古典板理論に基づく一般積層長方形板の力学解析プログラム*

成 田 吉 弘^{*1}, 福 士 賢 一^{*2}Analysis Program for Generally Laminated Rectangular Plates
Based on the Classical Plate Theory

Yoshihiro NARITA and Kenichi FUKUSHI

A computer program was developed to deal with a wide range of structural problems of generally laminated FRP rectangular plates. It covers problems of static bending, elastic buckling and free vibration. The analysis uses the Ritz method which is based on the classical plate theory, and a unified solution is derived to accommodate arbitrary support conditions (any combinations of classical boundary conditions, elastic point supports and elastic foundation) and loading conditions (in-plane and out-of-plane loads). Numerical examples are given for symmetric cross-ply and antisymmetric angle-ply laminated graphite/epoxy plates. Convergence study is presented by increasing the number of terms in the present solutions, and the effectiveness of the present method is well demonstrated by comparison with exact solutions and finite element solutions.

Key Words: Computer Code, Generally Laminated Plates, Rectangular Plates, Composite Material, Ritz Method, Static Bending, Stress Analysis, Elastic Buckling, Free Vibration

1. は し が き

近年, 宇宙航空分野をはじめとして, さまざまな工業分野において構造物の軽量化が進められている。繊維強化プラスチック (FRP) 材料は, 高い比強度と比剛性をもち, その利用の拡大は著しいものがあるが, 従来の金属系材料と異なり強い異方性をもつ。このため, それに起因する複雑な力学的特性を設計上把握する必要があり, 複合材料の平板の応力解析, 振動, 座屈解析について活発な研究がなされてきた^{(1)~(5)}。しかし, 従来の研究では特定の積層形態や境界条件に限定して取り扱ったものが多く, 有限要素法をのぞくと, 静解析から動的問題までを統一的に扱うことのできる解と計算方法を提案した報告は見られない。

本研究では, 古典板理論を用いて非対称な積層を含め, 一般的な積層状態の FRP 長方形板を扱う。とくに種々の支持条件(境界条件の任意の組合せ・弾性点支持・弾性基礎)と荷重条件(面外の集中・等分布荷重, 面内荷重)を考慮した, 静的解析(静的曲げ)と固有値解析(弾性座屈, 自由振動)を統合した一般的方法を提案

する。はじめに板のひずみエネルギーと各弾性支持要素がもつ弾性エネルギー, 各荷重による外力の系への仕事と運動エネルギーなど求める。次に幾何学的境界条件を自動的に満足する変位関数を, エネルギー式から得られる汎関数に導入する。その変位関数中の未定係数により汎関数を極小化することによって, 未定係数に関する連立一次方程式を導く。この方程式を解くことにより, 一般的な積層長方形板の静たわみ量と応力分布, 座屈荷重値や固有振動数などを求めることができる。本研究では, その解を基に COMPLAT (COMposite PLATe analysis program) と称する解析コードを開発した。計算例において, 項数による解の収束状況を示し, 他の解析方法による結果との比較を行いその有用性を示す。

2. 理 論 解 析

2・1 古典板理論によるエネルギー式の導出 図 1 に示すように L 枚のラミナで積層された長方形平板を考える(説明のため厚さ方向を拡大してある)。板の寸法を $a \times b \times h$ とし, 座標系 $O-xyz$ の原点 O を板の中心にとる。また x, y, z 方向の変位をそれぞれ u, v, w で表す。ここで中央面から, 第 k 層めの上面, 下面までの距離をそれぞれ z_k, z_{k-1} とする。また, 材料主

* 原稿受付 1996 年 3 月 18 日。

^{*1} 正員, 北海道工業大学 (〒006 札幌市手稲区前田 7-15)。^{*2} 学生員, 北海道工業大学大学院。

軸となる繊維方向に1軸, xy 面上の繊維と垂直方向に2軸をとり, x 軸と1軸のなす角度を θ_k とする。

積層板の第 k 層めについての応力-ひずみ関係式は

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (1)$$

となる。ここで $\bar{Q}_{ij}$ は縦弾性係数とせん断弾性係数およびポアソン比からなる弾性定数 Q_{ij} を z 軸回りに変換した値である^{(3)~(5)}。変位は古典板理論, すなわちキルヒホッフの仮定「変形前に中央面に垂直な平面は, 変形後も中央面に垂直な平面となる」に従うとする

