境界要素法の研究動向*

神 谷 紀 生^{*1}

Some Recent Developments in Boundary Element Research

Norio KAMIYA

Some of recent developments in Boundary Element Methods (BEMs) are overviewed, specifically stressing on the following four intrinsic research items in the boundary element and/or integral equation methods: (1) Transformation of domain integral to corresponding boundary integral; (2) Hypersingular integral and its regularization; (3) Error analysis and adaptive elements; (4) Tools for the inverse analysis.

Key Words: Boundary Element Method, Transform of Domain Integral to Boundary Integral, Hypersingular Integral, Regularization, Adaptive Mesh, Inverse Analysis

1. はじめに

境界要素法(BEM)のもとになる考えは、ポテンシャル論として、あるいは微分方程式の解を Green 関数によって積分表示する方法として、古くから知られていた(例えば、文献^{(1)~(4)})。数値解析法として、研究が集中的に行われたのは 1975 年以後の約 20 年間であると思われる。計算科学、計算工学の主要な手段として、有限要素法(FEM)の有効性に触発された活発な研究はその本質的問題に及んでいる。

BEM の本質は次の 2 点である:

- (i) 積分方程式を用いた方法,
- (ii) 境界だけを要素に分ける方法.

これらは FEM との本質的違いであって、方法の特徴を際立たせている。(i), (ii) はまったく独立なものであるというわけではなく、互いに関連をもつ。積分方程式が境界だけで定式化されるとき(ii)が実現され、したがってその結果として解析空間の次元が下がって、そのとき FEM における空間離散化の手間が大幅に軽減される。ただし、積分方程式の定式化に領域積分が含まれるときは、領域の離散化が避けられない。この場合は、FEM が変分原理、エネルギー法などを基にしているのに対して、BEM は積分方程式を基にしている、という違いだけで、どちらも全空間を離散化することが必要である。このようなときにこそ、どちらを使うべきか、方法の真価がためされることになろう。BEM は領域内で微係数の解析的表示が可能であることなどの利点をもつが、上記の点は現在のところ

結論がでていない。

ここでは BEM の特徴に関する項目のうちのおもなものとして、以下の 4 項目を挙げて最近の研究動向を簡単に解説する。

- (1) 領域積分の境界積分への変換⁽⁵⁾⁽⁶⁾
- (2) 超特異積分と正則化⁽⁷⁾⁽⁸⁾
- (3) 誤差解析とアダプティブ要素⁽⁹⁾
- (4) 逆解析手法としての境界要素法⁽¹⁰⁾

2. 領域積分の境界積分への変換

BEM の基本的利点である境界だけの扱いは、線形・同次問題に限られる。しかしながら、非同次項が特別の形で与えられるとき、Green の公式などの積分定理を用いて、それを含む領域積分は厳密に境界積分に変換できる。その代表例は、静的弾性問題についてよく知られており、一定の物体力が作用する場合、回転による遠心力をうける場合および定常熱応力問題である。これらを統一的に扱う方法も知られている。

一般の場合、すなわち非同次項に未知数が現れる場合、非線形項がある場合をも含めて、近似的方法が開発された。以下では、境界 Γ で囲まれた領域 Ω において、Laplace 方程式の非同次形である Poisson 方程式について説明する(なお記号は通常の教科書⁽¹⁾に用いられているものによる)。

(1) 二重相反法(dual reciprocity method): 直接法境界要素法の境界積分方程式が、基本解と積分定理(あるいは、力学問題ではこれらは相反定理(reciprocal theorem, reciprocity)と呼ばれることがある)を用いて定式化されることに関連して、再度相反関係を用いるためにこの名がつけられた方法である。スカラポテンシャル u に関する次の Poisson 方程式

* 原稿受付 1996 年 7 月 31 日.

