コースティックス法の円板曲げ問題への適用*

徐 偉 奇^{*1}, 高 橋 賞^{*2}Application of the Caustics Method to Bending Problem
of Circular Plates with Clamped Edges

Weiqi XU and Susumu TAKAHASHI

The optical method of caustics is extended to the bending problem of circular plates with clamped edges under uniform loading on their lateral surfaces. The complete theory of caustics for this problem including predictions of the initial curve, caustic shape and properties, as well as a corresponding measurement method, is presented and investigated. Using this method, it is possible to determine the existing lateral load of the plate, flexural rigidity of the plate, and the bending moments in the plate. Two kinds of plate (polycarbonate, stainless) are used for the research. It is shown that the experimental results for the bending moment are in good agreement with theoretical values, and measured values for lateral load agree well with values obtained using the precision pressure gauges.

Key Words: Experimental Stress Analysis, Elasticity, Bending, Caustics Method, Pressure, Bending Moment

1. 緒 言

横荷重を受ける弾性平板は機械の一つの構造要素として極めて広く用いられており、弾性平板のたわみや応力の分布を解明する実験方法としては光弾性法、モアレ法、干渉法、ホログラフィ干渉法、およびひずみゲージ法などがよく利用されている。これらの方法は、すでに Theocaris⁽¹⁾ が指摘しているように独特の利点と欠点を有し、かなりの労力を費やすと考えられる。

一方、コースティックス法は比較的簡単な光学装置を用い、非接触に測定部分の情報を直接用いる光学的手法で応力集中や変形における光の屈折、あるいは反射によって形成されるコースティックス像を解析する方法であり、これまでおもに静的、あるいは動的応力拡大係数の測定、または集中荷重のような応力特異場の解析法としてさまざまな問題に適用されてきた^{(2)~(4)}。

しかしコースティックス法は特異場問題だけに限ら

ず非特異場問題への試みもなされており、板の曲げ問題⁽¹⁾⁽⁵⁾、ねじり問題⁽⁶⁾⁽⁷⁾などへの適用が提案されている。特に Theocaris⁽¹⁾⁽²⁾ は、コースティックス法を周辺が単純に支持される板の曲げ問題へ適用させ、円板、三角形板、および正方形板を取り上げ、実験で得られたコースティックス像と理論で導かれたコースティックス像が一致することを報告した。

本研究では円周が固定される場合の円板曲げ問題に対するコースティックス理論を提案し、この実験方法の有効性、妥当性を調べるために、コースティックス像から求めた板の側面荷重と精密圧力ゲージにより測定した圧力値を比較し、またコースティックス法から求めた板の曲げモーメント、板の曲げ剛性値をそれぞれの理論値と比較検討した。

本手法を円周が固定される円板の曲げ問題に適用することにより以下の利点を得ることができる。

(1) 正の圧力と負の圧力を測定することができ、さらに高速撮影装置を用い脈動圧力の測定に生かせる可能性もある。(2) 板の曲げ剛性を直接測定することが可能になり、弾性係数やポアソン比の測定が困難な場合に有効となる。(3) 曲げモーメントを測定することができる。

* 原稿受付 1995年11月27日。

*¹ 関東学院大学大学院 (〒236 横浜市金沢区六浦町4834)。*² 正員、関東学院大学工学部。

2. 理 論

2.1 円板の対称曲げ⁽⁸⁾ 均一な材質の円板の側面に働く荷重と円板の拘束条件が円板の中心に対称的に分布しているならば、その問題は軸対称曲げ問題と考えられる。小さなたわみの場合には円板内の任意点 p の曲げモーメント M_r, M_θ は式(1), (2)で得られる。

$$M_r = -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right) \quad (1)$$

$$M_\theta = -D \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right) \quad (2)$$