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial x} \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial y} \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

と表される。ここで, u_0, v_0, w_0 は板の中央面での変位を表す。いま式(2)を微小ひずみを示す工学ひずみの式に代入すると, 変位-ひずみ関係式は

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

となる。以上の式(1)~(3)から積層板の弾性ひずみエネルギーを表すことができる。

$$U_p = \frac{1}{2} \iint_A \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \kappa \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \kappa \end{Bmatrix} dA \dots\dots\dots (4)$$

ただし

Fig. 1 Coordinate system and dimensions of laminated rectangular plate

$$\left. \begin{aligned} \{\varepsilon\} &= \left\{ \frac{\partial u_0}{\partial x} \quad \frac{\partial v_0}{\partial y} \quad \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right\}^T \\ \{\kappa\} &= \left\{ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \quad -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right\}^T \\ [A] &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \\ [B] &= \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \\ [D] &= \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

となる。ここで A_{ij} は伸縮剛性, B_{ij} は伸縮と曲げの連成剛性, D_{ij} は曲げ剛性であり, 次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^L \int_{z_{k-1}}^{z_k} \bar{Q}_{ij} dz \quad (i, j=1, 2, 6) \\ B_{ij} &= \sum_{k=1}^L \int_{z_{k-1}}^{z_k} \bar{Q}_{ij} z dz \quad (i, j=1, 2, 6) \\ D_{ij} &= \sum_{k=1}^L \int_{z_{k-1}}^{z_k} \bar{Q}_{ij} z^2 dz \quad (i, j=1, 2, 6) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

図2(a)に示すように境界に沿って, 自由と単純支持, 単純支持と固定の間の弾性支持も対象とする。すなわち板の端部に沿って u_0, v_0, w_0 に対する分布並進ばね(ばね剛性 k_{ij})と, w_0 のこう配に対する分布回転ばね(ばね剛性 k_{ir})を考える。このとき, それぞれのばねに蓄えられる弾性エネルギーは

$$U_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \int_{S_i} \left\{ k_{i1} u_0^2 + k_{i2} v_0^2 + k_{i3} w_0^2 \right.$$

Fig. 2 Boundary conditions and elastic supports of laminated rectangular plate

$$+k_{ir}\left(\frac{\partial w_0}{\partial n_i}\right)^2 dS_i \dots\dots\dots (7)$$

と表される。ここで i は長方形板の辺 ($i=1\sim 4$: 順に左辺, 下辺, 右辺, 上辺) を示し, j はそれぞれの拘束の対象 ($j=1\sim 3$: 順に u_0, v_0, w_0) で, S_i, n_i は各辺に沿った線座標とその直角方向座標を表す。また図 2(b), (c) に示す, 集中ばね(弾性点支持)の剛性を $k_c^{(i)}$, 等分布ばね(弾性基礎)の剛性を k_d とすると, それぞれのばねに蓄えられる弾性エネルギーは

$$U_s = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^I k_c^{(i)} w_0^2 + \frac{1}{2} \iint_A k_d w_0^2 dA \dots\dots\dots (8)$$

となる。ここで I は集中ばねの個数を表す。以上の式 (4), (7), (8) により, 積層板と各弾性支持要素に蓄えられる弾性エネルギーの総和は

$$U = U_p + U_e + U_s \dots\dots\dots (9)$$

となる。

次に, 図 3(a) に示す板の面外方向の集中荷重を $F_c^{(j)}$, 等分布荷重を F_d とすると, それぞれの外力の系への仕事は

$$W_f = \sum_{j=1}^J F_c^{(j)} w_0 + \iint_A F_d w_0 dA \dots\dots\dots (10)$$

となる。ここで J は集中荷重の数を表す。また, 図 3(b) に示すように, 面内方向の垂直荷重を N_x, N_y , せん断荷重を N_{xy} としたとき, 外力の系への仕事は

$$W_b = \frac{1}{2} \iint_A \left\{ N_x \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + N_y \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right\} dA \dots\dots\dots (11)$$