^{*1} 正員, 名古屋大学情報文化学部(〒464-01 名古屋市千種区不老町).

$$\nabla^2 u(x) = b(x) \quad (x \in \Omega) \quad (1)$$

の非同次項 b を次のように近似する。

$$b = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j f_j \quad (2)$$

ここで、この近似を実現するためには、境界要素の節点のほかに追加の境界点 (N 個) および内点 (L 個) が必要になる。 f はこの近似のためにとられる関数であり、 r を 2 点の距離として、例えば影響関数的に

$$f = 1 + r \quad (3)$$

などと仮定する。ただし、 α は係数である。すなわち、式 (2)、(3) は非同次項の値をいくつかの境界点と内点によって近似的に表示すること(言い替えれば、多数の点での値による内挿)を意味している。ただし、式 (3) に対応して、 f について

$$\nabla^2 \bar{u}_j = f_j \quad (4)$$

を満たす関数 u_j をとる。このように表した非同次項を含む領域積分を境界積分に変換すれば、次の離散式を得る。

$$Hu - Gq = (H\bar{u} - G\bar{q})f^{-1}b \quad (5)$$

支配方程式が比較的簡単な作用素で与えられる問題では、式 (4) を満たす関数 u_j が簡単に求められるので、この方法は有効に使える。式 (3) の与え方、および追加の内点、境界点のとり方について自由度があり、複雑な問題ではそれが結果に影響する。

なお、以上示した方法は、非同次問題の解を同次解と非同次解に分けて扱う通常の微分方程式の解法において、非同次解を別に決定する方法と本質的には差がないので、特解積分法 (particular integral method) と呼ばれることがある。

(2) 多重相反法 (multiple reciprocity method) : この方法は上記の方法と違って、相反関係を順次繰返し用いるもので、多重の用語がつけられている。このためには、次のような関係を満たす高次基本解を用いる。

$$\nabla^2 u^{(j+1)} = u^{(j)} \quad (6)$$

ただし、Laplace 方程式の基本解は

$$u^{(0)} = u^* \quad (7)$$

である。これに対して、非同次項は次のようにする。

$$b = b^{(0)}, \quad b^{(j+1)} = \nabla^2 b^{(j)} \quad (8)$$

式 (6)、(8) からわかるように、領域積分に現れる基本解は積分されたものを用い、反対に非同次項は微分された表示を用いることになる。このように基本解の利用の仕方は、もちろん高次基本解が求められることが必要な条件であるが、一般に特異性が下がる利点がある。したがって、非同次項と基本解の積の領域積分は次のようになる。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} b u^* d\Omega &= \int_{\Gamma} (u^{*(1)} w^{(0)} - q^{*(1)} b^{(0)}) d\Gamma \\ &+ \int_{\Omega} u^{*(1)} b^{(1)} d\Omega \\ &= \sum_j \int_{\Gamma} (u^{*(j+1)} w^{(j)} - q^{*(j+1)} b^{(j)}) d\Gamma \\ &+ \int_{\Omega} u^{*(j+1)} b^{(j+1)} d\Omega \quad (9) \end{aligned}$$

ただし

$$w^{(j)} = \frac{\partial b^{(j)}}{\partial n} \quad (10)$$

式 (9) において、右辺にはひとつの領域積分が残されるが、これが十分小さくなれば無視できると考える。したがって、離散式は次のように境界だけの関係になる。

$$H^{(0)}u - G^{(0)}q = \sum_j (H^{(j+1)}b^{(j)} - G^{(j+1)}w^{(j)}) \quad (11)$$

明らかに、式 (9) が収束するとき限りこの方法が正しいものになる。したがって、収束性が保証される必要があり、しかもそれが高いときに有効に利用できる。Laplace, Helmholtz 作用素、あるいは線形弾性力学の問題はこの方法が適用できることが示されている。

3. 超特異積分と正則化

BEM は、元来、特異性のある基本解を用いた境界積分方程式に基づいているために、特異積分を正しく計算できないと、精度の高い解は期待されない。これは数値解析に特有の現象であって、境界要素法を用いて解析を行ったとき、境界に近い場所での解析精度に問題がみられたことは広く知られている。境界要素法の解は一般に、データ依存性が他の数値解析法よりも敏感であるようである。