ここで D は円板の曲げ剛性で次式で与えられる。

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (3)$$

ここで E は弾性係数, ν はポアソン比, t は板厚である。

2.2 円周が固定された等分布荷重が作用する円板⁽⁸⁾ 円周を固定した半径 a の円板が、その側表面に強さ q の等分布荷重の作用を受けるならば、板の中心から距離 r でのたわみ w は次式のように表される。

$$w = \frac{q}{64D} (a^2 - r^2)^2 \quad (4)$$

その点の半径方向と接線方向の曲げモーメント M_r, M_θ は次式で得られる。

$$M_r = \frac{q}{16} [a^2(1+\nu) - r^2(3+\nu)] \quad (5)$$

$$M_\theta = \frac{q}{16} [a^2(1+\nu) - r^2(1+3\nu)] \quad (6)$$

2.3 軸対称問題の反射コースティックス理論

反射形コースティックス法の基本原理を図2に示す。一般に任意の軸対称の横荷重を受ける弾性平板に光を入射させる状態を考える。板の表面にはたわみが生じているために入射した光の行路程が変化し光の方向が曲げられ、その結果としてスクリーン上に光が集中す

る火線(Caustic Curve)と呼ばれる領域が生じ、スクリーン上のこの像をコースティックス像(Caustics)と呼んでいる。

直角座標系における試験片上の一点 $p(x, y)$ からの反射光線はスクリーン上に投射する位置 $P(X, Y)$ が次式で得られる。

$$X = \lambda x - 2Z_0 \frac{\partial w}{\partial x} \quad (7)$$

$$Y = \lambda y - 2Z_0 \frac{\partial w}{\partial y} \quad (8)$$

ここで λ は光線の投影倍率で次式で与えられる。

$$\lambda = \frac{Z_0 + Z_i}{Z_i} \quad (9)$$

ここで Z_0 は試験片とスクリーンの距離, Z_i は焦点の位置と試験片の距離である。

スクリーン上で物体と光は1対1の対応ではなく数学的には特異点の存在と対応しており、そのような状態が存在するための必要条件は式(10)に示すようにヤコビアン行列式が零になることである。

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial r} & \frac{\partial X}{\partial \theta} \\ \frac{\partial Y}{\partial r} & \frac{\partial Y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = 0 \quad (10)$$

式(7), (8)を式(10)に代入すれば、軸対称問題では次式のように表される。

$$\frac{d^2 w}{dr^2} = \frac{\lambda}{2Z_0} \quad (11)$$

式(11)の関係を満たす r, θ を求め、これらを式(7), (8)に代入するとスクリーン上に形成されるコースティックス像を求めることができる。一般に軸対称曲げ問題ではコースティックス像は真円である。ここで r, θ はコースティックス像を形成する光が物体上のどの位置から来るかを示すもので、これを初期曲線(Ini-

Fig. 1 Bending of circular plate

Fig. 2 Fundamental schematic of reflected caustics method for bending problem of circular plate

tial Curve)と呼んでいる。

コースティック像の半径 R_0 と初期曲線の位置 r_0 を測定すれば、その位置のたわみの微分値がただちに得られる。

$$\left. \frac{dw}{dr} \right|_{r=r_0} = \frac{\lambda r_0 - R_0}{2Z_0} \quad (12)$$

$$\left. \frac{d^2w}{dr^2} \right|_{r=r_0} = \frac{\lambda}{2Z_0} \quad (13)$$

ゆえに初期曲線の位置における曲率 ρ を測定することもできる。

$$\rho|_{r=r_0} = -\frac{2Z_0}{\lambda} \quad (14)$$

式(12), (13)を式(1), (2)に代入して、その点の曲げモーメントを算定することができる。

光学系のパラメータ λ, Z_0 を調整することにより、相応点の曲げモーメント M_r, M_θ がわかる。

2・4 円周が固定された円板のコースティック像
式(4)を式(11)に代入し、 r について解くと次式のようになる。

$$r = \left(\frac{c+1}{3} \right)^{1/2} a \equiv r_0 \quad (15)$$

ここで c は無次元化係数で次式で与えられる。

$$c = \frac{8\lambda D}{qZ_0 a^2} \quad (16)$$

式(15)の r が初期曲線 r_0 となる。初期曲線の位置が円板に収まる条件は、たわみ $w > 0$ の場合には $0 < c < 2$, たわみ $w < 0$ の場合には $-1 < c < 0$ である。よって、この半径 r_0 の円周からの反射光がスクリーン上に形成するコースティック像の形状は式(7), (8)と式(15)より次式で表すことができる。この像は半径 R_0 の真円である。

$$R_0 = \frac{2\lambda a}{c} \left(\frac{r_0}{a} \right)^3 \quad (17)$$

式(15)と式(17)を利用することによって次式が得られる。

$$\frac{c}{2} \left(\frac{c+1}{3} \right)^{-3/2} = \frac{\lambda a}{R_0} \quad (18)$$