となる。以上の式により外力の系への仕事の総和は

$$W = W_f + W_b \dots\dots\dots (12)$$

となる。次に自由振動の運動エネルギーは, u_0, v_0, w_0 を振幅とした場合に, 次式のように表すことができる。

$$T = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \iint_A (u_0^2 + v_0^2 + w_0^2) dA \dots\dots\dots (13)$$

Fig.3 Loading conditions on laminated rectangular plate

ここで ρ は積層板の単位面積当たりの平均密度, ω は角振動数である。

解析の簡単化のため, 得られたエネルギー式を以下に示す無次元量を用いて書き直す。

$$\xi = 2x/a, \eta = 2y/b \quad (\text{無次元座標})$$

$$\alpha = a/b, \beta = a/h \quad (\text{寸法比})$$

$$\bar{u} = u/h, \bar{v} = v/h, \bar{w} = w/h \quad (\text{無次元変位})$$

$$a_{ij} = \frac{a^2}{D_0} A_{ij}, b_{ij} = \frac{a}{D_0} B_{ij}, d_{ij} = \frac{1}{D_0} D_{ij} \quad (\text{剛性比})$$

$$\bar{k}_{ij} = (a^3/D_0) k_{ij}, \bar{k}_{ir} = (a/D_0) k_{ir} \quad (\text{ばね剛性比})$$

$$\bar{k}_c^{(i)} = (a^2/D_0) k_c^{(i)}, \bar{k}_d = (a^4/D_0) k_d$$

$$F_c^{(j)} = (a/D_0) F_c^{(j)}, F_d = (a^3/D_0) F_d \quad (\text{無次元面外荷重})$$

$$\lambda_x = \frac{a^2}{D_0} N_x, \lambda_y = \frac{a^2}{D_0} N_y, \lambda_{xy} = \frac{a^2}{D_0} N_{xy} \quad (\text{無次元座屈荷重})$$

$$\Omega = \omega a^2 \sqrt{\rho h/D_0} \quad (\text{無次元振動数})$$

$$D_0 = E_2 h^3 / 12 (1 - \nu_{12} \nu_{21}) \quad (\text{基準曲げ剛性})$$

..... (14)

以上の諸量を用いて, 無次元化したエネルギー式を

$$F = \bar{T} - \bar{U} + \bar{W} \dots\dots\dots (15)$$

とする。

2・2 変位関数の導入と未定係数による極小化

平板の解析においては, べき級数の変位関数を用いたリッツ法が精度のよい近似解を与えることがわかっている⁽⁶⁾。本論文においてもその手法を採用し変位関数を

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_0(\xi, \eta) &= \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} p_{ij} X_i(\xi) Y_j(\eta) \\ \bar{v}_0(\xi, \eta) &= \sum_{k=0}^{I-1} \sum_{l=0}^{J-1} q_{kl} X_k(\xi) Y_l(\eta) \\ \bar{w}_0(\xi, \eta) &= \sum_{m=0}^{I-1} \sum_{n=0}^{J-1} r_{mn} X_m(\xi) Y_n(\eta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

とする。ただし,

$$\left. \begin{aligned} X_i(\xi) &= \xi^i (\xi+1)^{BC_{11}} (\xi-1)^{BC_{31}} \\ X_k(\xi) &= \xi^k (\xi+1)^{BC_{12}} (\xi-1)^{BC_{32}} \\ X_m(\xi) &= \xi^m (\xi+1)^{BC_{13}} (\xi-1)^{BC_{33}} \\ Y_j(\eta) &= \eta^j (\eta+1)^{BC_{21}} (\eta-1)^{BC_{41}} \\ Y_l(\eta) &= \eta^l (\eta+1)^{BC_{22}} (\eta-1)^{BC_{42}} \\ Y_n(\eta) &= \eta^n (\eta+1)^{BC_{23}} (\eta-1)^{BC_{43}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

