またケース 2 では、ASI 法が 1 要素、通常法が 4 要素程度でほぼ良好な解を与えており、いずれのケースにおいても ASI 法による解が通常法よりも少ない要素分割数で収束していることがわかる。ASI 法では数値積分点をシフトすることにより、支持点に生じた塑性ヒンジを正確に表現しているため少ない要素分割数でも収束したと考えられる。通常法では数値積分点がつねにガウス積分点に位置し、物理的にもガウス積分点の位置にしか塑性ヒンジを発生させることができない。したがって、要素分割数を十分に増やすことにより、支持端要素のガウス積分点を支持点に十分近付けなければ、解が収束しなかったものと考えられる。

ASI 法では、1 要素分割でも支持点の塑性ヒンジを正確に表現できるが、ケース 1 の結果を見ると 1 要素分割の結果は収束解との隔たりが大きい。この理由は以下のように考えられる。すなわち、はりの支持点が降伏し負荷(load)状態にあっても、1 有限要素内には降伏断面の塑性変形と分布慣性力による弾性変形が共存しなければならない。しかしながら、数値積分点をガウス積分点からシフトしてしまうと、その有限要素の弾性変形に対する精度が低下するため全体として若干精度が悪くなったと考えられる。塑性変形の進展が著しく、弾性変形が塑性変形に対して無視できるほど小さい場合には、全体の精度への影響が小さくなると考えられる。実際に解析結果を見てみると、ケース 1 では支持点の降伏後、塑性変形があまり進展しないうちに除荷が起こっているため、弾性解の誤差の影響が大きくなり 1 要素分割解の精度が低下したと考えられる。逆に、ケース 2 では降伏後の塑性変形の進展が大きいので弾性解の誤差の影響は少なく、1 要素分割でも比較的精度のよい解が得られたものと考えられる。

4・2 平面骨組 図 12 と図 13 に、図 8 に示した平面骨組における変位 u (剛体変位を除く)の時刻歴を示す。ケース 1 の加振周期は平面骨組の三次固有周期(0.103 s)に近く、ケース 2 の加振周期は六次固有周期(0.0272 s)に近い。ケース 1、ケース 2 とも、最初に柱の支持点で降伏が起こり、その直後に柱とはりの結合部が降伏する。その後は加振に応じて除荷と降伏挙動を繰返している。

ケース 1 の変位解では ASI 法が 2 要素程度、通常法が 4 要素程度、またケース 2 では ASI 法が 1 要素、通常法が 4 要素程度でほぼ良好な解を与えており、どちらのケースにおいても ASI 法による解が通常法よりも少ない要素分割数で収束していることがわかる。

(a) ASI technique

(a) ASI technique

(b) Conventional method

(b) Conventional method

Fig. 12 Time-history of displacement of a plane frame (Case 1)

Fig. 14 Time-history of displacement of a space frame (Case 1)

(a) ASI technique

(a) ASI technique

(b) Conventional method

(b) Conventional method

Fig. 13 Time-history of displacement of a plane frame (Case 2)

Fig. 15 Time-history of displacement of a space frame (Case 2)

ASI 法では片持柱の場合と同様に、支持点および部材結合部に発生した塑性ヒンジが正確に表現されるため、少ない要素分割数で収束する結果となる。また、ケース 1 では要素分割解が他の解と大きく隔たっているが、原因は片持柱の場合と同様に、降伏直後・除荷以前の弾性変形に対する誤差の影響によるものと考えられる。

4・3 立体骨組 図 14 と図 15 に、図 9 で示した立体骨組における変位 u (剛体変位を除く) の時刻歴を示す。ケース 1 の加振周期は立体骨組の一次固有周期 (0.0805 s) に近く、ケース 2 では三次固有周期 (0.0584 s) よりやや小さい。

ケース 1 では、最初に図 8 における手前の 2 本の柱の支持点が降伏し、少し遅れて後ろの柱の支持点が降伏する。その後、除荷と再降伏を繰り返す間に柱の上部とはりの結合部が降伏する。ケース 2 では、最初にケース 1 同様、手前の柱、後ろの柱の順で支持点が降伏し、支持点の塑性変形の進行途上(負荷状態)で柱の上部とはりの結合部が降伏する。その後は加振に応じて除荷と再降伏を繰り返す。

ケース 1 およびケース 2 の変位解は、両者とも ASI 法が 2 要素程度、通常法が 4 要素程度でほぼ良好な結果となっており、ASI 法が通常法よりも少ない要素分割数で収束していることがわかる。ASI 法では片持柱の場合と同様に、支持点および部材結合部にできた塑性ヒンジを正確に表現しているため、少ない要素分割数で収束した。また、ケース 1 およびケース 2 の 1 要素分割による変位解の誤差が比較的大きいが、原因は片持柱の場合と同様に降伏直後の弾性解の誤差の影響によるものと考えられる。特にケース 2 の場合には、

柱の支持点が降伏してから柱の上端が降伏するまで時間差が大きく、この間の弾性変形に対する誤差の影響が大きいと考えられる。

5. 結 言

本研究では、横荷重を受ける両端固定はりおよび支持点加振を受ける骨組構造の弾塑性衝撃応答問題について、ASI 法と通常法による有限要素解析結果を比較した。その結果、どちらの問題についても解析条件に依存せず、ASI 法が通常法よりも少ない要素分割数で精度のよい解が得られることを実証した。特に、弾性変形に比べ塑性変形の卓越するケースにおいては、ASI 法による有限要素解析が高精度の解を与えることが判明した。

文 献

- (1) 都井裕, 日本造船学会論文集, 第 168 号, (1990), 357-369.
- (2) Toi, Y., *Int. J. Num. Methods Eng.*, **31** (1991), 1537-1552.
- (3) 都井裕・磯部大吾郎, 日本造船学会論文集, 第 171 号, (1992), 363-371.
- (4) Toi, Y. and Isobe, D., *Int. J. Num. Methods Eng.*, **36** (1993), 2323-2339.
- (5) 都井裕・磯部大吾郎, 日本造船学会論文集, 第 174 号, (1993), 469-477.
- (6) 都井裕・磯部大吾郎, 日本造船学会論文集, 第 175 号, (1994), 299-306.
- (7) Toi, Y. and Isobe, D., *Comput. Struct.*, **58** (1996), 947-955.
- (8) Jones, N. and Wierzbicki, T., *Int. J. Mech. Sci.*, **18** (1976), 533-542.
- (9) 河島佑男, コンピュータによる構造工学講座, II-4-A, (1972), 35-37, 培風館.