またしばしば、これらの境界積分方程式を微分した式が必要になることがある。例えば、重調和方程式に関する問題では、境界変数のこの配を用いる必要があるし、さらに境界での応力や最適化問題、逆問題の解析における種々の感度計算にもこれらが現れる。このようにして得られる積分方程式は超特異積分方程式となる。この計算は離散化に用いる境界要素の連続性と関連して検討されている。超特異積分方程式の数値的計算法は、特異積分を含まないように正則化する方法、Cauchy の主値のオーダまで正則化する方法、あるいは直接数値的に扱う方法などである(詳しい解説が文献(7)にある)。

例として、直接法による Laplace 方程式の境界積分方程式は次のように変形できる。

$$\int_{\Gamma} q(y') u^*(x, y') d\Gamma(y') - \int_{\Gamma} [u(y') - u(x)] q^*(x, y') d\Gamma(y') = 0 \quad (x \in \Omega) \quad \dots\dots\dots (12)$$

この式は、左辺の第2項の積分において $x=y'$ のときに零になる項を掛けた形になっており、その結果特異性が軽減されている。内点 x を境界点 y に近づけた極限においても成立し、しかも q^* を含む積分も通常の意味の積分として計算できることになる。

式(12)を最適化問題に用いるとき、これを設計変数について微分すれば次のようになる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \dot{q}(y') u^*(x, y') d\Gamma(y') + \int_{\Gamma} q(y') \dot{u}^*(x, y') d\Gamma(y') \\ & + \int_{\Gamma} q(y') u^*(x, y') d\Gamma(y') - \int_{\Gamma} [\dot{u}(y') - \dot{u}(x)] q^*(x, y') d\Gamma(y') \\ & - \int_{\Gamma} [u(y') - u(x)] \dot{q}^*(x, y') d\Gamma(y') \\ & - \int_{\Gamma} [u(y') - u(x)] q^*(x, y') d\Gamma(y') = 0 \quad \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

ここで、上付きの点が設計変数に関する微分を表す。 u^*, q^* の微分により方程式の特異性が増大することが懸念されるが、このとき特異性のオーダーは元のままに保たれることがわかっている。

また、特異積分、あるいはソース点、計算すべき点の位置が境界に近いときにみられる近特異積分の精度よい計算を行う方法が種々考案されている。

4. 誤差解析とアダプティブ要素

特異積分や連立方程式を精度よく計算することのほかに、BEM 解析結果の精度、信頼性に大きい影響を及ぼすものが、要素の大きさとその配置(要素分布)および要素のグレード(要素の内挿次数)である。この点は、離散要素を利用する方法として、FEM と BEM の宿命的課題である(したがって、メッシュフリー法などの新しい解法が提案されるようになってきた)。

あらかじめ行った解析に基づき、(事後)誤差評価を行って要素配置やグレードを変更する方法が、アダプティブメッシュあるいはアダプティブ要素と呼ばれる。単純に要素を十分細かくすれば、精度の高い解が得られるはずだという理論は正しいものではない。場所によって解の精度は異なるし、またアダプティブな変更のほうが誤差の減少が早いからである。FEM では、この研究は理論的にもまたソフトウェアへの実際の組込みもかなり進展している。この点に関して、BEM ではいくつかの難点が見られる。例えば、選点法による BEM の解の精度、収束性に関する数学理論

が確立されていないこと、直接法では混合形の定式化を行っているので、次元の異なる誤差が生じ、一般にはそれらを直接に比較できないこと(したがって、無次元化のために適当な定数が用いられる)、などがおもなものである。

誤差の評価には、高次補間との差、細分化解との差、要素間不連続量などを用いるもの、あるいは積分方程式の残差を誤差に代わる基準として用いるものなどがある。これらの誤差に関してさまざまなノルム(関数空間と誤差を評価する空間が一定していない)が検討されている。現在のところ、これらはおもに FEM において考えられたり、用いられたものを流用しているか、あるいは数値実験的に妥当性が検討されているに過ぎない。また別の考えとして、境界要素解が個々の要素の大きさだけでなく、全体的な要素分布、あるいはそれらの誤差が全体として影響しあうことを考え、残差への要素誤差の影響の度合を要素グレードアップの目安とする方法もある。