である。ここで p_{ij}, q_{kl}, r_{mn} は未定係数を示す。また BC_{ij} は境界条件を指定するインデックスで, i は辺の指定 ($i=1\sim 4$: 順に左辺, 下辺, 右辺, 上辺) で, j はそれぞれの拘束する変位の対象 ($j=1\sim 3$: 順に u_0, v_0, w_0) を表し, 自由は $BC_{ij}=0$, 並進変位を拘束するときは $BC_{ij}=1$, 回転変位を拘束するときは $BC_{ij}=2$ と与えればよい⁽⁶⁾⁽⁷⁾。弾性支持に対する境界条件インデ

ックスは, $BC_{ij}=0$ とおくと, 式(7)の並進ばねと回転ばねの剛性の入力値が用いられる。 $BC_{ij}=1$ のときは回転ばね剛性の入力値のみ有効で, $BC_{ij}=2$ の入力に対しては弾性支持は指定不可能となる。

以上の変位関数を導入した汎関数を変位関数中の未定係数により, 極小化を行う。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial p_{\bar{i}\bar{j}}} = \frac{\partial F}{\partial q_{\bar{k}\bar{l}}} = \frac{\partial F}{\partial r_{\bar{m}\bar{n}}} = 0 \\ \left\{ \begin{aligned} \{\bar{i}(\bar{k}, \bar{m})=0, 1, 2, \dots, I-1\} \\ \{\bar{j}(\bar{l}, \bar{n})=0, 1, 2, \dots, J-1\} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

その結果, 未定係数に関する連立一次方程式が得られ, たわみ量, 座屈荷重値や固有振動数などを求めることができる。

3. 本方法の適用と数値例

提案した方法に基づいて, 図4に示す静的・固有値解析機能を有する計算プログラム COMPLAT を開発した。静的解析の曲げ問題については, 積層板が集中・等分布荷重を受ける場合のたわみ量と応力分布が計算できる。固有値解析の中の弾性座屈については, 種々の荷重下での座屈荷重値と座屈モードを求めることができる。自由振動については固有振動数と振動モードを任意の次数まで求めることができる。

COMPLAT はユーザの入力により種々の構造問題を取り扱うことができるが, 具体的には入力データを

1. 材料定数 ($E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}$)
2. 寸法 (a, b, h)
3. 積層数 (L), L 個の繊維配向角 (θ_k)
4. 境界条件インデックス (BC_{ij})
5. 弾性支持(それぞれのばね剛性 k)
6. 面外集中荷重 (F_c), 等分布荷重 (F_d)
7. 解析問題の選択(静的曲げ, 弾性座屈, 自由振動)とする問題の計算が可能である。

以下に Graphite/Epoxy (AS/3501)⁽⁵⁾ 材料から成り, 辺長に比べ板厚が比較的薄い積層正方形板 ($a=b=1$ [m], $h=0.01$ [m]) に対する適用例を示す。材料定数は

COMPLAT

Fig. 4 COMPLAT system

$$E_1=138.0[\text{GPa}], E_2=8.96[\text{GPa}]$$

$$G_{12}=7.10[\text{GPa}], \nu_{12}=0.3$$

で与えられ, 用いた積層順序は

Model(1) (対称積層クロスプライ)

$$[0/90/0/90/0]_s$$

Model(2) (逆対称積層アングルプライ)

$$[30/-30/30/-30/30]_A$$

の10層(数字は積層角度を示す)とした。収束状況や他の解との比較には, 境界条件は全周単純支持を用い, 境界条件インデックスの採り方は Model(2) は,

$$BC_{11}=BC_{22}=BC_{31}=BC_{42}=1$$

(面内並進変位拘束)

$$BC_{12}=BC_{21}=BC_{32}=BC_{41}=0$$

(面内並進変位自由)