式(18)は不定方程式であり、その関係は図4により

Fig. 3 Shape of caustics image

示される。

図4でコースティック像の半径 R_0 は正圧の場合には正の値を取り、負圧の場合には負の値を取る。 R_0 を測定すれば、図4より無次元化係数 c が得られる。この c を次式に代入することにより、板に作用する一様分布荷重 q を求めることができる。

$$q = \frac{8\lambda D}{Z_0 a^2 c} \quad (19)$$

また c を次式に代入することにより、板の曲げ剛性の値 D を求めることができる。

$$D = \frac{qZ_0 a^2 c}{8\lambda} \quad (20)$$

2・5 せん断変形の影響 前述の理論はすべてせん断変形を無視したものであり、その数量的効果は薄板においてはあまり顕著ではない。しかし板厚が半径 a に比べてやや厚くなると、せん断力によるたわみの増加は省略できなくなる。円周を固定し一様分布荷重をうける円板の場合には曲げモーメントはせん断変形に依存せずにたわみだけが変化し、たわみ w は次式のように表される⁽⁹⁾。

$$w = \frac{q_0 a^4}{64D} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \left(1 - \frac{r^2}{a^2} + 16 \frac{h^2}{a^2} \right) \quad (21)$$

(a) Pressure

(b) Vacuum

Fig. 4 Relation of dimensionless coefficient $\lambda a/R_0$ with c

ここで h^2 は曲げ剛性 $D[D=Et^3/12(1-\nu^2)]$ とせん断剛性 $G[G=E/2(1+\nu)]$ および係数 $t_s(t_s=t/1.2)$ の比で次式で与えられる⁽⁹⁾。

$$h^2 = \frac{D}{Gt_s} = \frac{t^2}{5(1-\nu)} \quad (22)$$

式(15)の導く過程を重複すると、式(21)と式(11)よりせん断変形の影響を考える場合の初期曲線の半径 r_0^s は次式のように表される。

$$r_0^s = \left(\frac{c+1+8h^2/a^2}{3} \right)^{1/2} a \quad (23)$$

同様に、式(17)の導く過程を重複すると、式(21)、(7)、(8)と式(23)よりコースティック像の半径 R_0^s は次式のように表される。

$$R_0^s = \frac{2\lambda a}{c} \left(\frac{r_0^s}{a} \right)^3 \quad (24)$$

せん断変形の影響を考える場合には初期曲線の半径はやや増大するが、コースティック像の半径と初期曲線の関係式は変わらない。

コースティック像の半径 R_0^s と無次元化係数 c は次式のような関係になる。

$$\frac{c}{2} \left(\frac{c+1+8h^2/a^2}{3} \right)^{-3/2} = \frac{\lambda a}{R_0^s} \quad (25)$$

図5から、せん断変形の影響を考える場合には板のたわみがやや増加するために、コースティック像の直径が次第に増大する。せん断変形を無視する場合に比べ板厚と無次元化係数 $\lambda a/R_0^s$ が増大するのに伴い、せん断変形は無次元化係数 c にかなり影響を与えることがわかった。さらにせん断変形の影響を考慮しないと、側面荷重に対して過大な評価を与え板の剛性に過小な評価を与えることもわかった。

3. 試験片および実験方法

3.1 試験片 本実験に使用した試験片は、市販品の片面研磨済ステンレス SUS 304 L 板とポリカーボネート板であり、ステンレス板は研磨面を反射面と

しポリカーボネート板は表面が極めて平らなのでその表面をそのまま反射面とした。また正確にコースティック像を検出するために試験片の反射面を研磨液により仕上げた。板の寸法と機械的性質を表1に示す。

3.2 実験方法 図6に示すように、試験片を中心に穴を開けた2枚の鋼板で挟み、後方に圧縮空気を送るホースをつなげた鋼板を取付け、測定台に設置し、試験片にコリメータを通して平行光にしたレーザ光を照射させ、その反射光をスクリーンに当てコースティック像を写し出した。