グレードアップには、要素の細分化(h 法)、内挿次数の増大(p 法)、要素配置の全体的変更(r 法)およびそれらの組合せ法など、FEM で用いられているものと同様な方法がとられている。要素の変更はすなわち、リメッシングそのものである。したがって、FEM では大きい困難が付きまとう。このときにも要素の空間の次元が低いことはリメッシングに対して極めて有利である。

BEM を有効な計算ツールとして確立し、ブラックボックスとして利用できるようになるためには、適切な誤差評価、解の収束性の保証、そしてアダプティブリメッシュ法の確立が切望される。

5. 逆解析手法としての境界要素法

いわゆる逆問題の解析は、FEM や BEM のような有効な数値解析手段が発達したことによって、注目されるようになった。これによって決定されるものは、材料の物性パラメータ、外部作用、欠陥などの位置や大きさ、あるいはシステム全体などさまざまである。従来から広く行われていた非破壊検査を数値的に行おうとすることに対応する。

BEM は、境界だけの要素分割で問題を解くことができ、境界値が正しく計算できること、メッシングおよびリメッシングが容易なこと、実験データが対象外部あるいは表面上で与えられることが多いなどの理由から、逆解析の手段として適している。さらに音響、各種波動現象に対して、開領域を BEM が FEM よりも容易に、しかも正確に扱うことができる点も強調さ

れる。

逆解析は通常、あらかじめ想定した状態から反復計算を行う。その際の問題は、不適切性とその正則化、解の一意性、反復計算の収束性、数値モデルとして目的関数や制約条件をどのようにとればよいかなどである。研究が進展するとともに、確率的手法の利用、あるいはその一部である最適化における手法の利用など、有効な方法が種々提案されるようになってきた。

6. おわりに

BEMの最近の研究の進展における主要点を解説した。BEMをFEMの対極として捉えるのではなく、主要な数値解析手法として、それぞれの特徴を知り、そのうえでより効果的な利用が望ましいと考える。

BEMのソフトウェアは、音響、波動、電磁場などの個々のソフトウェアを除けば、FEMと違って極めて限られている。多数のソフトウェアの中から選択できる状況が望ましい。

CAD(Computer Aided 'Drawing')とCAE(Computer Aided Engineering)のソフトウェアの状況は今新たな方向を示し始めている。すなわち、CAEソフトウェアのCAD(Computer Aided 'Design')ソフトウェアへの取り込みである。CADの'D'が本来あるべき定義に戻りつつある。このような状況では、FEMやBEMはよりブラックボックス化されるので、方法

としてのより高いロバスト性が要請される。

なお、BEMに関する出版物は極めて多いので、ここでは個々の原著論文の代わりに、その内容を包括的に示している図書、叢書を数点挙げるにとどめる。BEMの最近の研究論文のリストは、文献(11)にみられる。

文 献

- (1) プレビア, C. A. (神谷紀生・田中正隆・田中喜久昭訳), 境界要素法入門, (1980), 培風館.
- (2) 境界要素法研究会編, 境界要素法の理論と応用, (1986), コロナ社.
- (3) 神谷紀生, 境界要素法の基礎, 文献(2)の1-22ページ.
- (4) 登坂宜好・矢川元基編, 計算力学—計算力学と境界要素法—, (1992), 養賢堂.
- (5) Partridge, P. W., Brebbia, C. A. and Wrobel, L. C., *The Dual Reciprocity Boundary Element Method*, (1992), Comp. Mech. Pub.
- (6) Nowak, A. J. and Neves, A. C.編, *The Multiple Reciprocity Boundary Element Method*, (1994), Comp. Mech. Pub.
- (7) Tanaka, M., Sladek, V. and Sladek, J., Regularization technique applied to boundary element methods, *Appl. Mech. Rev.*, 47, (1994), 457-499.
- (8) 田中正隆・松本敏郎, 境界要素法の高精度化と感度解析への応用, 文献(4)の1-19ページ.
- (9) 神谷紀生編, コンピュートロール, 特集: ソフトウェアの誤差評価とアダプティブ要素, No.42, (1993), コロナ社.
- (10) 久保司郎, 逆問題, (1992), 培風館.
- (11) *Boundary Element Reference Database/Diskette*, (1995), Comp. Mech. Pub.