$$BC_{ij}=1 \quad (i=1\sim 4, j=3) \quad (\text{面外並進変位拘束})$$

とする。この計算例は級数解または厳密解をもち, 3・1~3・3節の適用例において精度の検証が可能となるため選ばれた。

3・1 静的曲げへの適用例

二つのモデルの板が等分布荷重 $F_d=100[\text{N/m}^2]$ を受けた場合を考える。変位関数(16)の項数を有限項で打ち切る必要があるため, 項数 $I \times J=4 \times 4, 6 \times 6, 8 \times 8, 10 \times 10$ と変化させた場合の二つのモデルの板の中央点 ($x=0, y=0$) でのたわみ量 w と無次元化した最大垂直応力 $\sigma_{x, \max}/F_d$, $\sigma_{y, \max}/F_d$ と最大せん断応力 $\tau_{xy, \max}/F_d$ の収束状況を表1に示した。表1より, 両モデルともに, ほぼ項数 8×8 で有効数字4けたで収束しているのがわかる。したがって, 静的曲げ解析の以降の計算に関しては, 項数 8×8 を採用する。

表2は, 採用した項数による本解を Navier 解⁽³⁾⁽⁴⁾と汎用有限要素法(FEM)ソフト COSMOS/M⁽⁶⁾の解と比較したものである。Navier 解では境界条件が全周単純支持で分布荷重が正弦波状であれば厳密解を与

Table 1 Convergence of static deflection and maximum stresses for simply supported square plates ($F_d=100[\text{N/m}^2]$, $a=b=1$ [m], $h=0.01$ [m])

$I \times J$	$w \times 10^{-4}$ [m]	$\sigma_{x, \max}/F_d$	$\sigma_{y, \max}/F_d$	$\tau_{xy, \max}/F_d$
Model(1)				
4×4	1.0866	7336	5794	0
6×6	1.0802	7215	5584	0
8×8	1.0800	7207	5575	0
10×10	1.0800	7206	5574	0
Model(2)				
4×4	0.7465	3554	1420	1778
6×6	0.7373	3385	1331	1688
8×8	0.7378	3395	1339	1694
10×10	0.7378	3395	1339	1694

えるが、等分布荷重の場合は、級数解で与えられ、項数ある程度とることにより実用上十分な精度が得られる。Navier 解に関しては、有効数字 4 けたで収束するのに必要であった項数 11×11 を採用した。また FEM も同じように 4 けたで収束した要素数 24×24 (576 要素) を採用した。表 2 より、本解と FEM との間にはわずかの差はあるが、最大誤差は 1% 以内であることから三者ともよく一致しているといえる。図 5 にその際に本解析により求めた応力 $\sigma_{x, \max}/F_d$, $\sigma_{y, \max}/F_d$, $\tau_{xy, \max}/F_d$ の板厚方向の分布を示す。図 5 より、Model (1) は Model (2) に比べ、垂直応力について各層の応力差がより大きく現れる。またせん断応力は、曲げ-伸縮連成の影響があるため Model (2) のみに現れる。

3・2 弾性座屈への適用例 一軸荷重および二軸荷重(静水圧)を受ける、全周単純支持積層正方形板の

Table 2 Comparison with Navier and FEM solutions for static deflection and maximum stresses for simply supported square plates ($F_d=100$ [N/m²], $a=b=1$ [m], $h=0.01$ [m])

	$w \times 10^{-4}$ [m]	$\sigma_{x, \max}/F_d$	$\sigma_{y, \max}/F_d$	$\tau_{xy, \max}/F_d$
Model (1)				
Present	1.0800	7207	5575	0
Navier	1.0800	7203	5570	0
FEM	1.0742	7162	5548	0
Model (2)				
Present	0.7378	3395	1339	1694
Navier	0.7377	3391	1336	1691
FEM	0.7416	3406	1343	1700

Fig. 5 Stress distributions of simply supported square plates subjected to distributed loads ($F_d=100$ [N/m²], $a=b=1$ [m], $h=0.01$ [m])

座屈荷重パラメータ λ の収束状況を静的曲げの例と同様に、表 3 に示した。静的曲げの例より収束は早く、項数 6×6 でほぼ収束をしているのがわかる。

表 4 は採用した項数 6×6 による本解、厳密解⁽³⁾⁽⁴⁾と FEM⁽⁸⁾(要素数 576) との比較を行ったものである。本解と厳密解はよく一致し、FEM の値がわずかに大きい、誤差は 0.5% 以下である。このように座屈問題での本解の妥当性が裏付けられる。