一方、コンプレッサ(真空ポンプ)からの空気の圧力をバルブで調整し精密圧力計により数値を記録し、同時に各負荷圧力状態におけるコースティック像の変化をカメラで撮影した。その後、撮影した写真のネガを拡大投影機にかけ、各コースティック像の直径の測定を行った。このとき反射角の影響を避けるためにコースティック像の鉛直方向の直径を測定した。本実験で使用した実験装置を図7に示す。

曲げモーメントの測定については、まずコースティック像の直径を測定し、スクリーン上にコースティック像の上頂点、下頂点をともにマークする。その後、コリメータと試験片の間にピンホールを据付けた精密 X、Y、Z 軸ステージを介し、それによってピンホールを通過していない光線が遮断されるため、スクリーン上にはピンホールを通過した光線だけが現れる。ピンホールを通過させた光線を試験片中心の鉛直方向に沿って下端から徐々に上昇し、最終的にスクリーン上に

Table 1 Mechanical properties

Material	Thickness (10^{-3}m)	Young's Modulus (10^9N/m^2)	Poisson's Ratio	Flexural Rigidity (Nm)
Stainless	0.465	193.3	0.26	1.737
Polycarbonate	2.970	2.2	0.36	5.518

Fig. 5 Relation of dimensionless coefficient $\lambda a/R_0^s$ with c

Fig. 6 Specimen and frame

光点とマークと一致させる。そのときスクリーン上において、マークした場所の周辺の位置を数点選び測定し、その位置のピンホール値も測定する。そのデータをもとに算術平均計算により初期曲線の半径を決定する。コースティックス像の半径と初期曲線の半径の測定値を式(12)、(13)に代入し、たわみの微分値を求め、式(1)、(2)により初期曲線 r_0 のところの曲げモーメント M_r, M_θ を算定する。スクリーンと試験片の距離を変更することにより、初期曲線の位置が移動し、試験片表面の該当する位置の曲げモーメントを測定する。本方法は一般的な軸対称曲げ問題に適用するが、曲げモーメントの測定は初期曲線を動かせる範囲以内に制限される。本研究においては、実像の初期曲線の出る範囲は正圧の場合には $0.557a \sim a$ 、負圧の場合には $0 \sim 0.577a$ である。

4. 実験結果および考察

本実験で得られたステンレス板のコースティックス像写真の一例を図8に示す。この写真より円周には光がそのまわりより明るく、コースティックス火線であることが確認された。鉛直方向のコースティックス像の直径 D_0 を測定し、図4により無次元化係数 c を取り、

Fig. 7 Experimental apparatus of caustics method

Fig. 8 Photograph of caustics image

式(19)に代入し荷重 q を算出する。反復適用計算方法により式(18)から直接に無次元化係数 c を求めることもできる。

図9の(a)、(b)はそれぞれ正圧と負圧の場合におけるコースティックス法から求めたステンレスの側面等分布荷重 q と精密圧力ゲージから得られた圧力値 P_g を比較したものである。図9に示すように q と P_g は1対1の比例関係である。最小二乗法により求めた q と P_g の差、正圧の場合には約 $0.180 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ 、負圧の場合にはほぼ一致した。

図10はポリカーボネートの測定結果であり、せん断変形の影響を無視する場合には、かなりの誤差を生じることがわかった。

本実験で使用したステンレス板は、購入時すでに片面が研磨済であり、表面処理の違いにより、内部応力の分布は対称ではなく、内部応力の違いにより板は初期段階ですでに微小のたわみが生じている。これは初期条件として微小の正圧力が板に加わることに相当す

(a) Pressure

(b) Vacuum

Fig. 9 Comparison of pressure value obtained by pressure gauge and caustics method

る⁽¹⁰⁾。また、板の境界の拘束は完全な剛性拘束ではないため、たわみ理論値より若干大きくなり、コースティックス法から測定した荷重 q は、実際に加えた圧力より多少大きくなる。 q と P_g の差はどのような関係で変化するかは理論上まだ解明していない。本実験のポリカーボネート板の測定結果では、 q と P_g の差はほぼ一定になることが得られた。以上より、ステンレス板の負圧の場合には両者の影響が相殺されるため、 q と P_g の差は零に近くなり、逆に正圧の場合には両者の影響が重なり、誤差が増大すると考えられる。

以上の実験結果から、 q と P_g は1対1の比例関係を保ち、また q と P_g の差はたわみ、圧力と関係がなく、この差は初期誤差と考えられる。ゆえに圧力の差の測定によって十分な精度を有する。すなわち、 $\Delta q = \Delta P_g$ であることがわかった。

図11はコースティックス法を用いて測定した曲げモーメントと理論式(5)、(6)から得られた計算値を比較したものである。両者は一致することが確かめられた。

コースティック像から求めた q と精密圧力ゲージの測定値 P_g は相等ではないため曲げ剛性を求める式

(20)を直接利用することができない。そこで両者の間の初期誤差を削除するため、式(20)を増分の形に書き直すと

$$D = \frac{Z_0 a^2}{8\lambda} \frac{\Delta P_g}{\Delta(1/c)} \quad (26)$$

となる。

図12は今回のステンレス板の実験結果である。最小二乗法により圧力値 P_g と無次元化係数 $(1/c)$ の関係式は図の中の式になり、 $\Delta P_g / \Delta(1/c) = 0.169159 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ である。このデータを式(26)に代入し、板の曲げ剛性 D を求めた。表2は理論式(3)より算出した曲げ剛性値とコースティックス法から求めた曲げ剛性値を比較するものであり、両者はかなり近い値で本手法は曲げ剛性の測定に有効であることが確かめられた。

5. 結 論

理論的、実験的にコースティックス法を円周が固定された円板の曲げ問題へ適用することを検討した結果、次のことが明らかとなった。

- (1) 円周が固定された円板の曲げ問題における反射形コースティックス理論式を確立した。具体的には初期曲線およびコースティック像の式を導いた。
- (2) セン断変形は初期曲線に影響するが初期曲線とコースティック像の関係式には影響を与えないことがわかった。
- (3) 上述の理論により、円板の側面に働く荷重と板の曲げ剛性を測定する方法を提案した。

Fig. 10 Influence of shear deformation

Fig. 11 Comparison of bending moment obtained by theoretical value and caustics

Table 2 Flexural rigidity

Stainless plate	Theory	Caustics method
Flexural rigidity (Nm)	1.737	1.714

Fig. 12 Relation of pressure P_g and dimensionless coefficient $1/c$

(4) 本実験でコースティックス法を用いて求めた圧力差と精密圧力ゲージにより求められた圧力差に関しては一致していることが明らかになった。

(5) コースティックス装置とピンホール装置を併用し、板の曲げモーメントを測定する手法を提案した。このことより実験値と理論値は一致していることが確かめられた。

(6) 本研究で開発した実験方法は実用価値のある測定法として考えられるので今後発展していくことを期待する。

文 献

- (1) Theocaris, P. S. and Gdoutos, E. E., *J. Appl. Mech.*, **44**-3 (1977), 107-111.
- (2) Kobayashi, A. S., *Handbook on Experimental Mechanics*, (1987), 430-500, Prentice-hall.
- (3) 高橋賞・清水紘治, 機械の研究, **37**-4 (1985), 485-490.
- (4) 高橋賞・清水紘治, 機械の研究, **37**-5 (1985), 621-626.
- (5) Theocaris, P. S., *Int. J. Solids Struct.*, **13** (1977), 1281-1291.
- (6) Theocaris, P. S., *Exp. Mech.*, **29**-3 (1989), 285-290.
- (7) 徐偉奇・高橋賞, 機論, **62**-593, A (1996), 144-149.
- (8) S. チモシェンコ・S. ヴォアノフスキー・クリーガー, 板とシェルの理論(上), (1973), 47-53, 丸善.
- (9) K. マルゲール・H. ヴェーヴェルニンレ, 弾性平板, (1974), 191-196, 培風館.
- (10) S. チモシェンコ・S. ヴォアノフスキー・クリーガー, 板とシェルの理論(下), (1973), 370-372, 丸善.

-
- (1) Theocaris, P. S. and Gdoutos, E. E., *J. Appl. Mech.*, **44**-