3・3 自由振動への適用例 全周単純支持積層正方形板の一次から五次までの無次元振動数パラメータ

Table 3 Convergence of critical buckling load parameters λ for simply supported square plates ($a=b=1$ [m], $h=0.01$ [m])

$I \times J$	λ (uni-axial load)	λ (bi-axial load)
Model (1)		
4×4	199.0	99.50
6×6	198.9	99.45
8×8	198.9	99.45
10×10	198.9	99.45
Model (2)		
4×4	286.4	143.2
6×6	286.3	143.2
8×8	286.3	143.2
10×10	286.3	143.2

Table 4 Comparison with exact and FEM solutions for critical buckling load parameters λ of simply supported square plates ($a=b=1$ [m], $h=0.01$ [m])

	λ (uni-axial load)	λ (bi-axial load)
Model (1)		
Present	198.9	99.45
Exact	198.9	99.45
FEM	200.0	100.0
Model (2)		
Present	286.3	143.2
Exact	286.3	143.1
FEM	287.8	143.9

Table 5 Convergence of frequency parameters Ω for simply supported square plates ($a=b=1$ [m], $h=0.01$ [m])

$I \times J$	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
Model (1)					
4×4	44.32	109.6	135.3	177.9	332.0
6×6	44.31	109.2	134.7	177.2	232.1
8×8	44.31	109.2	134.7	177.2	228.5
10×10	44.31	109.2	134.7	177.2	228.4
Model (2)					
4×4	53.16	106.0	147.3	213.4	238.4
6×6	53.16	105.7	146.5	185.3	212.6
8×8	53.16	105.7	146.5	183.5	212.6
10×10	53.16	105.7	146.5	183.4	212.6

Ω の収束状況を、項数の変化に対して表5に示した。両方の積層形態ともに高次の振動数になるにつれ収束が遅くなるが、静的曲げの例と同様、項数8×8でよい収束を示す。また一次の振動数パラメータだけを見ると弾性座屈と同様に項数6×6で収束しているのがわかる。

表6は採用項数を8×8としたときの本解と厳密解⁽⁶⁾⁽⁷⁾、FEM⁽⁸⁾(要素数576)を比較したものである。表6より三者ともよく一致している。

次に、Model(1)積層正方形板の全周自由と全周単純支持、全周単純支持と全周固定の間の弾性支持状態

Table 6 Comparison with exact and FEM solutions for frequency parameters Ω of simply supported square plates ($a=b=1$ [m], $h=0.01$ [m])

	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
Model(1)					
Present	44.31	109.2	134.7	177.2	228.5
Exact	44.31	109.2	134.7	177.2	228.4
FEM	44.36	109.5	135.0	178.3	229.3
Model(2)					
Present	53.16	105.7	146.5	183.5	212.6
Exact	53.16	105.7	146.5	183.5	212.6
FEM	52.94	105.4	146.3	183.5	212.1

Fig. 6 Variations of frequency parameters Ω for laminated square plates under varying edge constraints (free-simply supported-clamped)

を考慮した一次から五次までの無次元振動数パラメータ Ω を図6に示した。ここで全周自由 [$BC_{ij}=0$ ($i=1\sim4, j=1, 2, 3$)] と全周単純支持 [$BC_{ij}=1$ ($i=1\sim4, j=1, 2, 3$)] の間の弾性支持条件は並進ばね剛性比 $\bar{k}_{ij}$ ($i=1\sim4, j=1, 2, 3$) を $10\sim10^7$ まで変化させた。全周単純支持と全周固定 [$BC_{ij}=1$ ($i=1\sim4, j=1, 2$), $BC_{ij}=2$ ($i=1\sim4, j=3$)] では、たわみを拘束したままで回転ばね剛性比 $\bar{k}_{ir}$ ($i=1\sim4$) $=10\sim10^7$ まで変化させた。図6より、全周自由-全周単純支持間では $\bar{k}_{ij}=10\sim10^5$ の間で、全周単純支持-全周固定間では $\bar{k}_{ir}=10\sim10^3$ の間で振動数の変化が大きいことがわかる。ま

Fig. 7 Variations of frequency parameters Ω for laminated square plates elastically supported on the four corner points

Fig. 8 Variations of frequency parameters Ω for laminated square plates on the uniform elastic foundation

た全周自由-全周単純支持間において、低い次数ほど小さいばね剛性比で振動数の変化が生じるのがわかる。

次に図2(b), (c)に示した例として, Model(1)の積層正方形板の四隅を集中ばね剛性比 $\bar{k}_{i3}(i=1\sim4)$ $=0\sim\infty$ で支持した場合の一次から五次までの振動数 Ω の変化を図7に示した。図7より、一次から三次の振動数は $\bar{k}_{i3}$ が 10^3 の範囲でなめらかに上昇し、その後一定となる。また四次と五次の振動数は $\bar{k}_{i3}=10\sim10^3$ の間で急に上昇している。

最後に図8では弾性床のモデルとして, Model(1)の積層正方形板を等分布ばね $\bar{k}_d=0\sim10^6$ で一様に支持した場合の振動数 Ω の変化を示したものである。一次から三次の振動数はつねに同じ値であり、 $\bar{k}_d=10^5$ 以上の値を取るとほぼ剛体に近い床となり、すべての次数の振動数が高い値で一致するのがわかる。

4. 結 論

本研究では古典板理論とリッツ法に基づいて、非対称積層を含めた任意の積層構成の長方形板に関する、静的問題(静たわみ、応力)と固有値問題(弾性座屈、自由振動)を統一して解析する一般的方法を提案した。その解析においては、四辺が任意の境界条件(弾性支持を含めた自由から固定までの境界)や弾性点支持、弾性床などをもつ場合、また荷重条件について静的解析は面外の集中荷重と等分布荷重、座屈解析はいくつかの面内荷重形態を考慮した。以上の解析機能を COMPLAT と称する計算プログラムとしてまとめた。

数値例において種々の計算を行い、解析の目的によって収束状況は若干異なるが、全般的に十分な収束性を得た。また他の方法による結果との比較では、差異は最大でも1%以内であり、本解析法の良好な解析精

度が示された。特に従来は固有値問題を中心に用いられたリッツ法であるが、静的な応力解析にも十分な精度を有することが示された。

近年、複雑な形状のモデリングにすぐれた汎用 FEM プログラムにおいて、複合材料構造の解析機能が拡張されつつある。しかし汎用 FEM においては、積層のモデリングや要素分割の変更が面倒であり、パラメータスタディには適していない。複合材料の設計分野では、積層板等の基本的な構造要素の力学特性データが必要であるが、材料特性の多様さのためハンドブック化が困難である。このため複合材料の特性に対応して、その都度容易に特性計算が可能なプログラムが必要とされている。以上の理由から、複合材料設計において、パラメータスタディに適した本解析法と COMPLAT プログラムの利用が有効であると思われる。

文 献

- (1) 成田吉弘, 複合材料構造物の座屈問題と最近の研究動向, 機械の研究, 45-6(1992), 669-674.
- (2) 成田吉弘, 複合材料構造物のモデリングと振動問題における研究展望, 機論, 59-565, C(1994), 2593.
- (3) Jones, R. M., *Mechanics of Composite Materials*, (1975), Washington D. C., Scripta Book Co.
- (4) Whitney, J. M., *Structural Analysis of Laminated Anisotropic Plates*, (1987), Technomic Publishing Co.
- (5) Vinson, J. R. and Sierakowski, R. L., *The Behavior of Structures Composed of Composite Materials*, (1986), Martinus Nijhoff, Dordrecht [福田博・ほか3名訳, 複合材料の構造力学, (1987), 日刊工業新聞社].
- (6) 成田吉弘, 境界条件の自由な組み合わせを考慮した FRP 積層長方形板の振動解析法, 日本複合材料学会誌, 18-3(1992), 113-120.
- (7) Narita, Y., ほか3名, *AIAA J.*, 30(1992), 790-796.
- (8) COSMOS/M1.65A GEOSTAR, (1992), 横河技術情報(株).